

Unidade VI: Árvores Alvinegras



PUC Minas

Instituto de Ciências Exatas e Informática
Departamento de Ciência da Computação

Introdução

- Estrutura de dados mais eficiente de representar as árvores-2.3.4, evitando o desperdício de memória
- Substitui a representação múltipla de nós por uma representação única contendo os atributos: elemento, apontadores esq e dir e um bit de cor

Exercício Resolvido (1)

- Implemente a classe Nó da árvore alvinegra

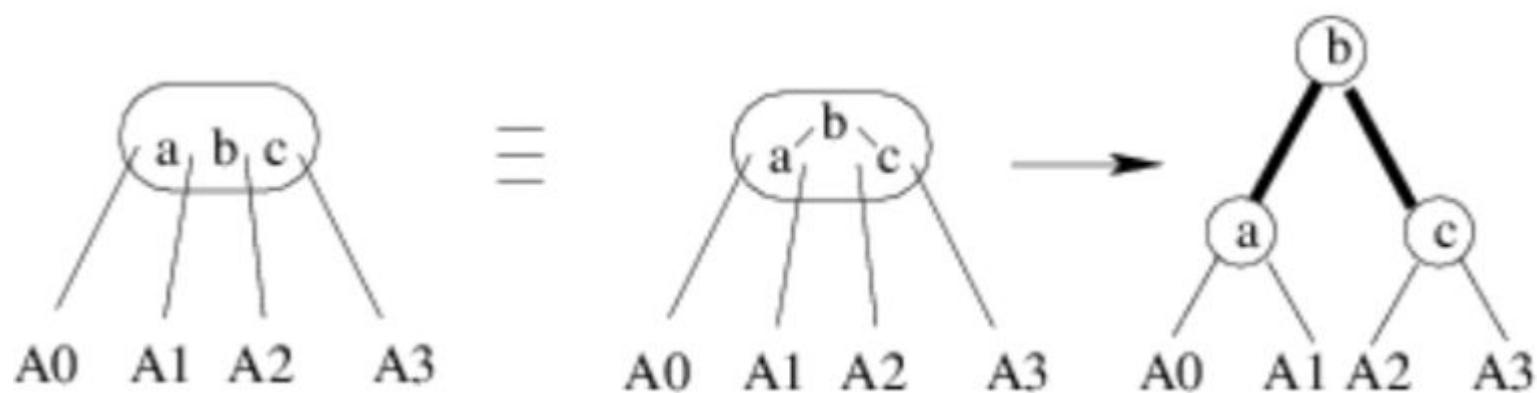
Exercício Resolvido (1)

- Implemente a classe Nó da árvore alvinegra

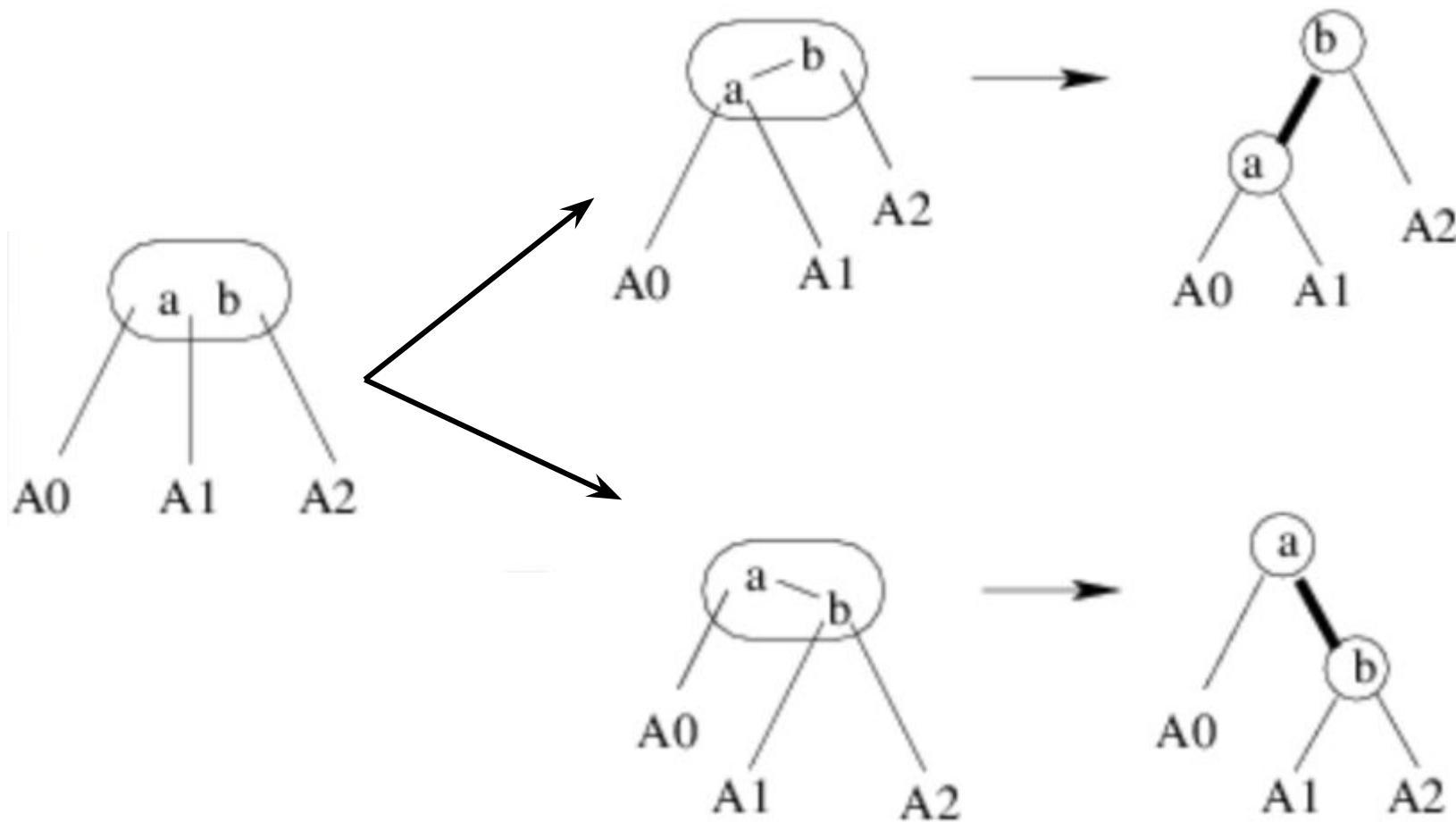
```
class NoAN{  
    public boolean cor;  
    public int elemento;  
    public NoAN esq, dir;  
    public NoAN (){  
        this(-1);  
    }  
    public NoAN (int elemento){  
        this(elemento, false, null, null);  
    }  
    public NoAN (int elemento, boolean cor){  
        this(elemento, cor, null, null);  
    }  
    public NoAN (int elemento, boolean cor, NoAN esq, NoAN dir){  
        this.cor = cor;  
        this.elemento = elemento;  
        this.esq = esq;  
        this.dir = dir;  
    }  
}
```

Colorindo as Arestras

- Simula a hierarquia 2.3.4, colorindo as arestras entre os nós de duas formas:
 - **Aresta preta (traço grosso):** Entre gêmeos (mesmo nó na 2.3.4)
 - **Aresta branca (traço fino):** Entre não gêmeos na 2.3.4

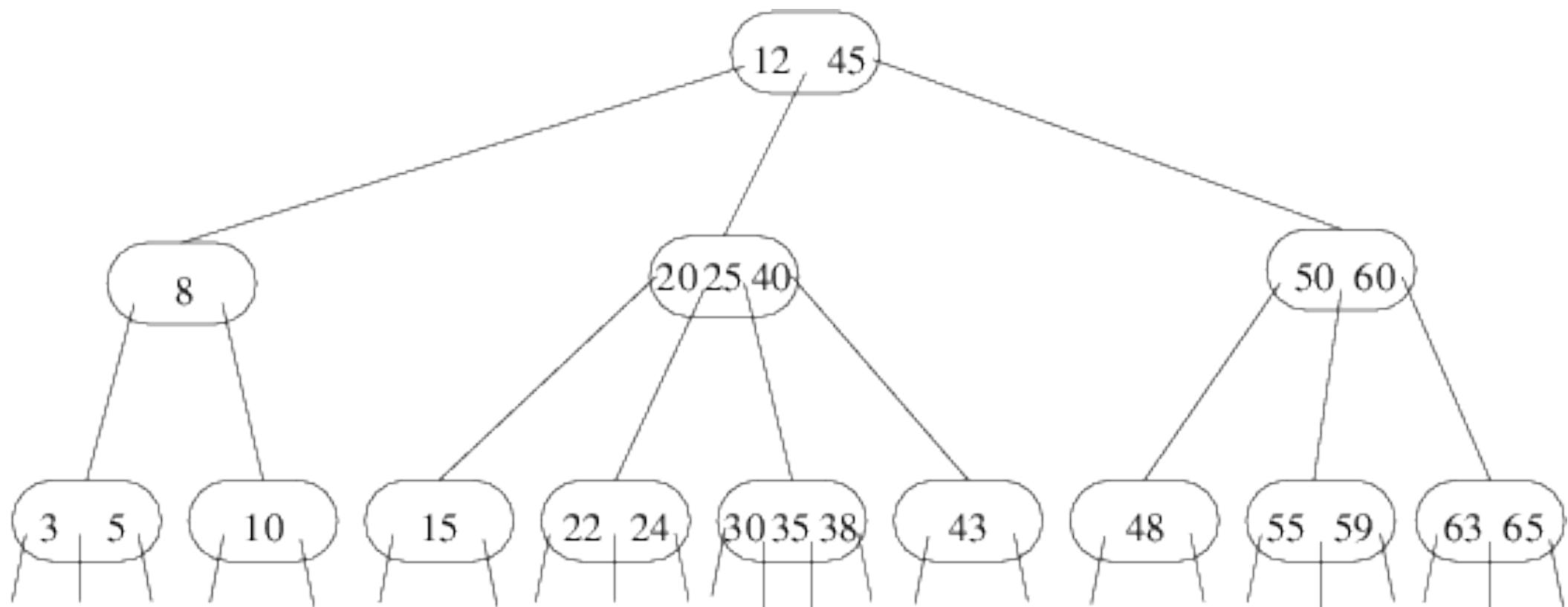


Colorindo as Arestras para Nós do Tipo 3-Nó



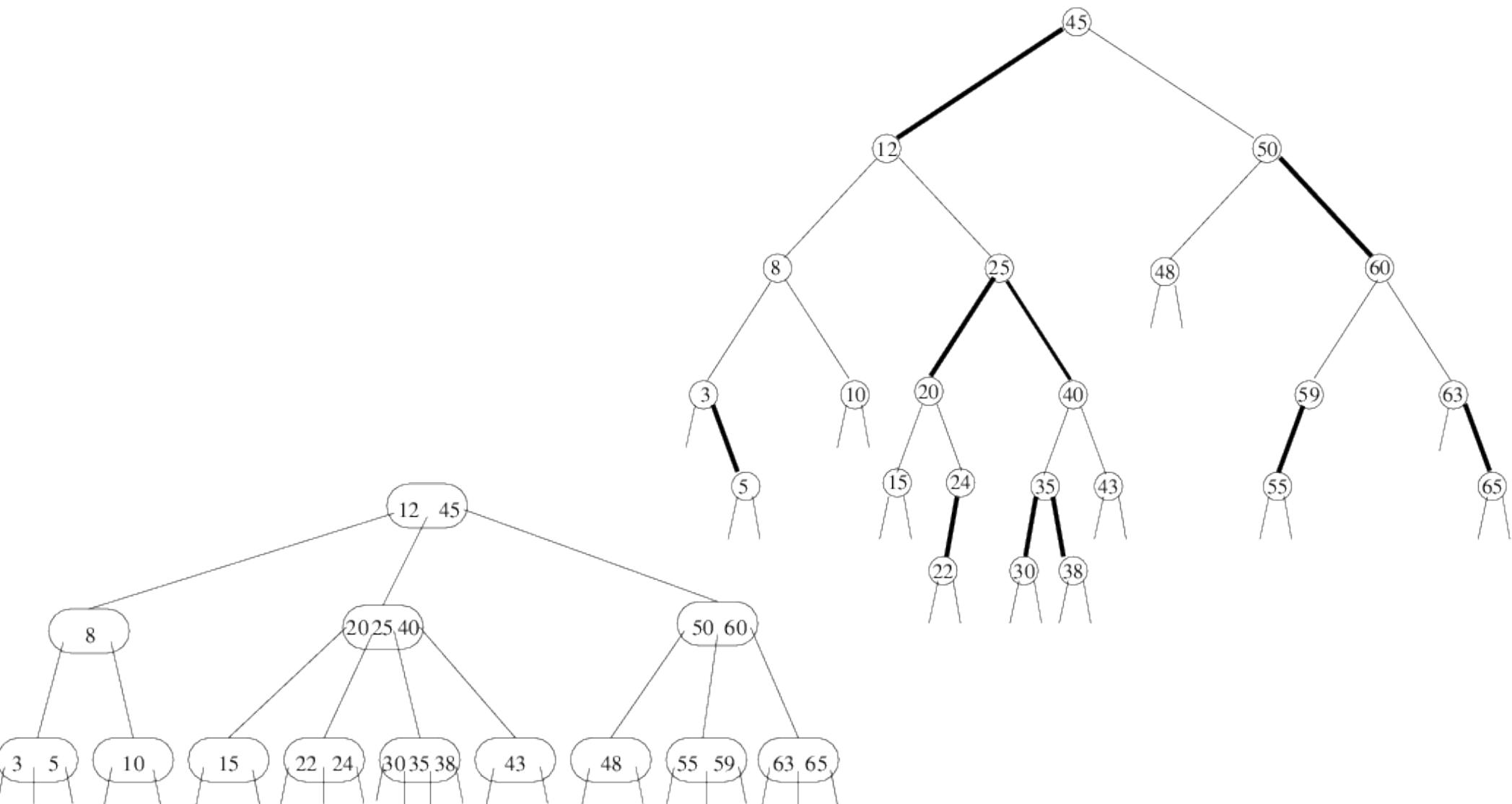
Exercício Resolvido (2)

- Encontre uma árvore alvinegra equivalente à 2.3.4 abaixo:



Exercício Resolvido (2)

- Encontre uma árvore alvinegra equivalente à 2.3.4 abaixo:



Exercício Resolvido (3)

- Dada uma 2.3.4 com altura h , quais são a menor e maior alturas possíveis da alvinegra correspondente? Quando temos cada uma dessas alturas?

Exercício Resolvido (3)

- Dada uma 2.3.4 com altura h , quais são a menor e maior alturas possíveis da alvinegra correspondente? Quando temos cada uma dessas alturas?

Resposta: A menor é h e a maior, $2h$. Elas acontecem, por exemplo, quando todos os nós são do tipo 2-nó e 4-nó, respectivamente

Exercício Resolvido (4)

- Qual é a relação entre as arestas da 2.3.4 com as brancas da alvinegra?

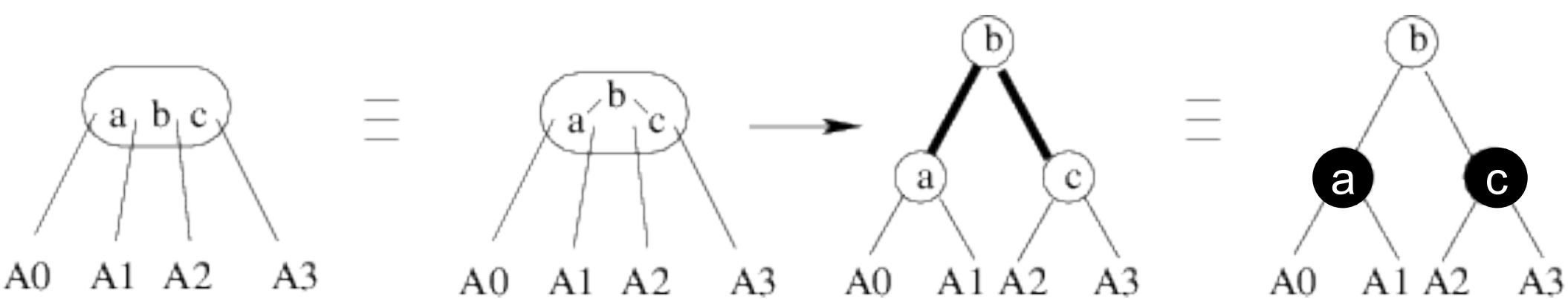
Exercício Resolvido (4)

- Qual é a relação entre as arestas da 2.3.4 com as brancas da alvinegra?

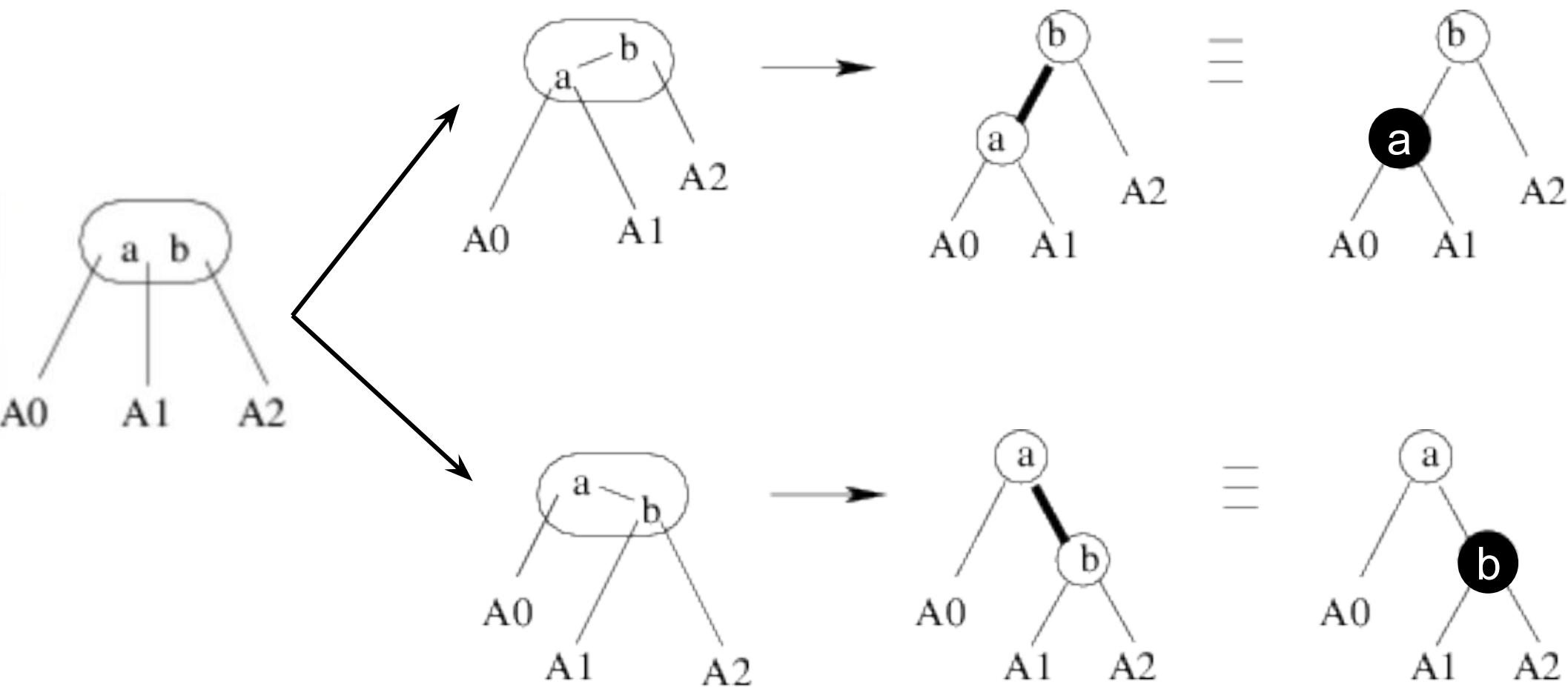
Resposta: As brancas são exatamente as arestas da 2.3.4

Colorindo os Nós

- Nossa atribuição de cores, na verdade, será nos nós em vez das arestas:
 - **Nó preto:** Nó gêmeo do pai na 2.3.4
 - **Nó branco:** Nó **NÃO** gêmeo do pai na 2.3.4

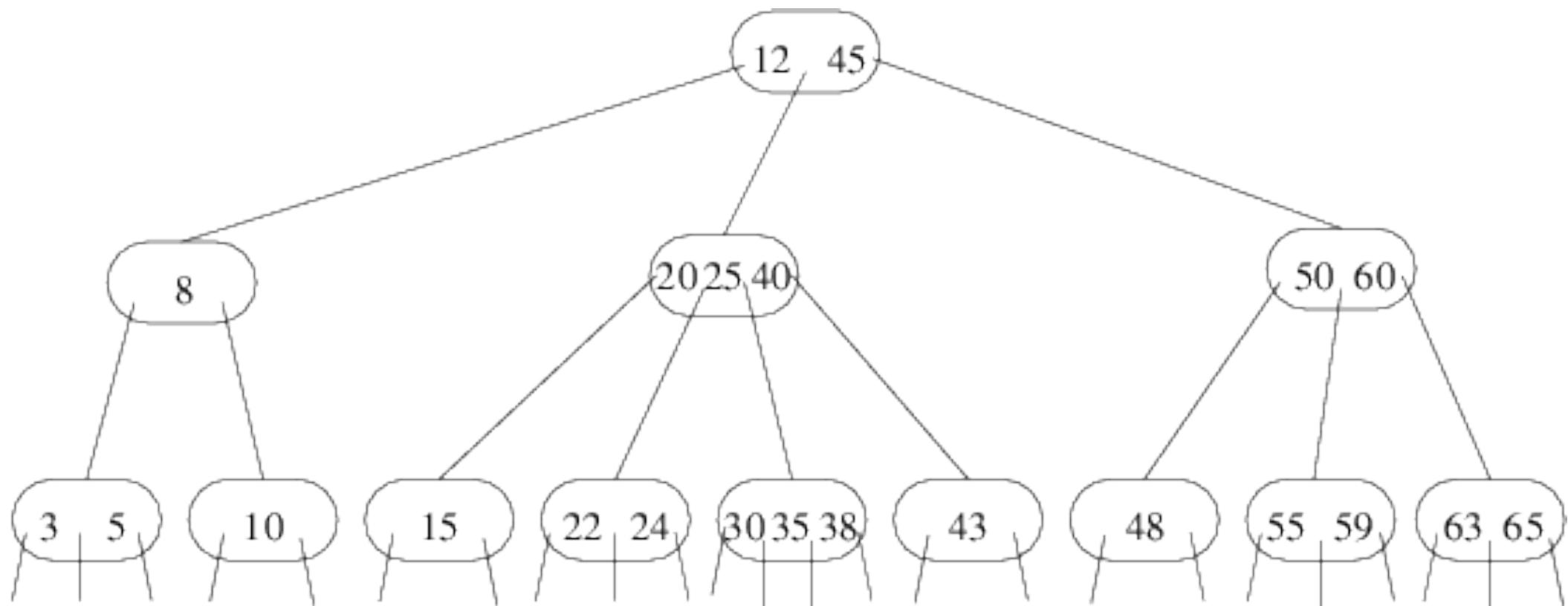


Colorindo os Nós do Tipo 3-Nó



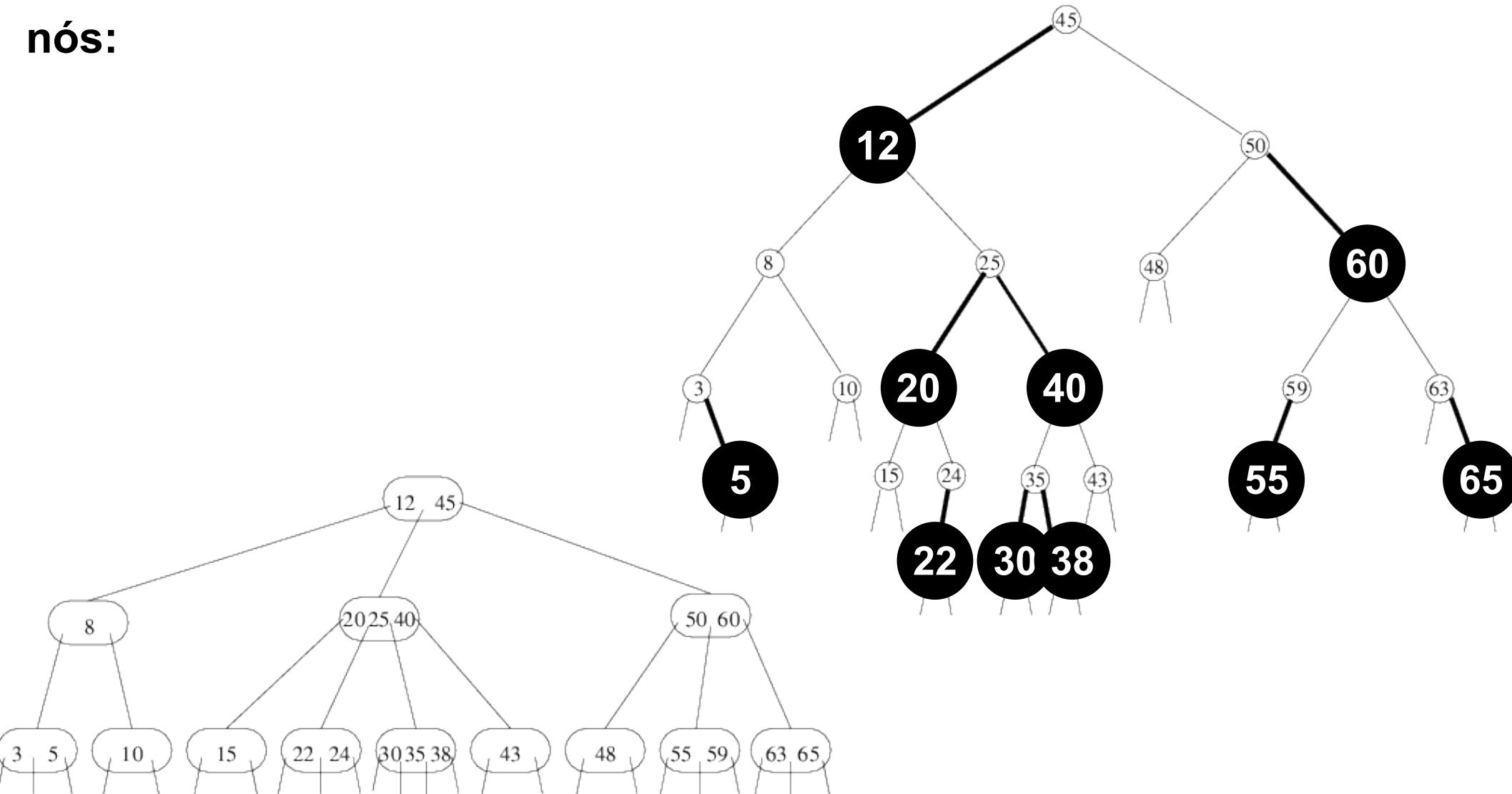
Exercício Resolvido (5)

- Encontre uma árvore alvinegra equivalente à 2.3.4 abaixo, **colorindo os nós**:



Exercício Resolvido (5)

- Encontre uma árvore alvinegra equivalente à 2.3.4 abaixo, **colorindo os nós:**



Pesquisa e Caminhamento

- As duas operações desconsideram as cores e utilizam o mesmo procedimento das árvores binárias
- O pior caso (e o médio também) da pesquisa faz $\Theta(\lg(n))$ comparações
- O caminhamento faz $\Theta(n)$ visitas

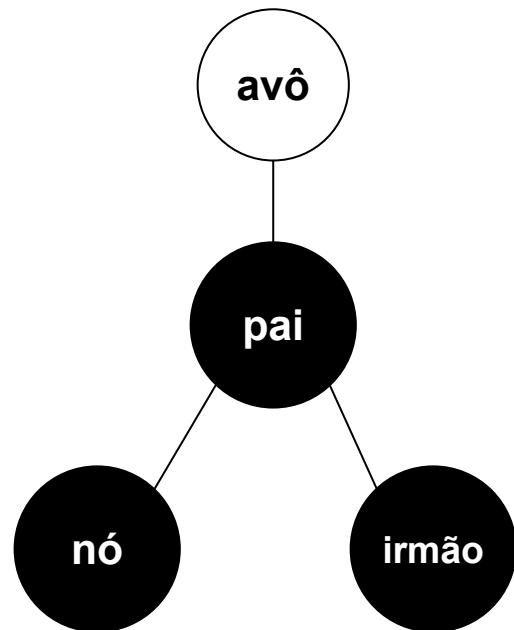
Exercício Resolvido (6)

- Qual é o número máximo de nós pretos consecutivos?

Exercício Resolvido (6)

- Qual é o número máximo de nós pretos consecutivos?

Resposta: Nunca teremos nós pretos consecutivos. Isso significaria mais de três elementos em um nó 2.3.4. Nesse caso, o nó e seu irmão seriam gêmeos do pai e esse, gêmeo do avô

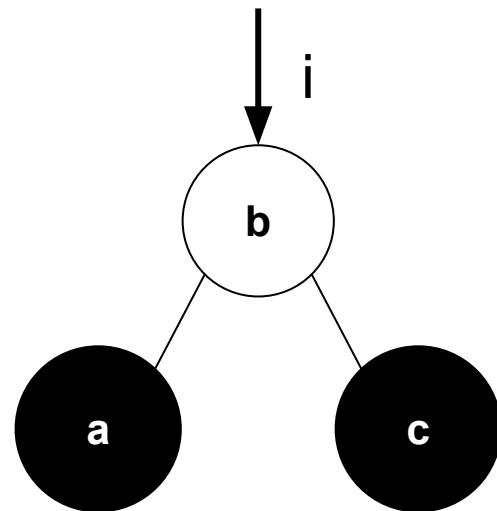


Inserção de Elementos em Folhas Pretas

- Nossa inserção nas árvores binárias e 2.3.4 acontece nas folhas
- Inserindo um elemento em um 2-nó ou 3-nó da 2.3.4, tal elemento será gêmeo dos existentes naquele nó. Em um 4-nó, temos uma fragmentação e o novo elemento será gêmeo em um dos nós fragmentados
- Na alvinegra, toda folha é preta, pois seu elemento é gêmeo do elemento pai na 2.3.4 correspondente

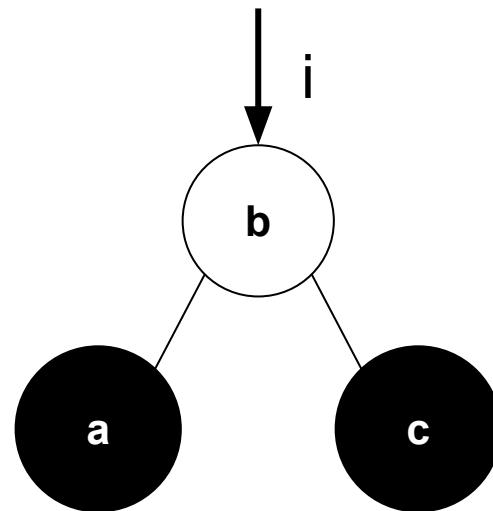
Exercício Resolvido (7)

- Faça o método **boolean isNoTipoQuatro(NoAN i)** que recebe um ponteiro para um nó da alvinegra e retorna true se esse elemento e seus dois filhos são gêmeos na 2.3.4 correspondente



Exercício Resolvido (7)

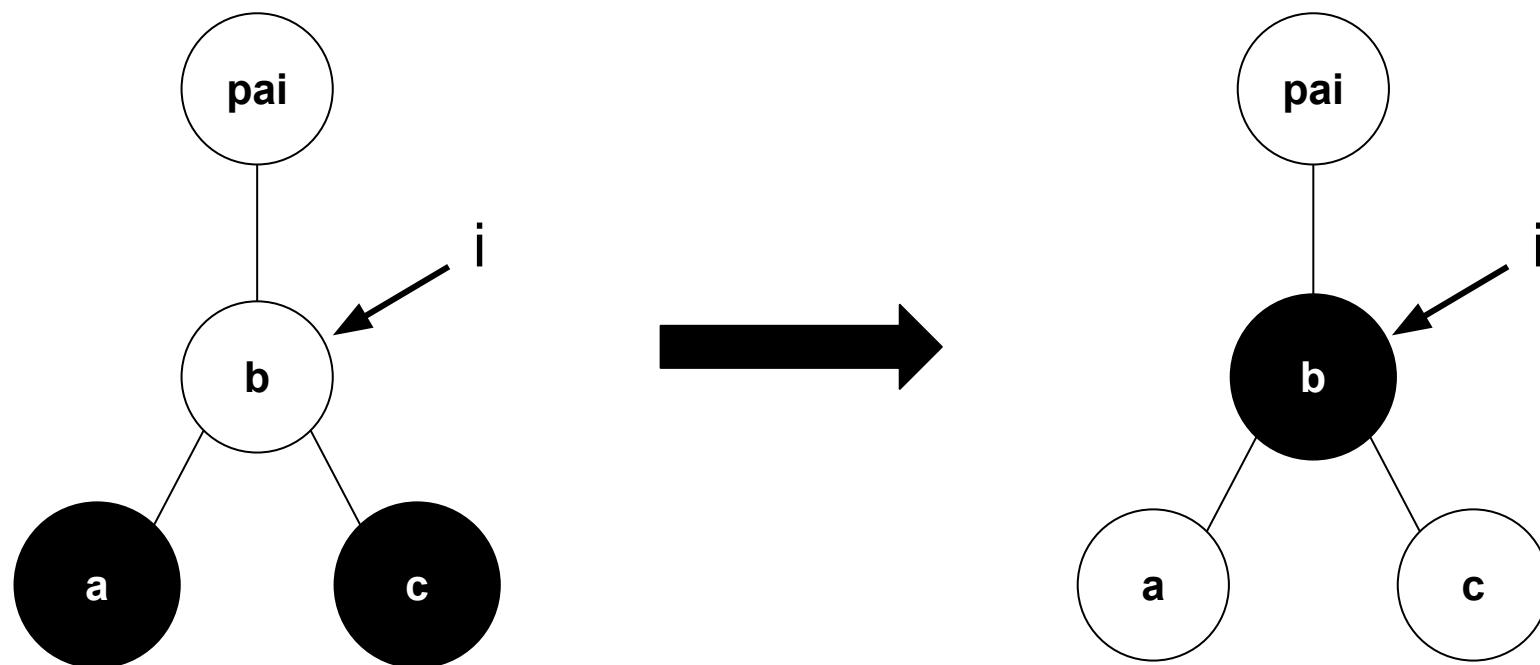
- Faça o método **boolean isNoTipoQuatro(NoAN i)** que recebe um ponteiro para um nó da alvinegra e retorna true se esse elemento e seus dois filhos são gêmeos na 2.3.4 correspondente



```
boolean isNoTipoQuatro(NoAN i){  
    return (i.esq != null && i.dir != null && i.esq.cor == true && i.dir.cor == true);  
}
```

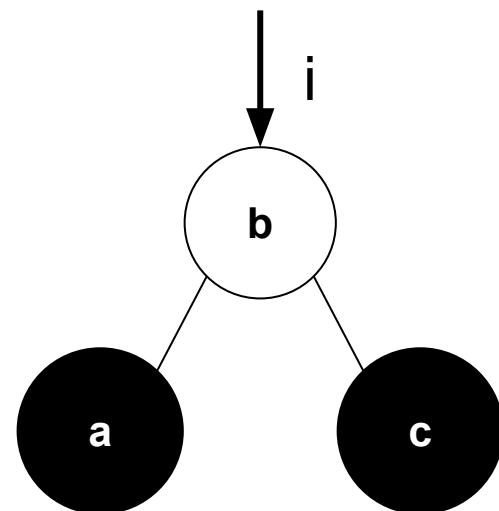
Inserção

- Pode ser feita simulando a inserção com fragmentação na descida na 2.3.4
- A fragmentação de um 4-nó corresponde a inversão de cores dos elementos gêmeos



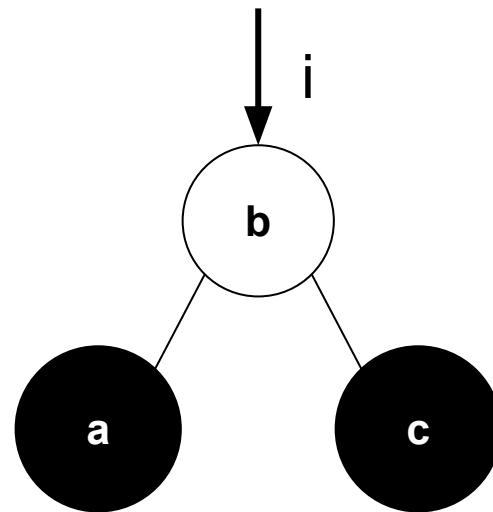
Exercício Resolvido (8)

- Faça o método ***void fragmentarNoTipoQuatro(NoAN i)*** que recebe um ponteiro para um nó da alvinegra e fragmenta esse nó (e seus filhos)



Exercício Resolvido (8)

- Faça o método **void fragmentarNoTipoQuatro(NoAN i)** que recebe um ponteiro para um nó da alvinegra e fragmenta esse nó (e seus filhos)

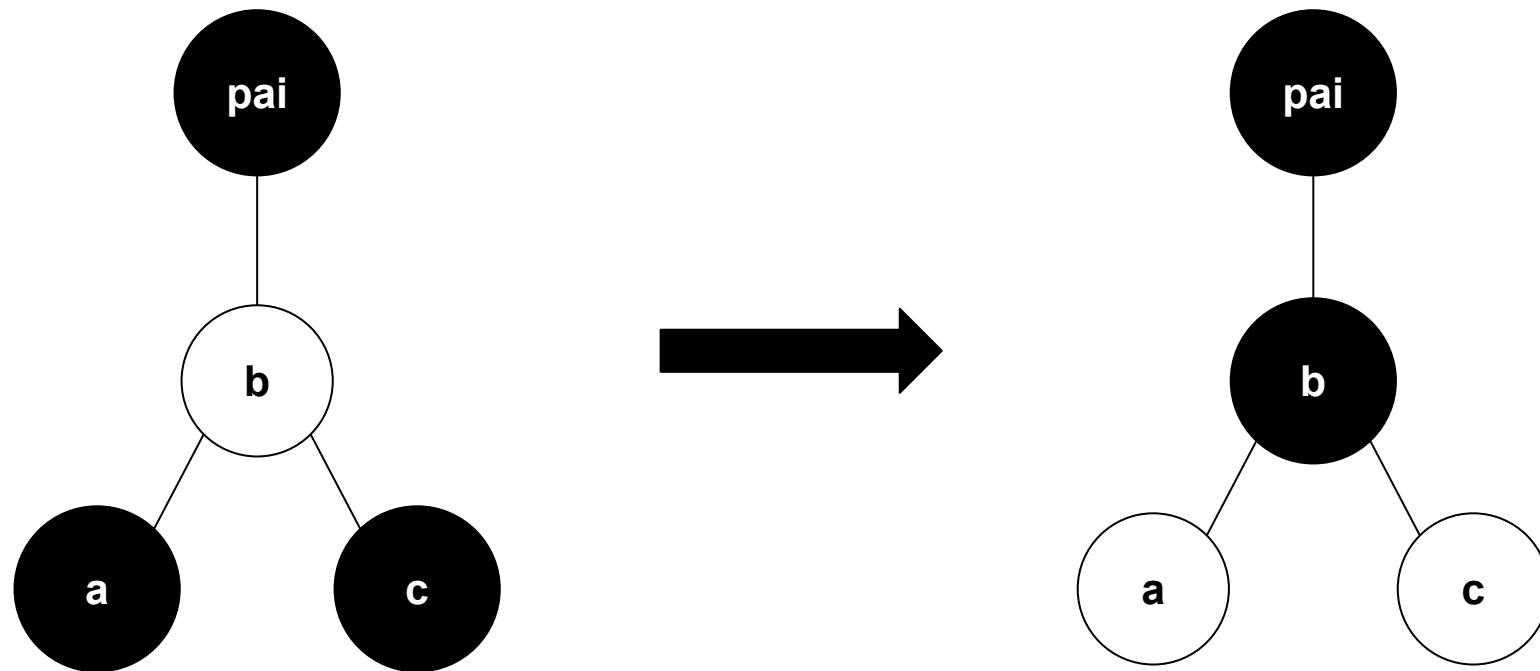


```
//supondo que seja um nó do tipo quatro
void fragmentarNoTipoQuatro(NoAN i){
    i.cor = !i.cor;
    i.esq.cor = !i.esq.cor;
    i.dir.cor = !i.dir.cor;
}
```

```
//supondo que seja um nó do tipo quatro
void fragmentarNoTipoQuatro(NoAN i){
    i.cor = true;
    i.esq.cor = false;
    i.dir.cor = false;
}
```

Efeito Colateral da Inversão de Cores

- Acontece quando o pai do nó(b) é preto



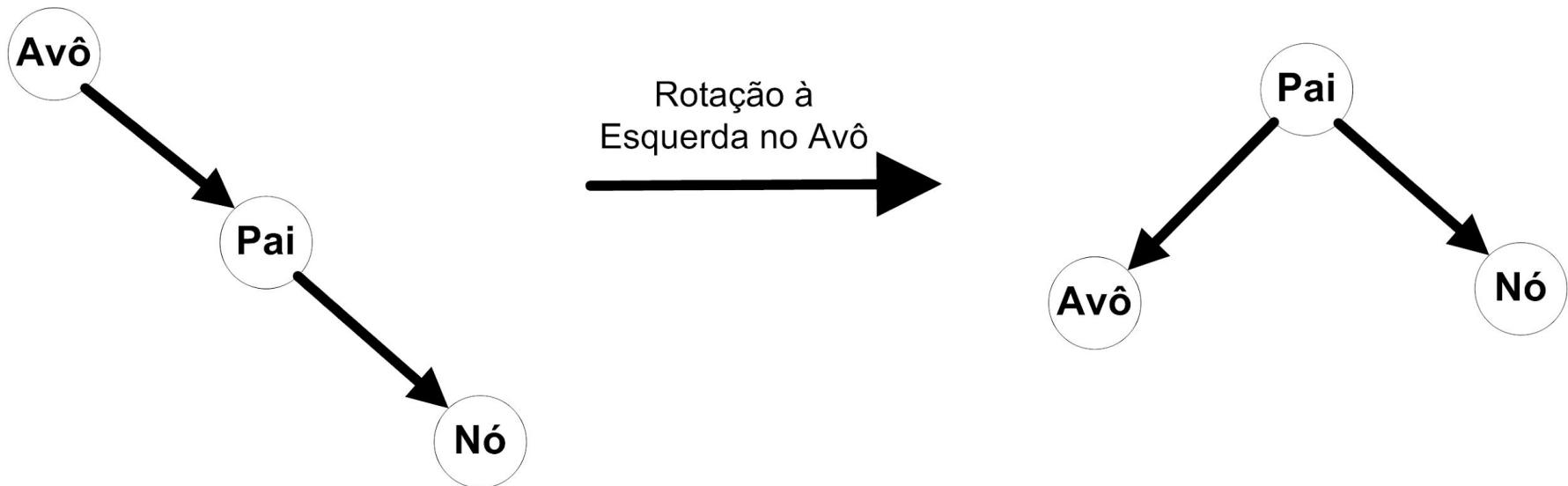
E agora José?

Balanceamento

- A cor preta indica uma tendência de inserção e, consequentemente, dois nós pretos consecutivos indica necessidade de balanceamento
- Após a inversão de cores ou a inserção em uma folha, se o pai do nó também for preto, rotacionamos seu avô considerando o **alinhamento entre avô, pai e nó**

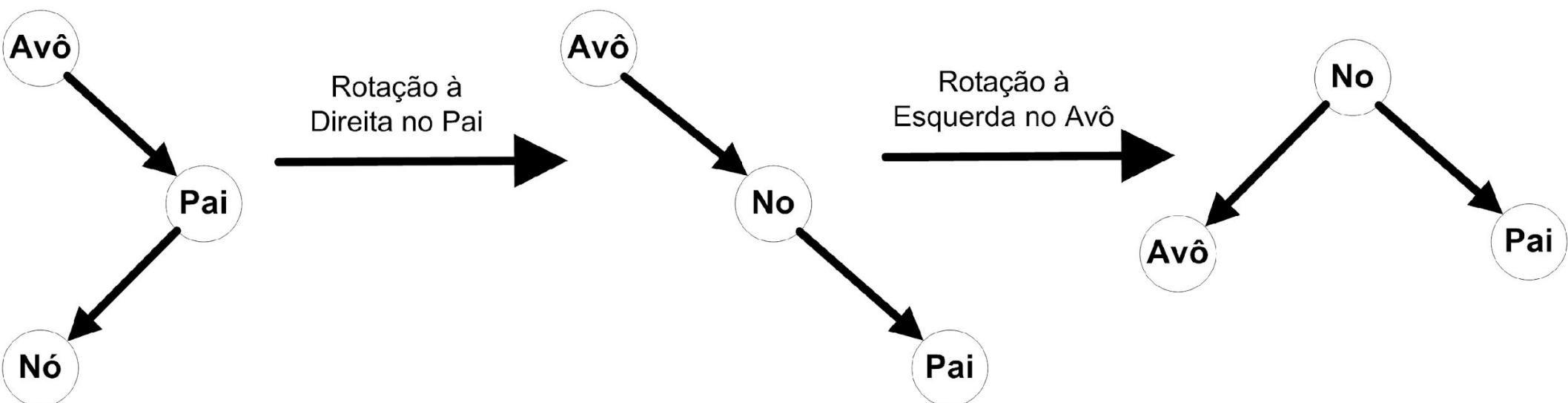
Rotação Simples à Esquerda

- Acontece quando (avô < pai) **and** (pai < nó)



Rotação Dupla Direita/Esquerda

- Acontece quando (avô < pai) **and** (pai > nó)



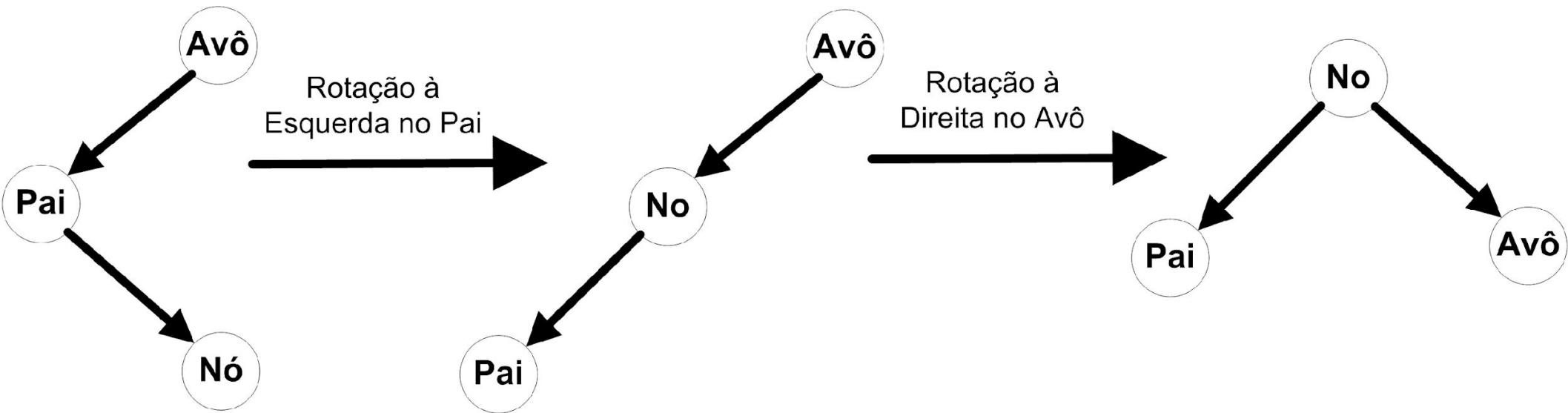
Rotação Simples à Direita

- Acontece quando (avô > pai) **and** (pai > nó)



Rotação Dupla Esquerda/Direita

- Acontece quando (avô > pai) **and** (pai < nó)



Ideia Básica da Inserção

- Consiste em procurar a folha em que o novo elemento será inserido
- Se um nó tiver dois filhos pretos (4-nó na 2.3.4), invertemos as cores desse nó e de seus filhos (exceto a raiz que continuará branca porque ela não tem pai para ser gêmeo)
- Após a inversão de cores, se o pai também for preto, rotacionamos o avô considerando o alinhamento entre avô, pai e nó
- Após a rotação, o elemento central fica branco e seus novos filhos, pretos

Ideia Básica da Inserção

- Continuar a descida até chegar em uma folha
- A inserção sempre acontece em uma folha que ficará preta porque o novo elemento é gêmeo (na 2.3.4) do pai e do irmão (se esse existir)
- Após a inserção da folha, se o pai for da cor preta, rotacionamos o avô

Exemplo de Inserção

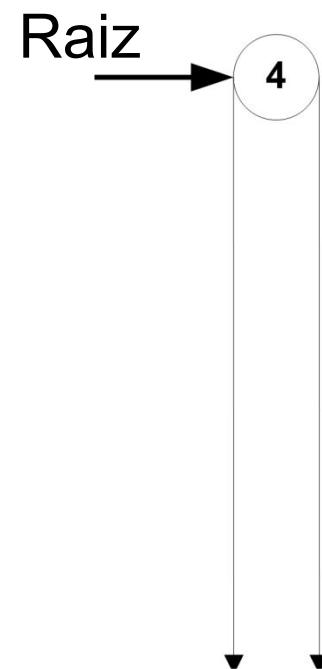
- Crie uma árvore alvinegra através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente

Exemplo de Inserção

- Inserindo o 4

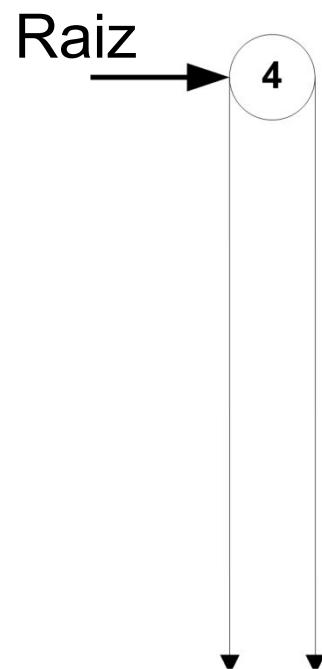
Exemplo de Inserção

- Inserido 4 que será branco pois é o da ``raiz''



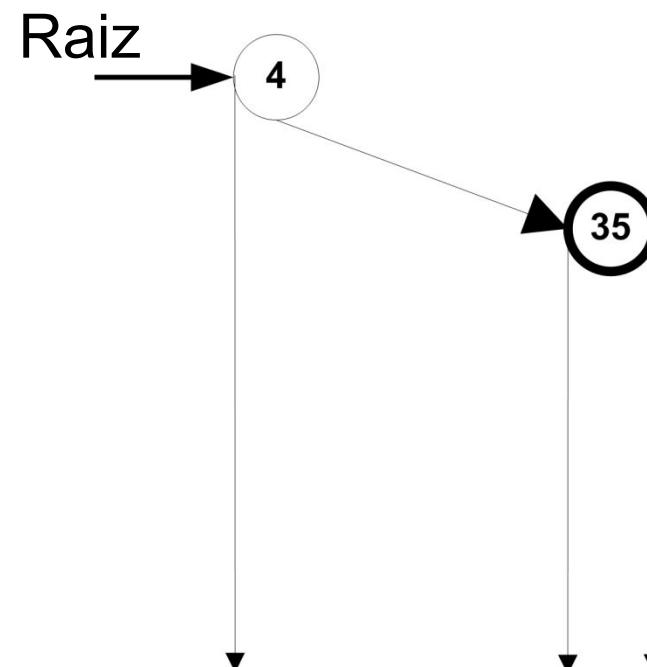
Exemplo de Inserção

- Inserindo o 35



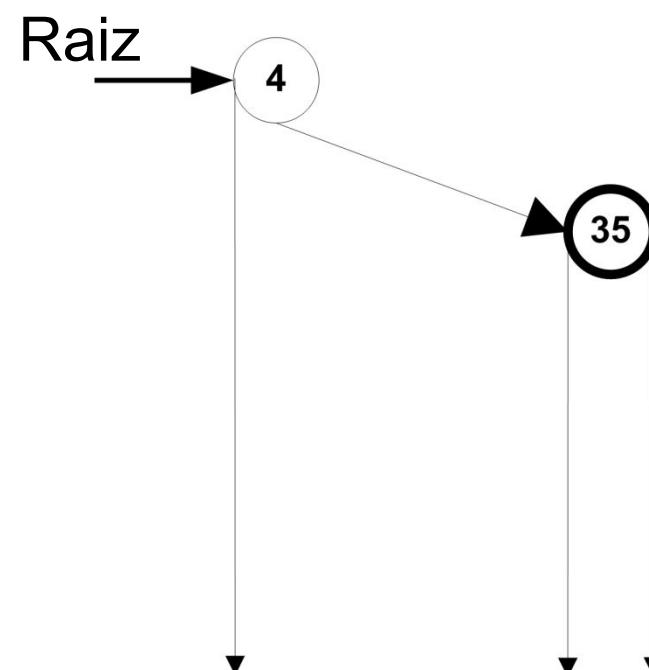
Exemplo de Inserção

- Inserido o 35 (que será preto como todas as folhas)



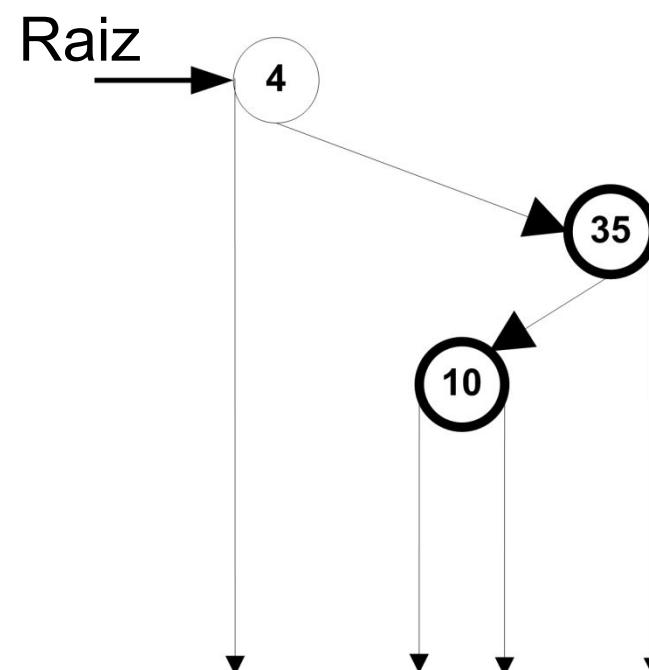
Exemplo de Inserção

- Inserindo o 10



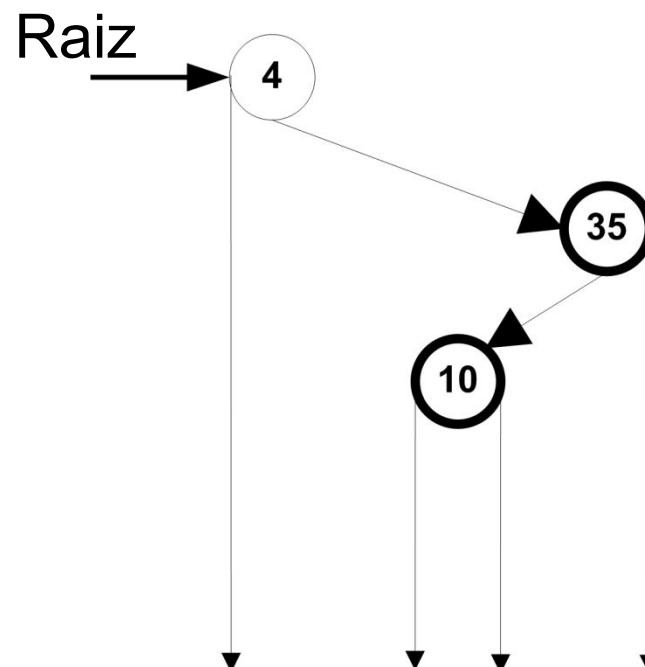
Exemplo de Inserção

- Inserido o 10



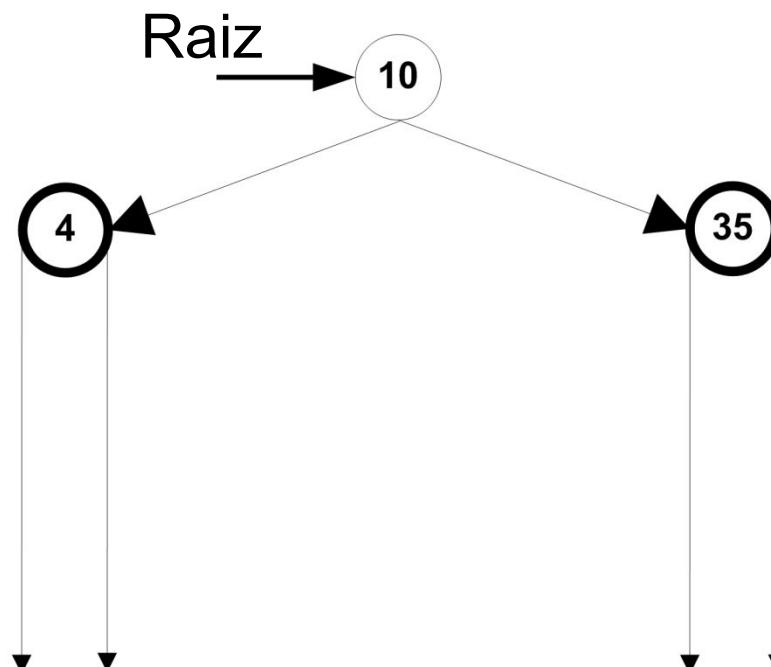
Exemplo de Inserção

- Após a inserção do 10, temos a árvore abaixo. Em seguida, como o pai do 10 tem a cor preta, rotacionamos o avô do 10 - DirEsq(4)



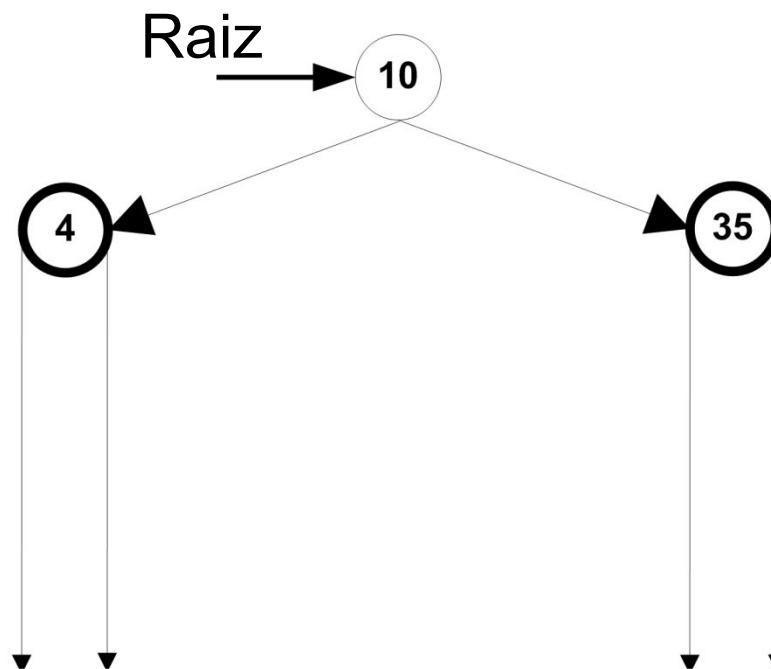
Exemplo de Inserção

- Efetuada a rotação DirEsq no 4, o elemento central fica branco e os filhos, pretos



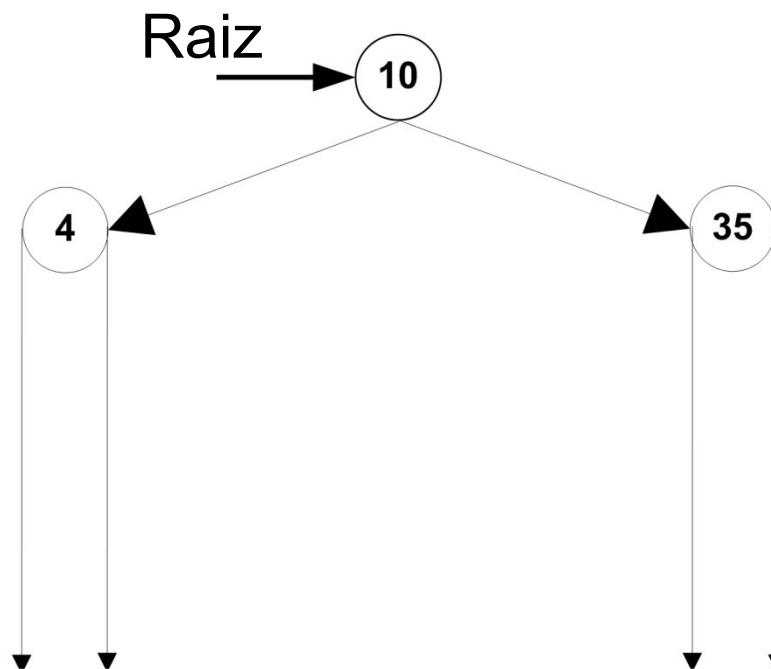
Exemplo de Inserção

- Inserindo o 13, verificamos se o 10 é do tipo 4-nó



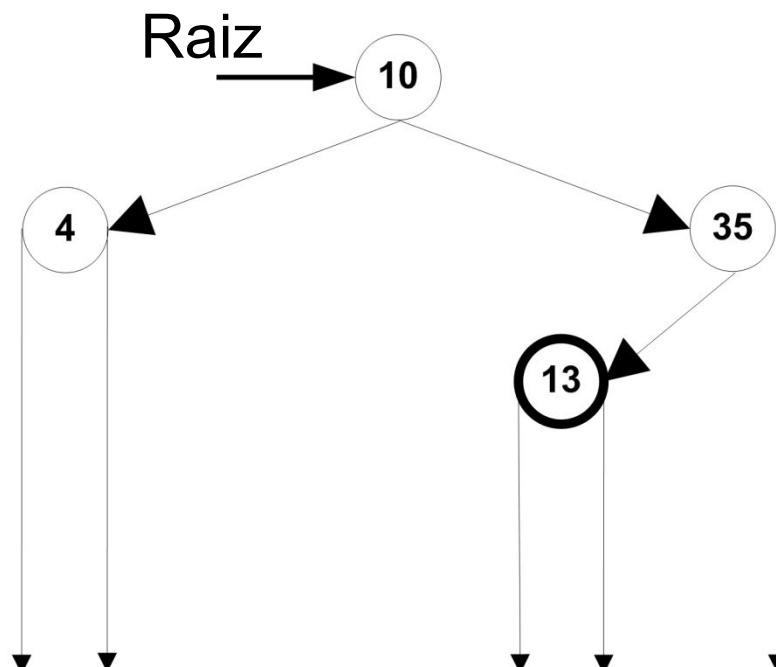
Exemplo de Inserção

- Como o 10 é do tipo 4-nó, invertemos as cores do 4, 10 e 35 (10 continua branco porque é raiz)



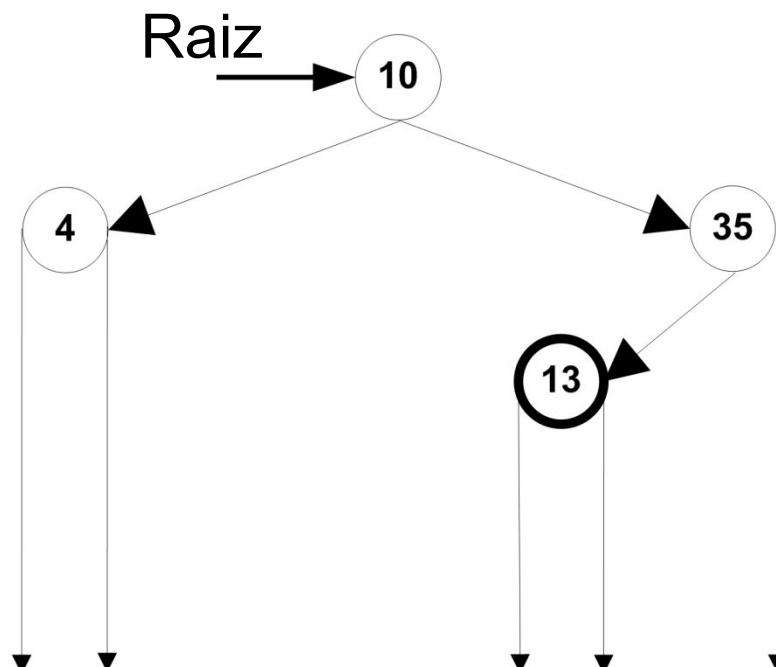
Exemplo de Inserção

- Após a inserção do 13, temos a árvore abaixo. Em seguida, como o pai do 13 tem a cor branca, continuamos



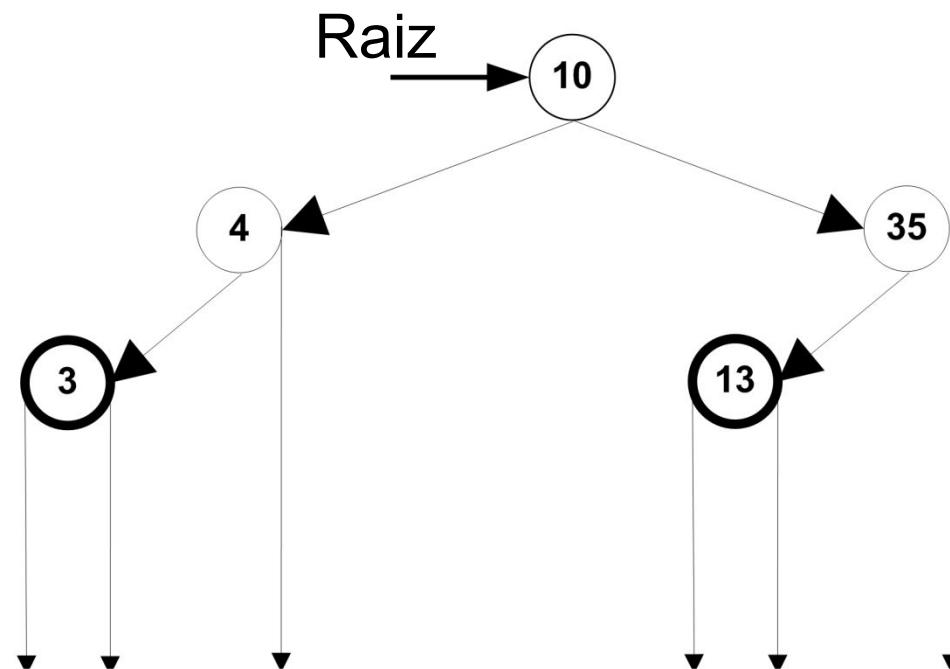
Exemplo de Inserção

- Para inserir o 3, verificamos se o 10 e o 4 são do tipo 4-nó



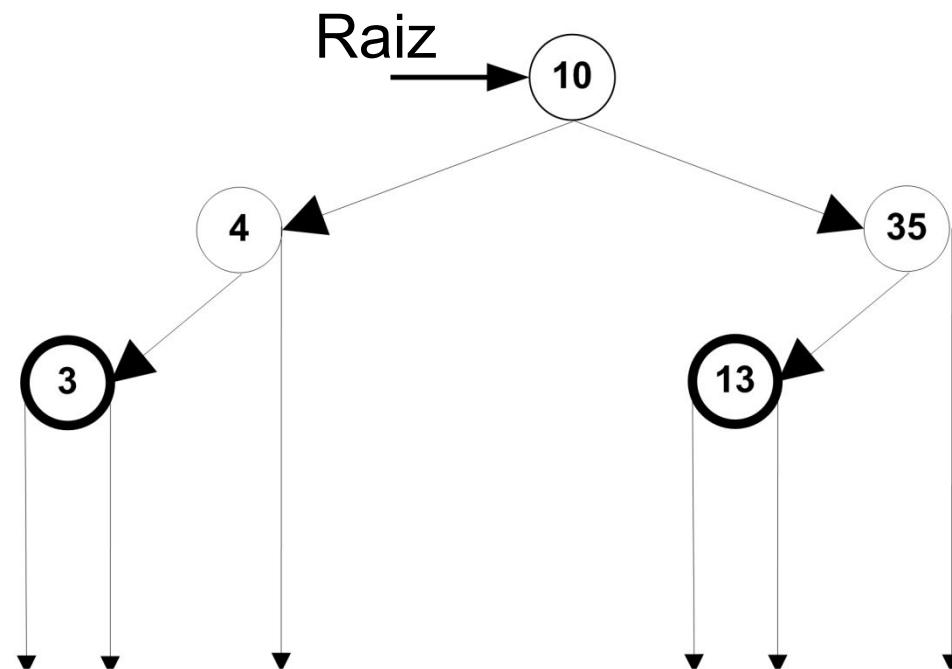
Exemplo de Inserção

- Após a inserção do 3, temos a árvore abaixo. Em seguida, como o pai do 3 tem a cor branca, continuamos



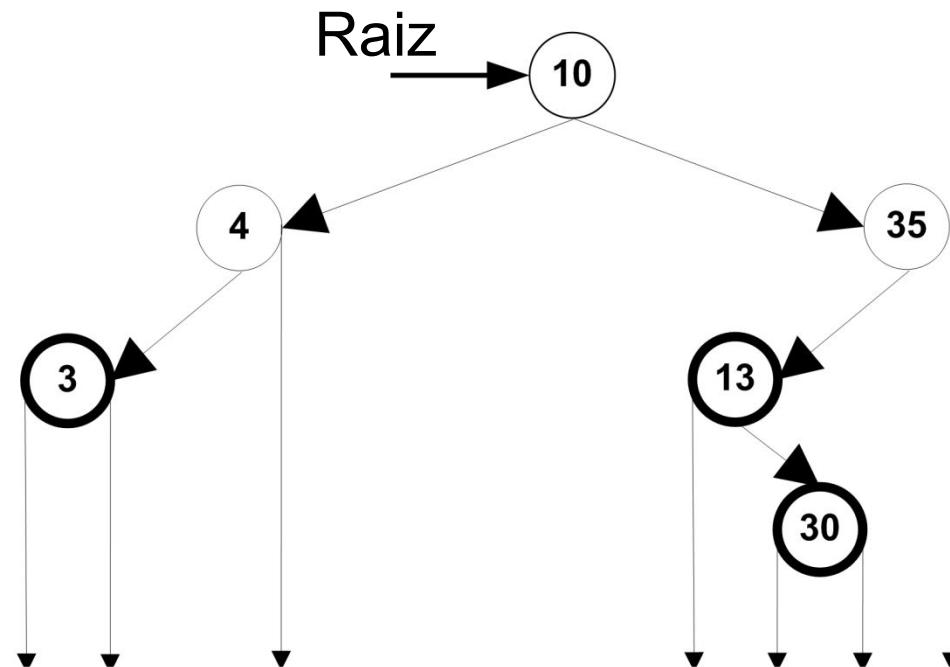
Exemplo de Inserção

- Para inserir o 30, verificamos se o 10, 35 e 13 são do tipo 4 nó



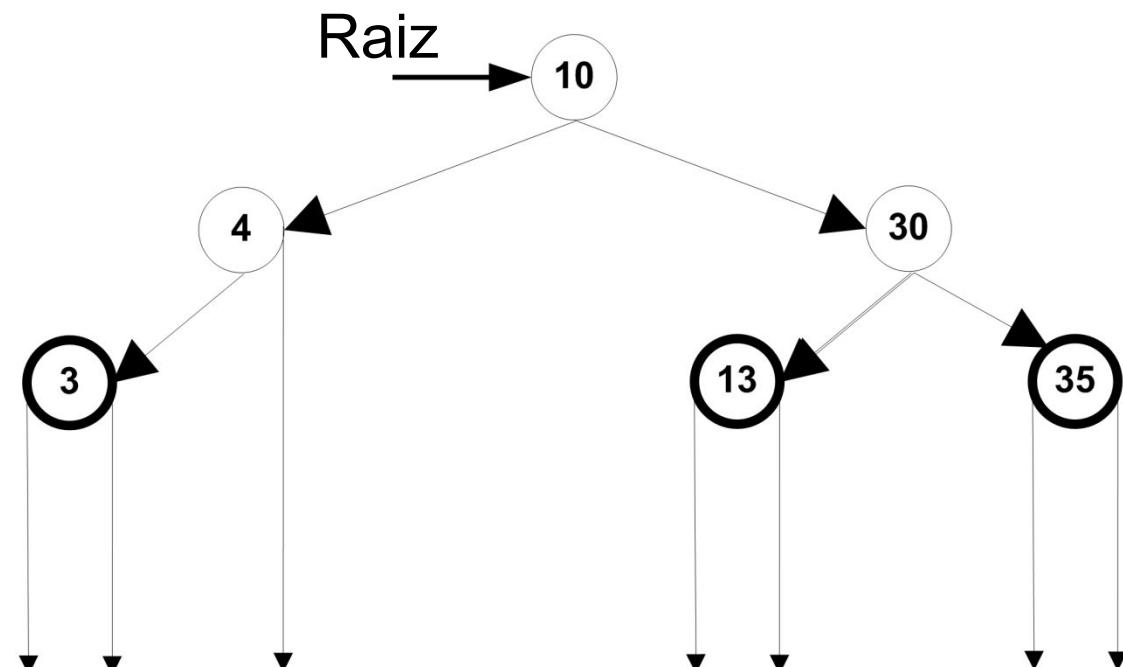
Exemplo de Inserção

- Após a inserção do 30, temos a árvore abaixo. Em seguida, como o pai do 30 tem a cor preta, rotacionamos o avô do 30 - EsqDir(35)



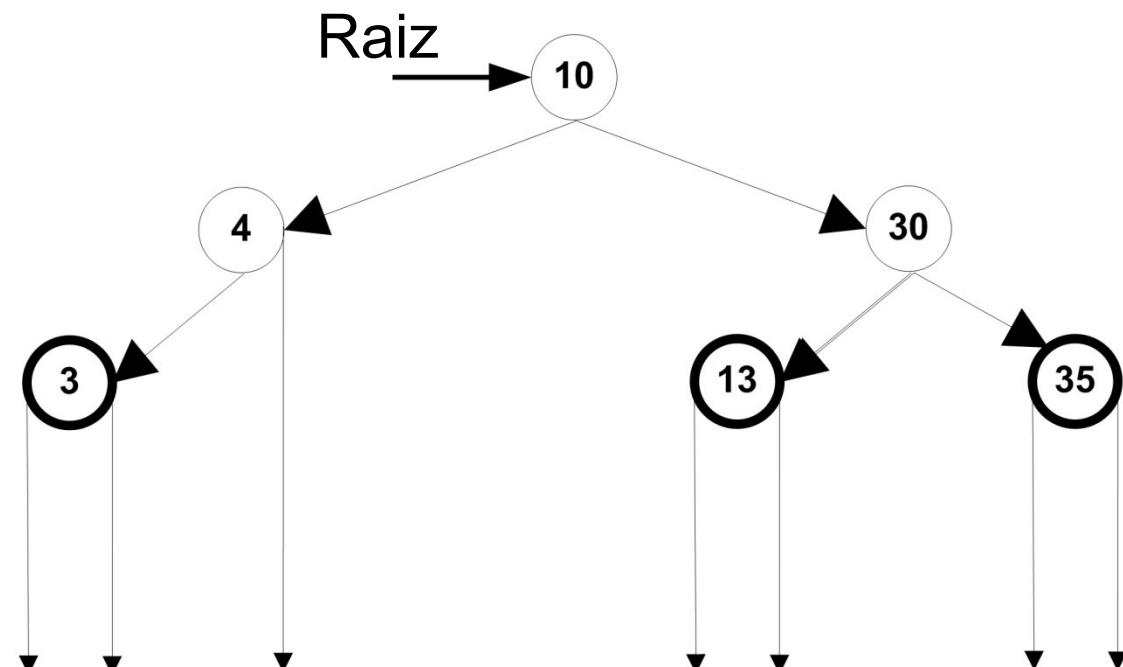
Exemplo de Inserção

- Após a rotação envolvendo (13, 30 e 35), o elemento central (30) será branco e seus filhos (13 e 35), pretos



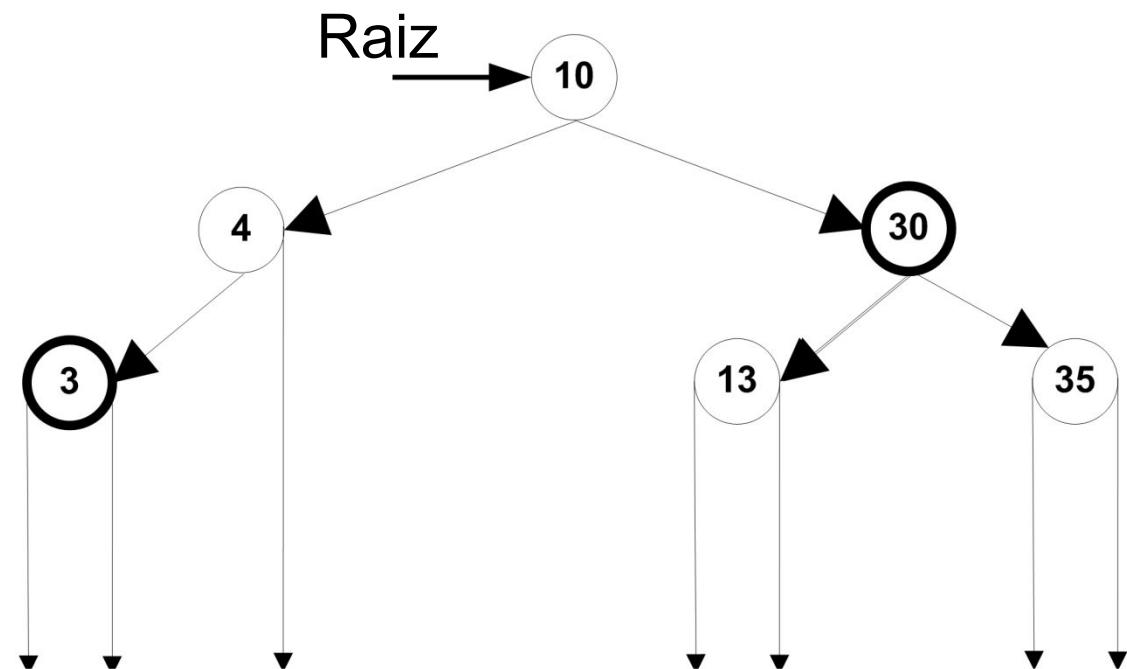
Exemplo de Inserção

- Para inserir o 15, verificamos se o 10 e o 30 são do tipo 4 nó o que acontece com o nó 30



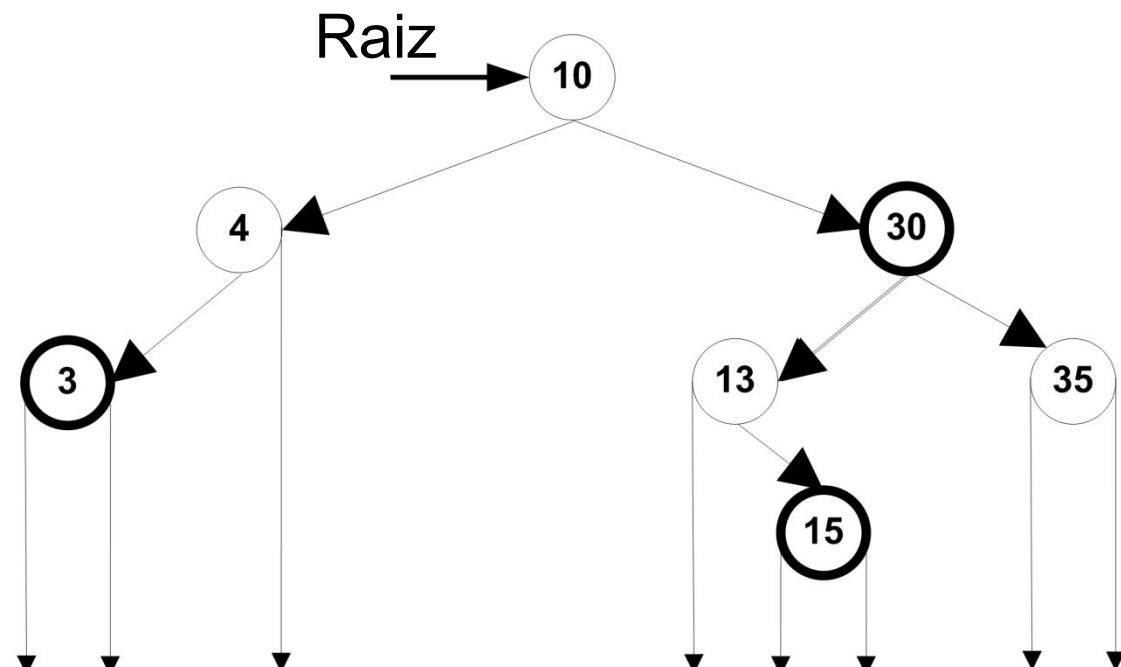
Exemplo de Inserção

- Assim, invertemos a cor do 30, 13 e 35. Em seguida, verificamos se o pai do 30 também tem a cor preta



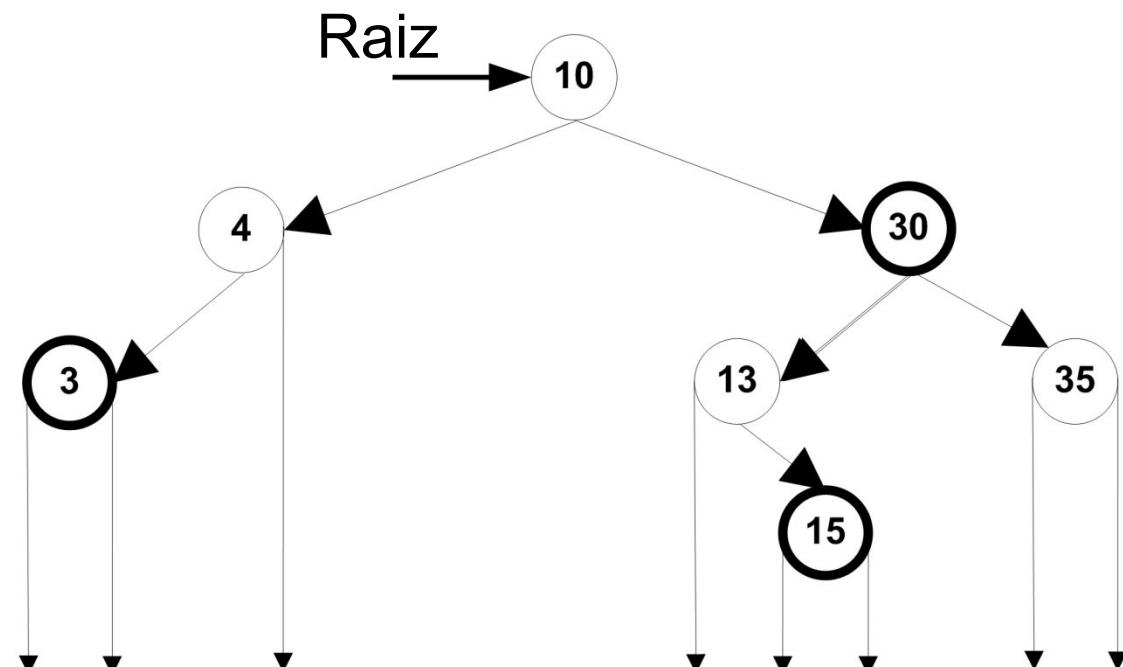
Exercício Resolvido (8)

- Após a inserção do 15, temos a árvore abaixo. Após a inserção do 15, nosso algoritmo verifica se ????????????????????????



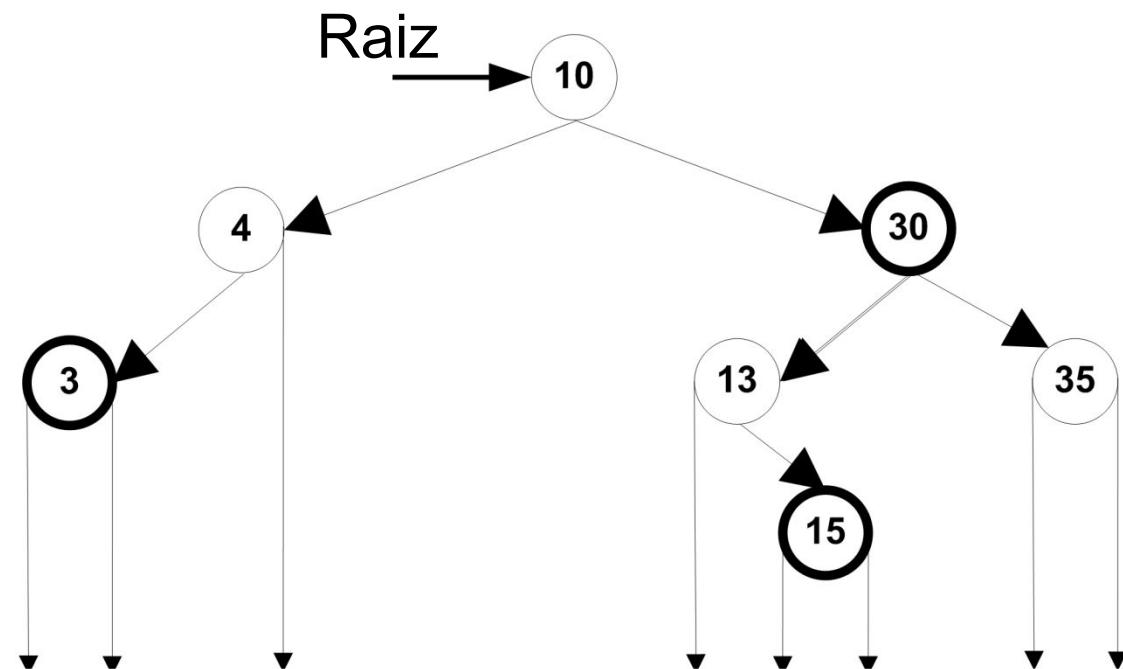
Exercício Resolvido (8)

- Após a inserção do 15, temos a árvore abaixo. Após a inserção do 15, nosso algoritmo verifica se o pai do 15 tem a cor preta



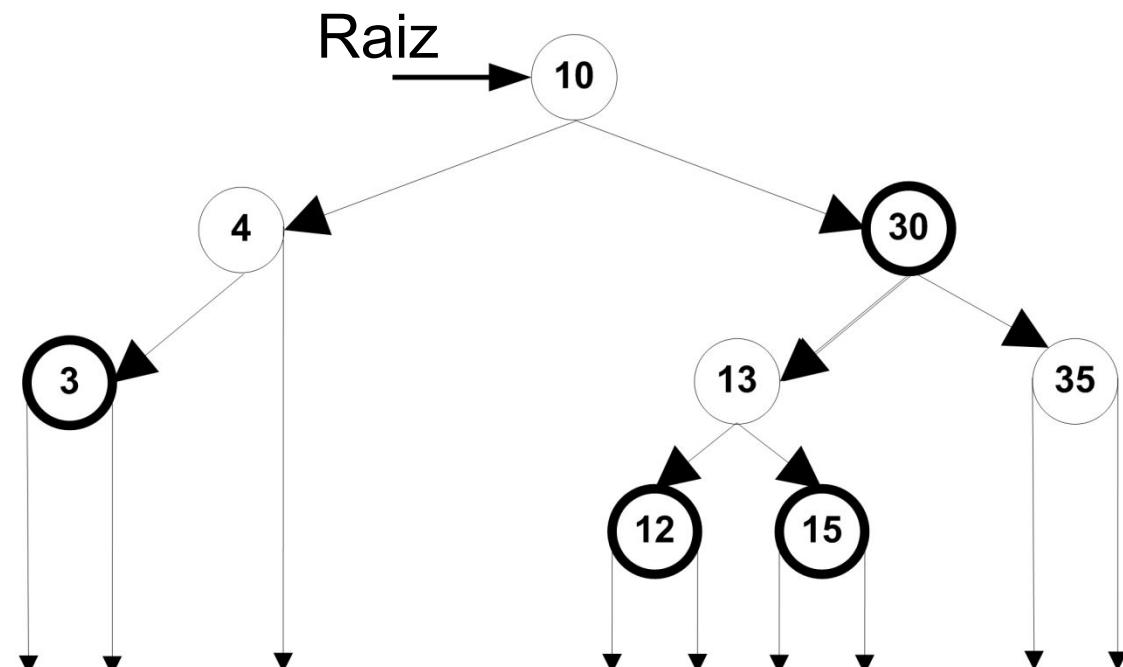
Exemplo de Inserção

- Para inserir o 12, verificamos se o 10, 30 e 13 são do tipo 4-nó



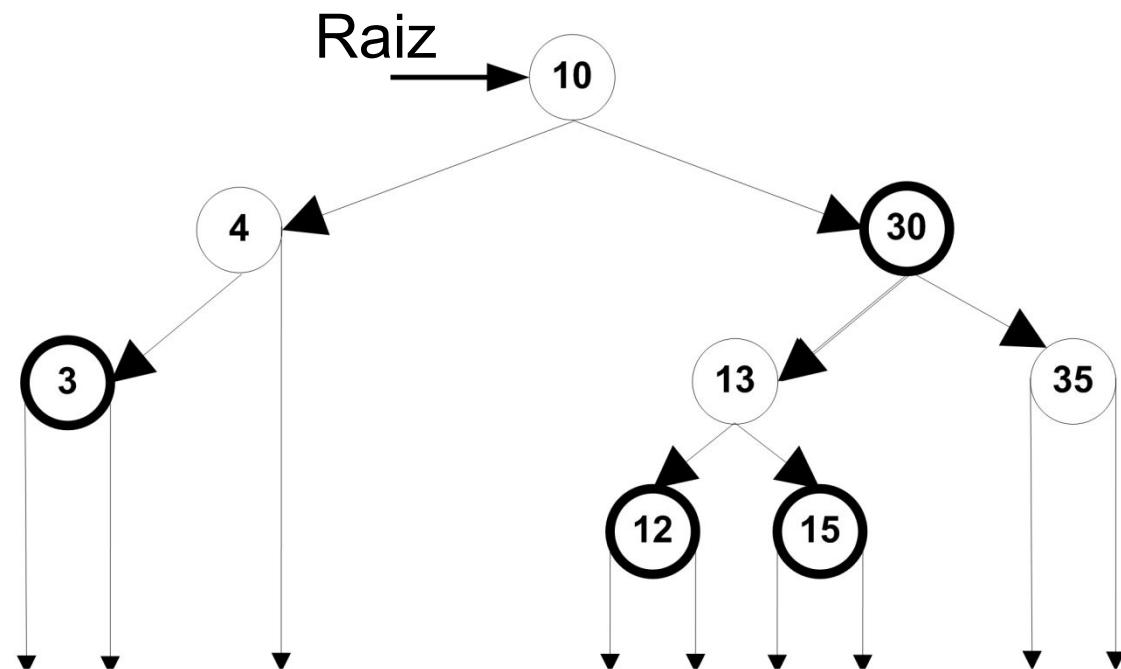
Exemplo de Inserção

- Após a inserção do 12, temos a árvore abaixo. Após a inserção do 12, nosso algoritmo verifica se o pai do 12 tem a cor preta



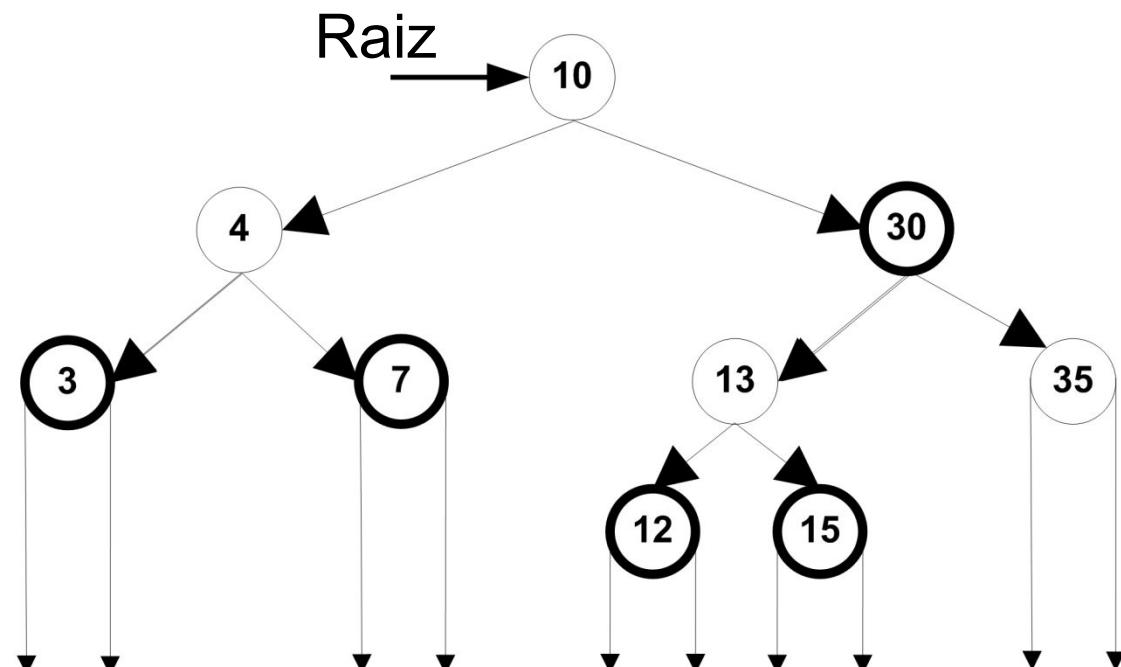
Exemplo de Inserção

- Para inserir o 7, verificamos se os nós 10 e 4 são do tipo 4-nó



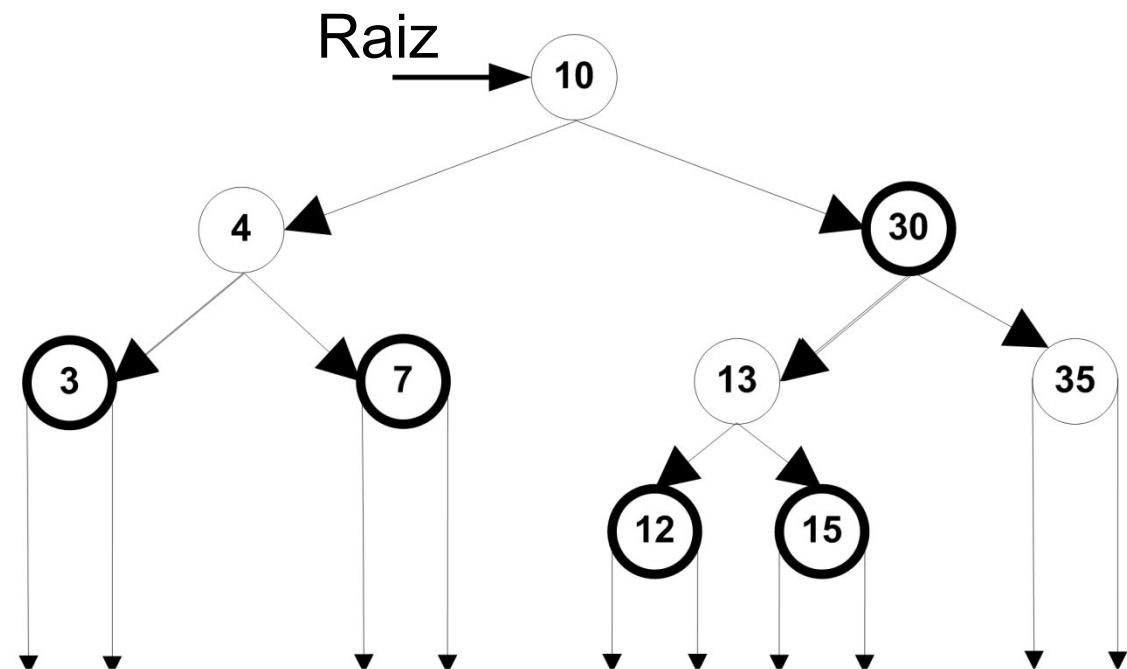
Exemplo de Inserção

- Após a inserção do 7, temos a árvore abaixo. Após a inserção do 7, nosso algoritmo verifica se o pai do 7 tem a cor preta



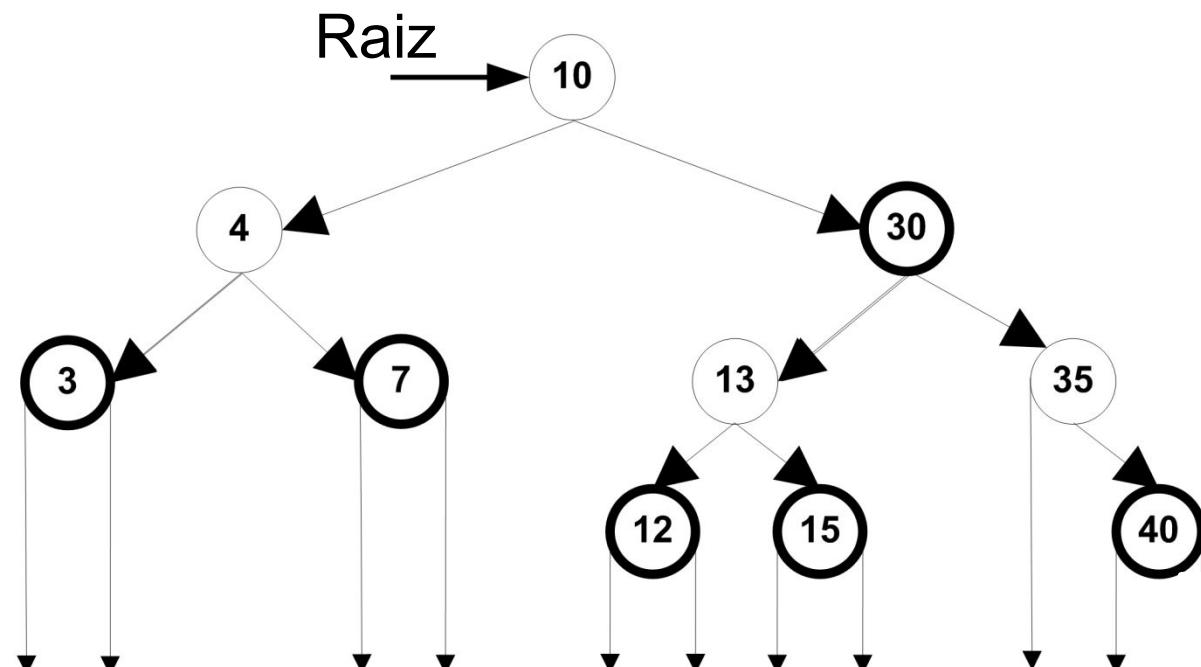
Exemplo de Inserção

- Para inserir o 40, verificamos se os nós 10, 30 e 35 são do tipo 4-nó



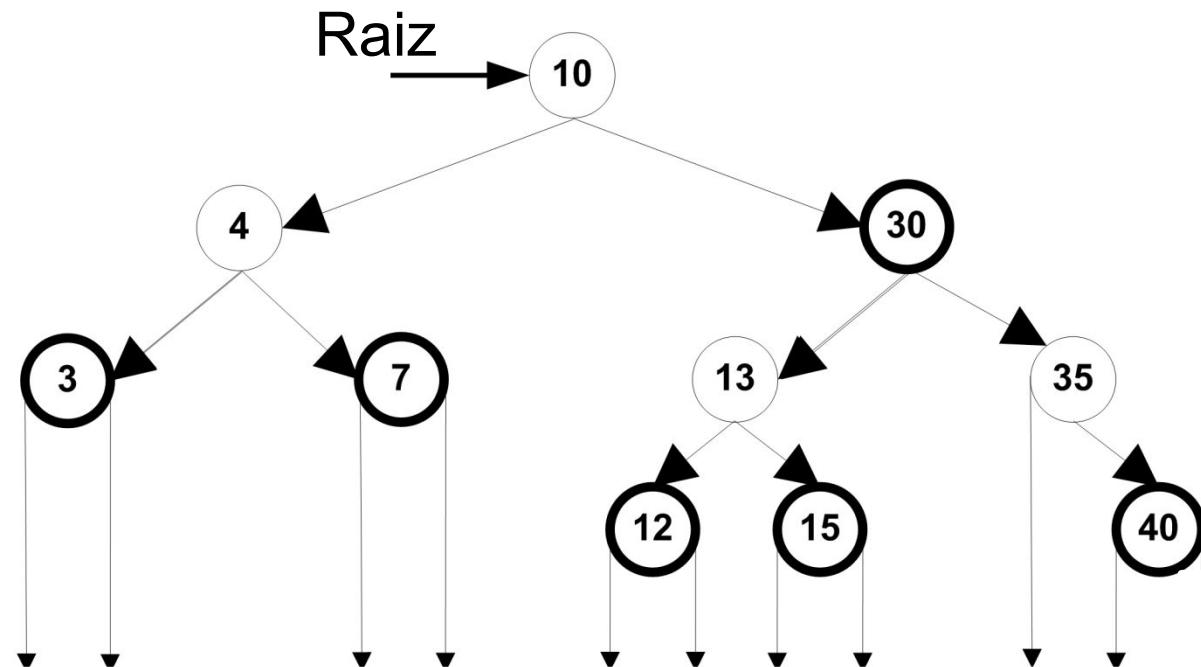
Exemplo de Inserção

- Após a inserção do 40, temos a árvore abaixo. Após a inserção do 40, nosso algoritmo verifica se o pai do 40 tem a cor preta



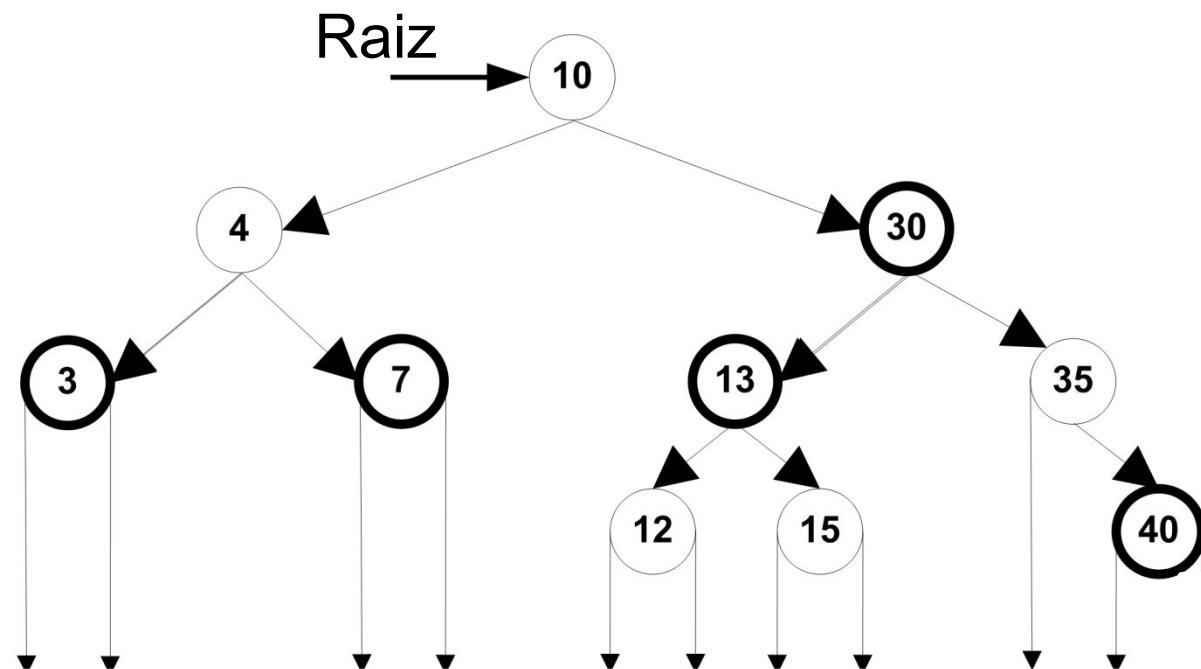
Exemplo de Inserção

- Inserindo o 20, verificamos se os nós 10, 30 e 13 são do tipo 4-nó e isso acontece com o nó 13



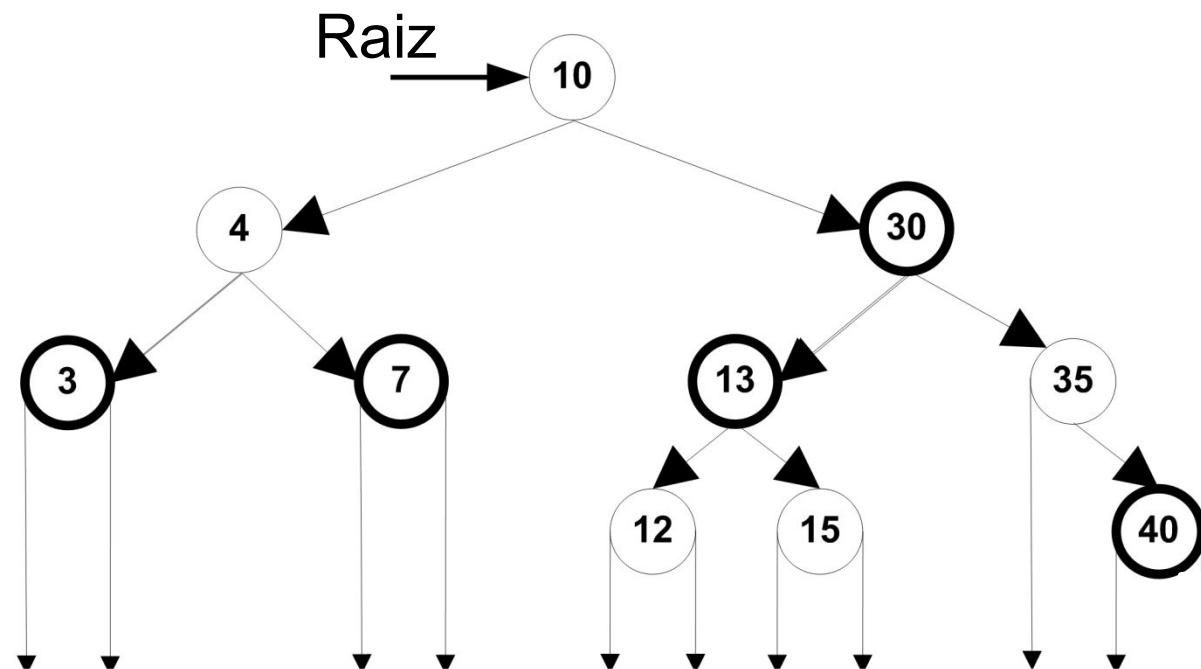
Exemplo de Inserção

- Invertemos as cores dos nós 13 e de seus filhos (12 e 15) e, consequentemente, ficamos como dois nós pretos consecutivos



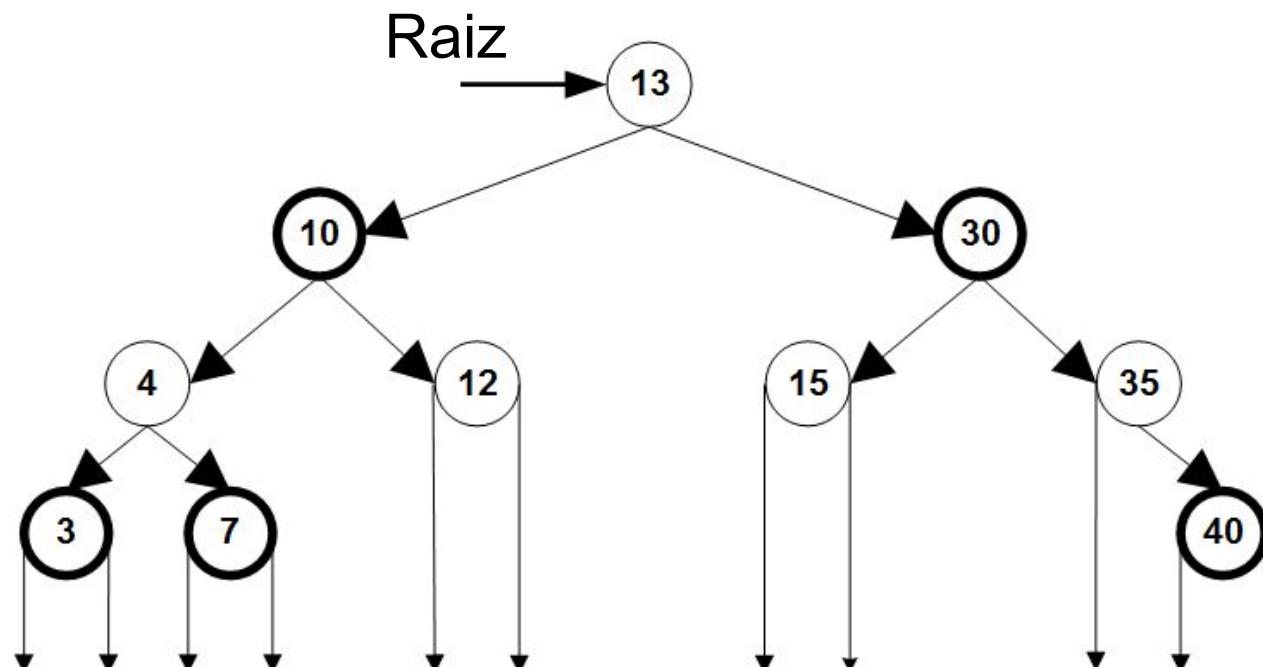
Exemplo de Inserção

- Por isso, dado o alinhamento dos nós 10, 30 e 13, rotacionamos o avô do 13 fazendo uma $\text{Dir}(30)\text{Esq}(10)$



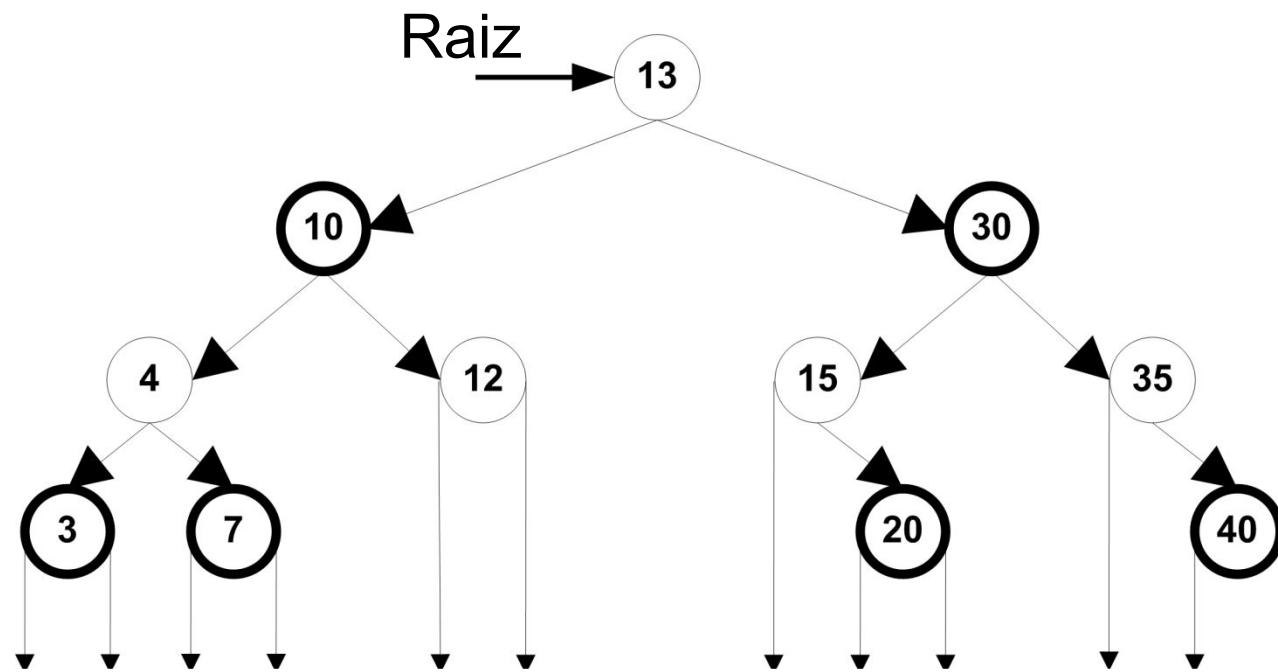
Exemplo de Inserção

- Por isso, dado o alinhamento dos nós 10, 30 e 13, rotacionamos o avô do 13 fazendo uma $\text{Dir}(30)\text{Esq}(10)$



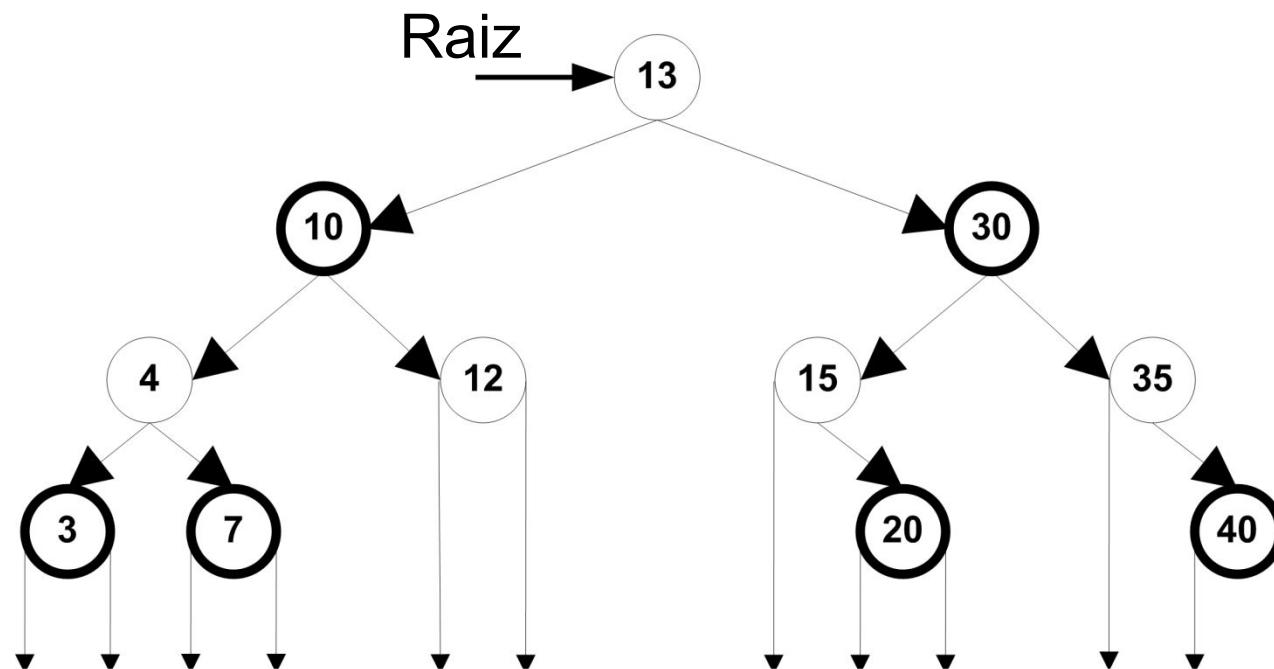
Exemplo de Inserção

- Finalmente, inserimos o 20



Exercício (1)

- Na árvore abaixo, insira o 6

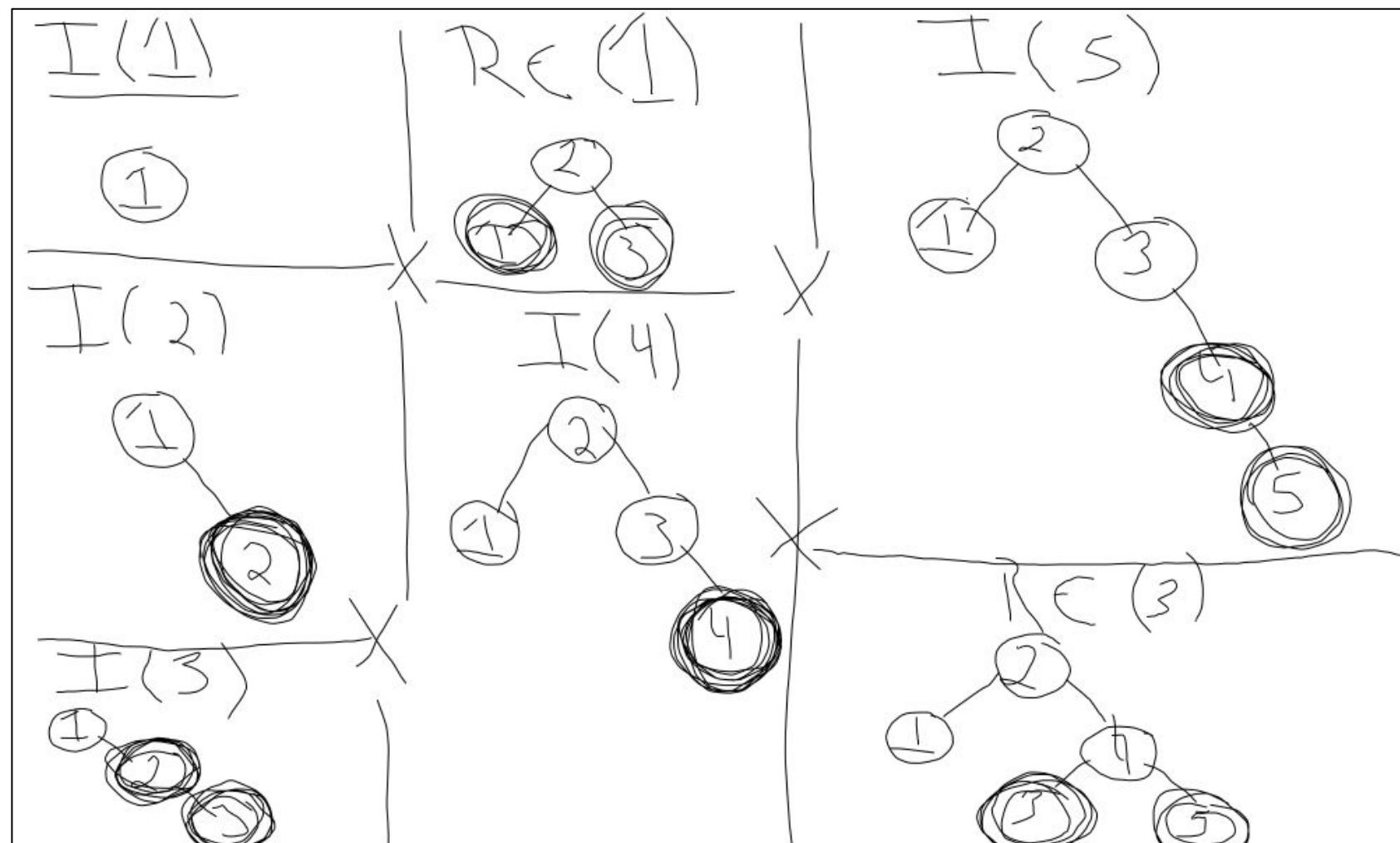


Exercício (2)

- Crie uma árvore alvinegra através de inserções sucessivas dos números 1 a 20, respectivamente
- Crie uma árvore alvinegra através de inserções sucessivas dos números 20 a 1, respectivamente
- Para cada um dos dois exercícios anteriores, verifique sua resposta usando nosso código para a árvore alvinegra

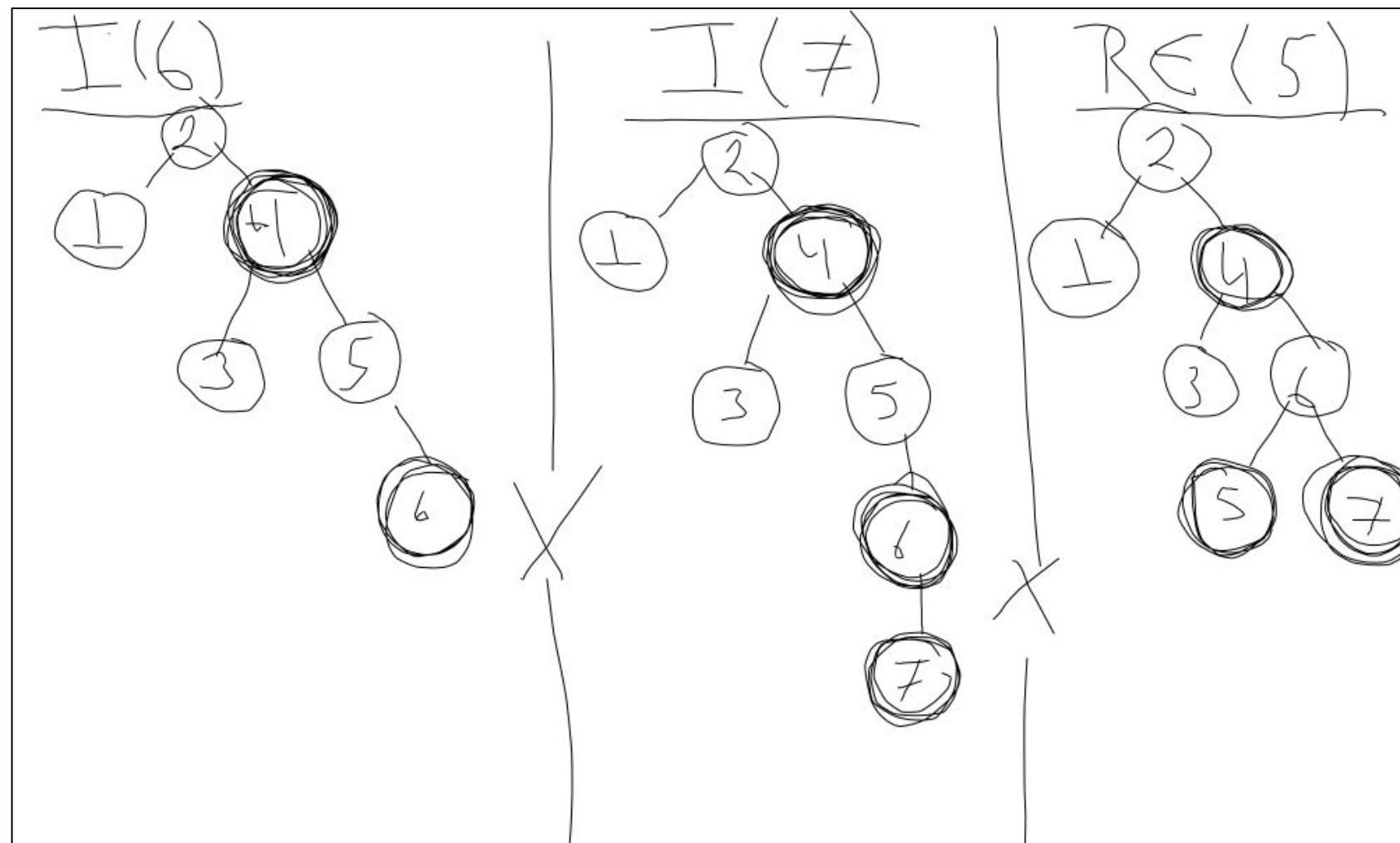
Exercício (2)

- Crie uma árvore alvinegra através de inserções sucessivas dos números 1 a 20, respectivamente



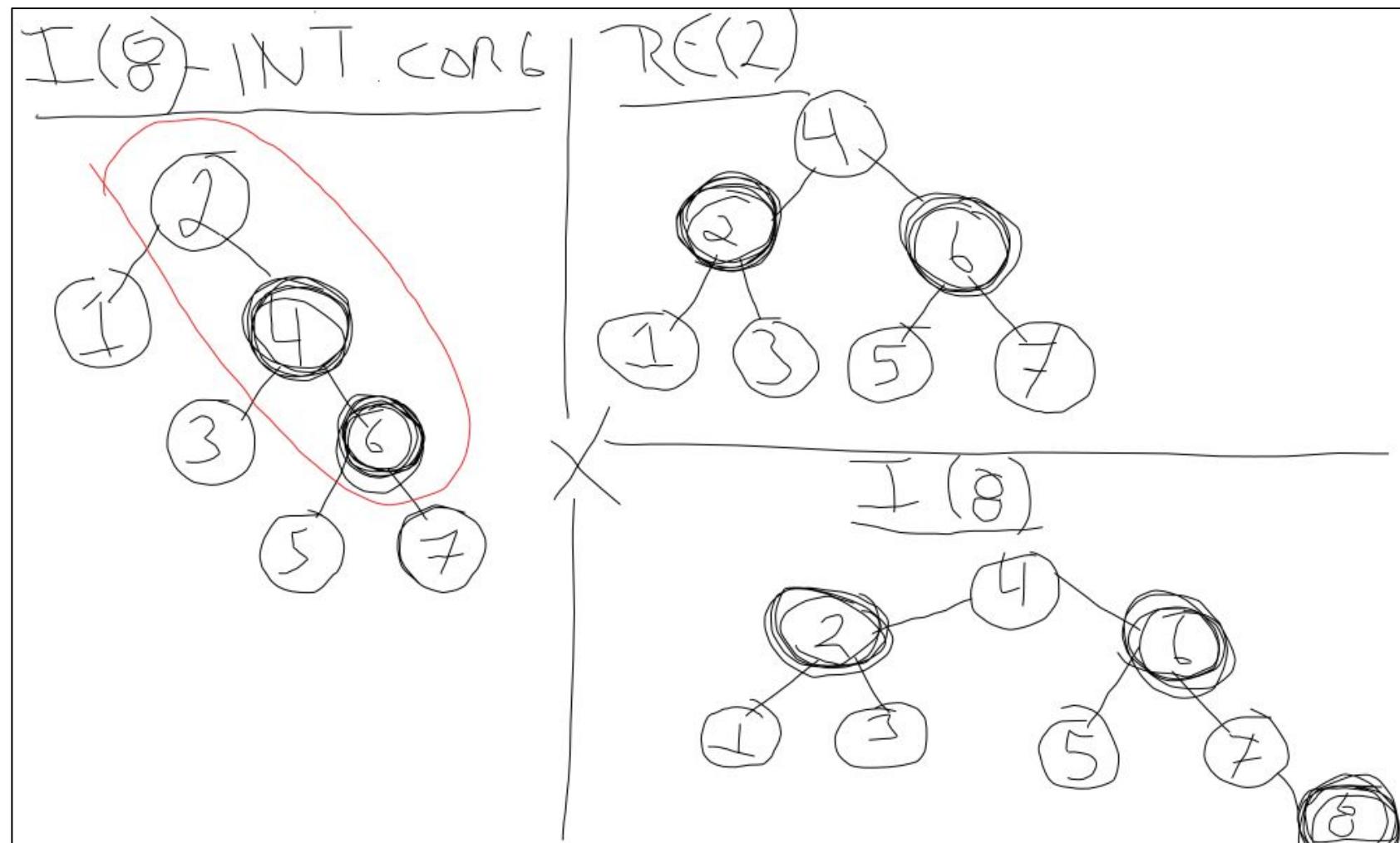
Exercício (2)

- Crie uma árvore alvinegra através de inserções sucessivas dos números 1 a 20, respectivamente



Exercício (2)

- Crie uma árvore alvinegra através de inserções sucessivas dos números 1 a 20, respectivamente



Algoritmo em C-like

- A técnica de inserção apresentada será aplicada quando tivermos mais do que três elementos, pois ela depende de teste no pai/avô do novo elemento
- Inserimos “manualmente” os três primeiros elementos

```
void inserir(int elemento) {
    if (raiz == null){
        ...
    } else if (raiz.esq == null && raiz.dir == null){
        ...
    } else if (raiz.esq == null){
        ...
    } else if (raiz.dir == null){
        ...
    } else {
        ...
    }
    raiz.cor = false;
}
```

Zero elementos

Um elemento (raiz)

Dois elementos (raiz e dir)

Dois elementos (raiz e esq)

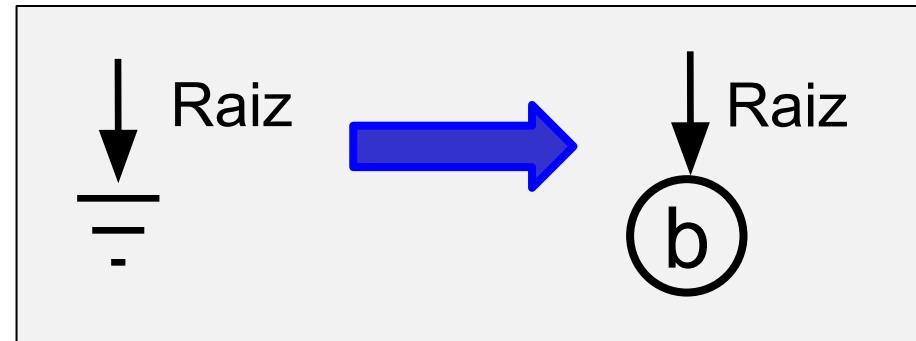
Mais de três elementos

Algoritmo em C-like

- Se zero elementos (raiz == null), inserimos o novo elemento na raiz

• **Zero elementos**

```
void inserir(int elemento) {
    if (raiz == null){
        raiz = new NoAN(elemento);
    } else if (raiz.esq == null && raiz.dir == null){
        ...
    } else if (raiz.esq == null){
        ...
    } else if (raiz.dir == null){
        ...
    } else {
        ...
    }
    raiz.cor = false;
}
```



Algoritmo em C-like

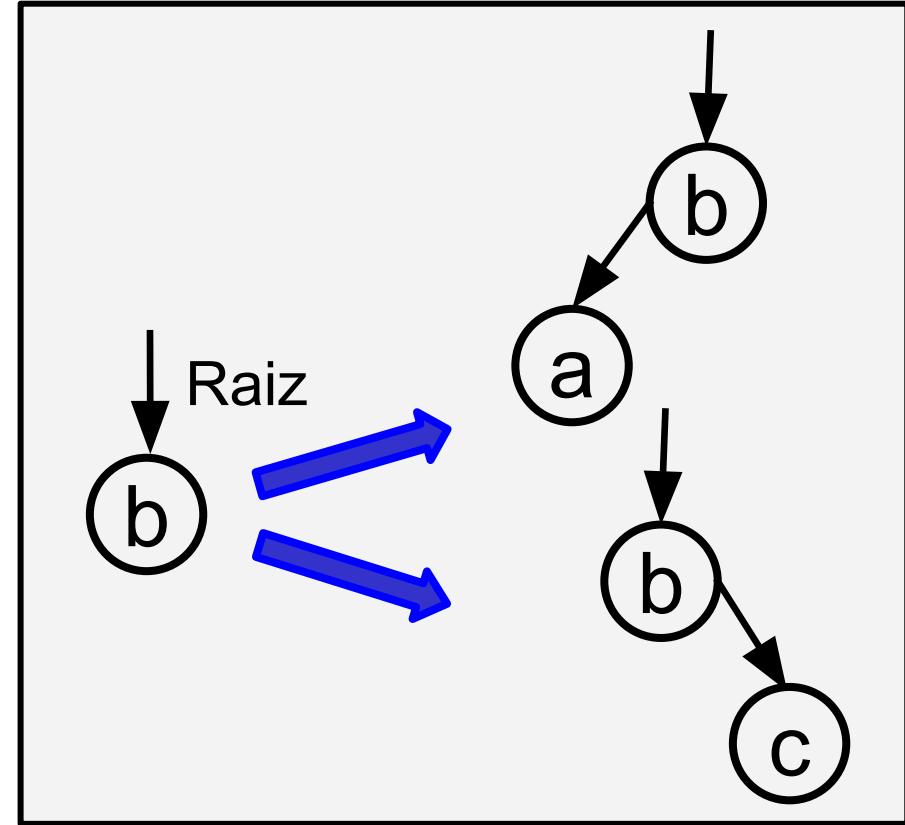
- Se tivermos um elemento (`raiz.esq == null and raiz.dir == null`), inserimos o novo elemento à esquerda / direita da raiz

```

void inserir(int elemento) {
    if (raiz == null){
        ...
    } else if (raiz.esq == null && raiz.dir == null){
        if (elemento < raiz.elemento){
            raiz.esq = new NoAN(elemento);
        } else {
            raiz.dir = new NoAN(elemento);
        }
    } else if (raiz.esq == null){
        ...
    } else if (raiz.dir == null){
        ...
    } else {
        ...
    }
    raiz.cor = false;
}

```

Um elemento

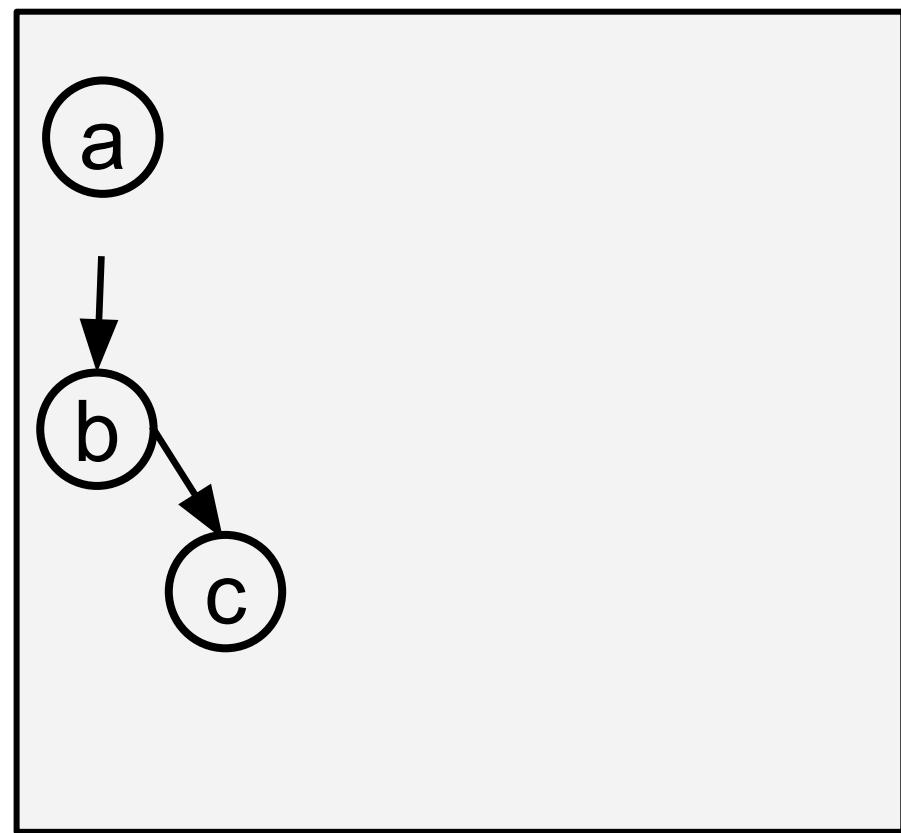


Algoritmo em C-like

- Se tivermos dois elementos (raiz e dir), temos três possibilidades de inserção

```
void inserir(int elemento) {  
    ...  
    } else if (raiz.esq == null){  
        if(elemento < raiz.elemento){  
            raiz.esq = new NoAN(elemento);  
        } else if (elemento < raiz.dir.elemento){  
            raiz.esq = new NoAN(raiz.elemento);  
            raiz.elemento = elemento;  
        } else {  
            raiz.esq = new NoAN(raiz.elemento);  
            raiz.elemento = raiz.dir.elemento;  
            raiz.dir.elemento = elemento;  
        }  
        raiz.esq.cor = raiz.dir.cor = false;  
    }  
    ...  
    raiz.cor = false;  
}
```

Dois elementos (raiz e dir)

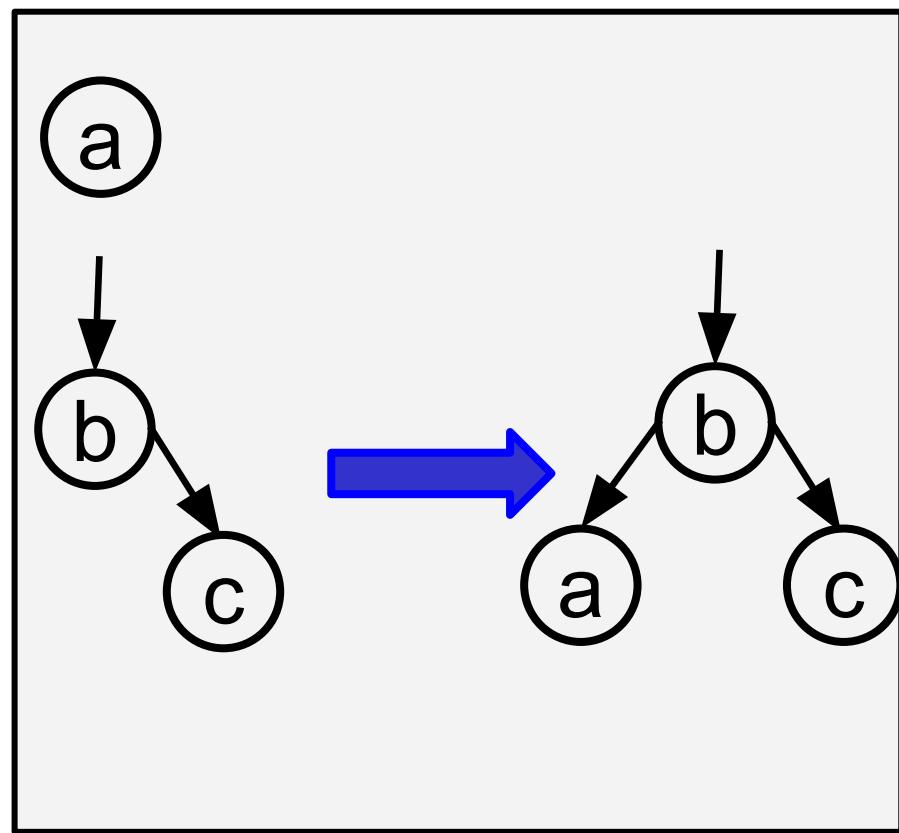


Algoritmo em C-like

- Se tivermos dois elementos (raiz e dir), temos três possibilidades de inserção

```
void inserir(int elemento) {  
    ...  
    } else if (raiz.esq == null){  
        if(elemento < raiz.elemento){  
            raiz.esq = new NoAN(elemento);  
        } else if (elemento < raiz.dir.elemento){  
            raiz.esq = new NoAN(raiz.elemento);  
            raiz.elemento = elemento;  
        } else {  
            raiz.esq = new NoAN(raiz.elemento);  
            raiz.elemento = raiz.dir.elemento;  
            raiz.dir.elemento = elemento;  
        }  
        raiz.esq.cor = raiz.dir.cor = false;  
    }  
    ...  
    raiz.cor = false;  
}
```

Dois elementos (raiz e dir)



Algoritmo em C-like

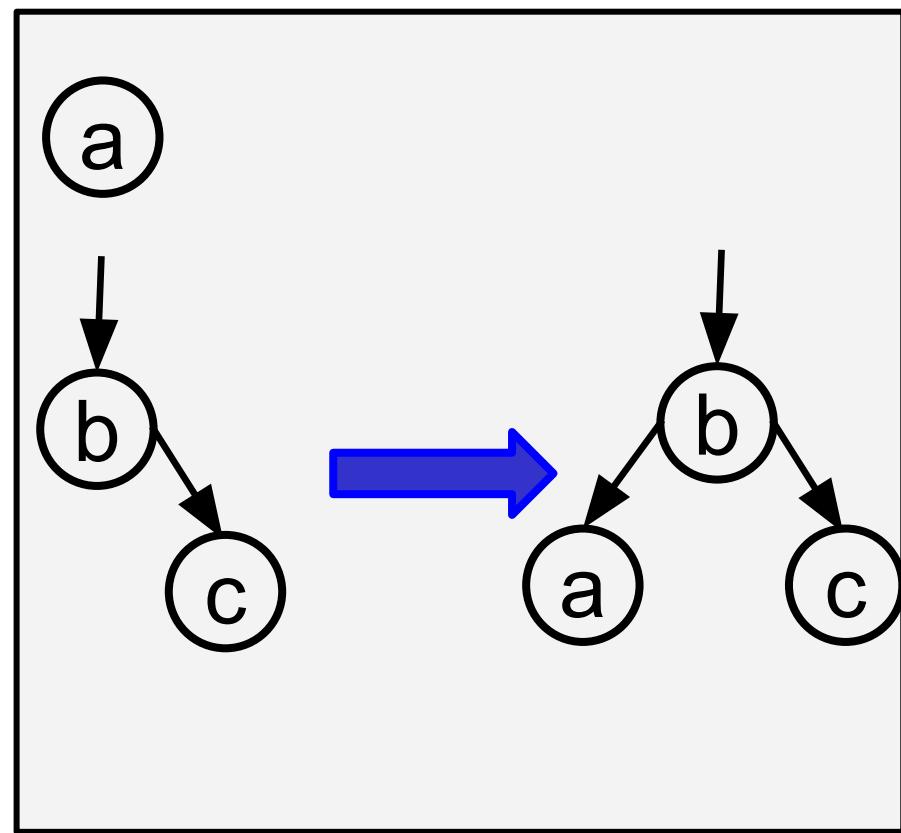
- Se tivermos dois elementos (raiz e dir), temos três possibilidades de inserção

```

void inserir(int elemento) {
    ...
} else if (raiz.esq == null){
    if(elemento < raiz.elemento){
        raiz.esq = new NoAN(elemento);
    } else if (elemento < raiz.dir.elemento){
        raiz.esq = new NoAN(raiz.elemento);
        raiz.elemento = elemento;
    } else {
        raiz.esq = new NoAN(raiz.elemento);
        raiz.elemento = raiz.dir.elemento;
        raiz.dir.elemento = elemento;
    }
    raiz.esq.cor = raiz.dir.cor = false;
}
...
raiz.cor = false;
}

```

Dois elementos (raiz e dir)

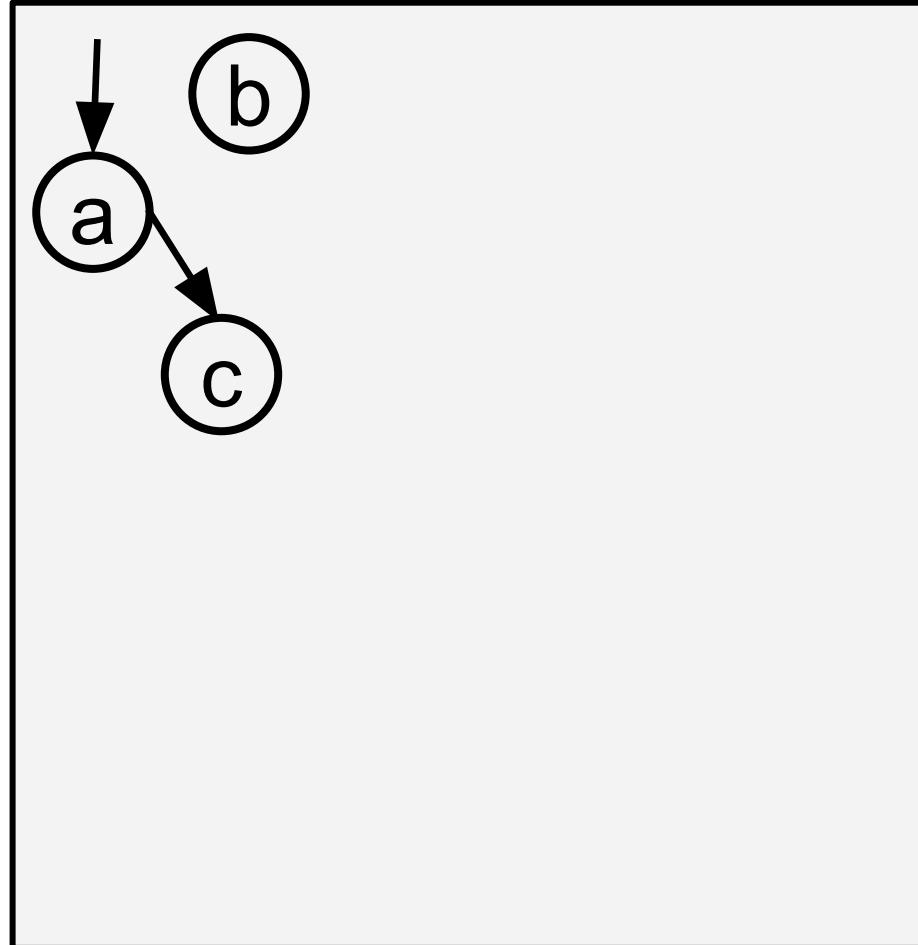


Algoritmo em C-like

- Se tivermos dois elementos (raiz e dir), temos três possibilidades de inserção

```
void inserir(int elemento) {  
    ...  
    } else if (raiz.esq == null){  
        if(elemento < raiz.elemento){  
            raiz.esq = new NoAN(elemento);  
        } else if (elemento < raiz.dir.elemento){  
            raiz.esq = new NoAN(raiz.elemento);  
            raiz.elemento = elemento;  
        } else {  
            raiz.esq = new NoAN(raiz.elemento);  
            raiz.elemento = raiz.dir.elemento;  
            raiz.dir.elemento = elemento;  
        }  
        raiz.esq.cor = raiz.dir.cor = false;  
    }  
    ...  
    raiz.cor = false;  
}
```

Dois elementos (raiz e dir)



Algoritmo em C-like

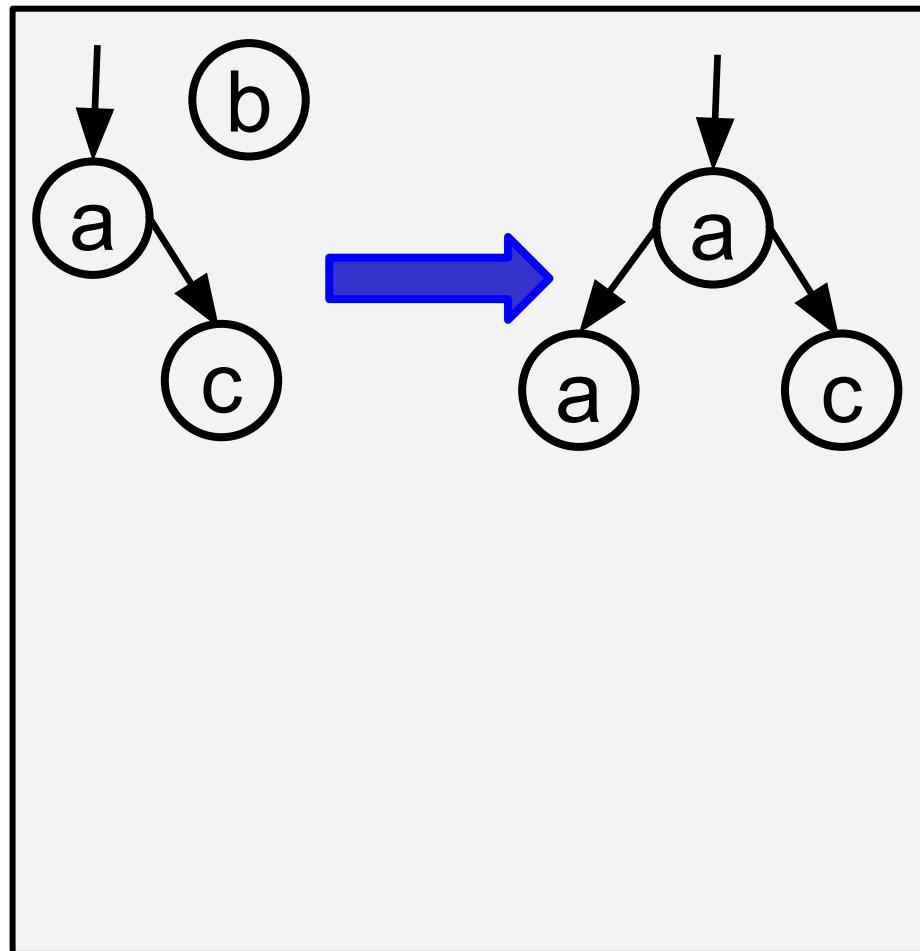
- Se tivermos dois elementos (raiz e dir), temos três possibilidades de inserção

```

void inserir(int elemento) {
    ...
} else if (raiz.esq == null){
    if(elemento < raiz.elemento){
        raiz.esq = new NoAN(elemento);
    } else if (elemento < raiz.dir.elemento){
        raiz.esq = new NoAN(raiz.elemento);
        raiz.elemento = elemento;
    } else {
        raiz.esq = new NoAN(raiz.elemento);
        raiz.elemento = raiz.dir.elemento;
        raiz.dir.elemento = elemento;
    }
    raiz.esq.cor = raiz.dir.cor = false;
}
...
raiz.cor = false;
}

```

• **Dois elementos (raiz e dir)**

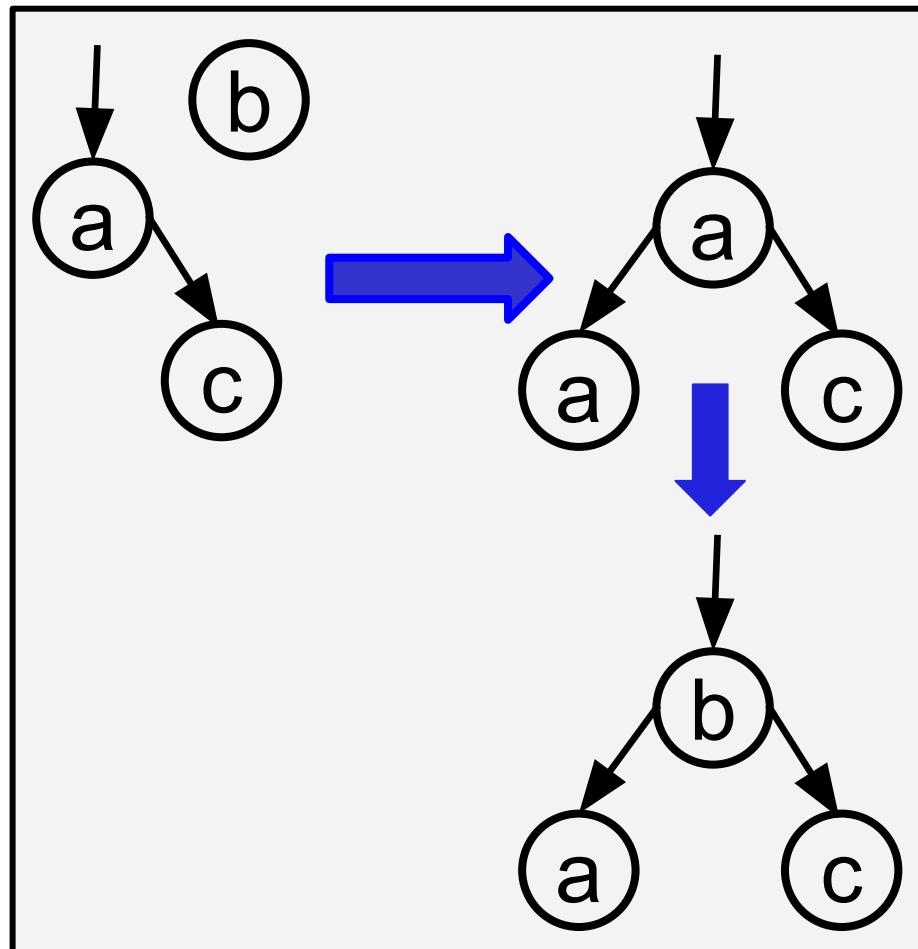


Algoritmo em C-like

- Se tivermos dois elementos (raiz e dir), temos três possibilidades de inserção

```
void inserir(int elemento) {
    ...
} else if (raiz.esq == null){
    if(elemento < raiz.elemento){
        raiz.esq = new NoAN(elemento);
    } else if (elemento < raiz.dir.elemento){
        raiz.esq = new NoAN(raiz.elemento);
    }
    raiz.elemento = elemento;
} else {
    raiz.esq = new NoAN(raiz.elemento);
    raiz.elemento = raiz.dir.elemento;
    raiz.dir.elemento = elemento;
}
raiz.esq.cor = raiz.dir.cor = false;
}
...
raiz.cor = false;
```

Dois elementos (raiz e dir)



Algoritmo em C-like

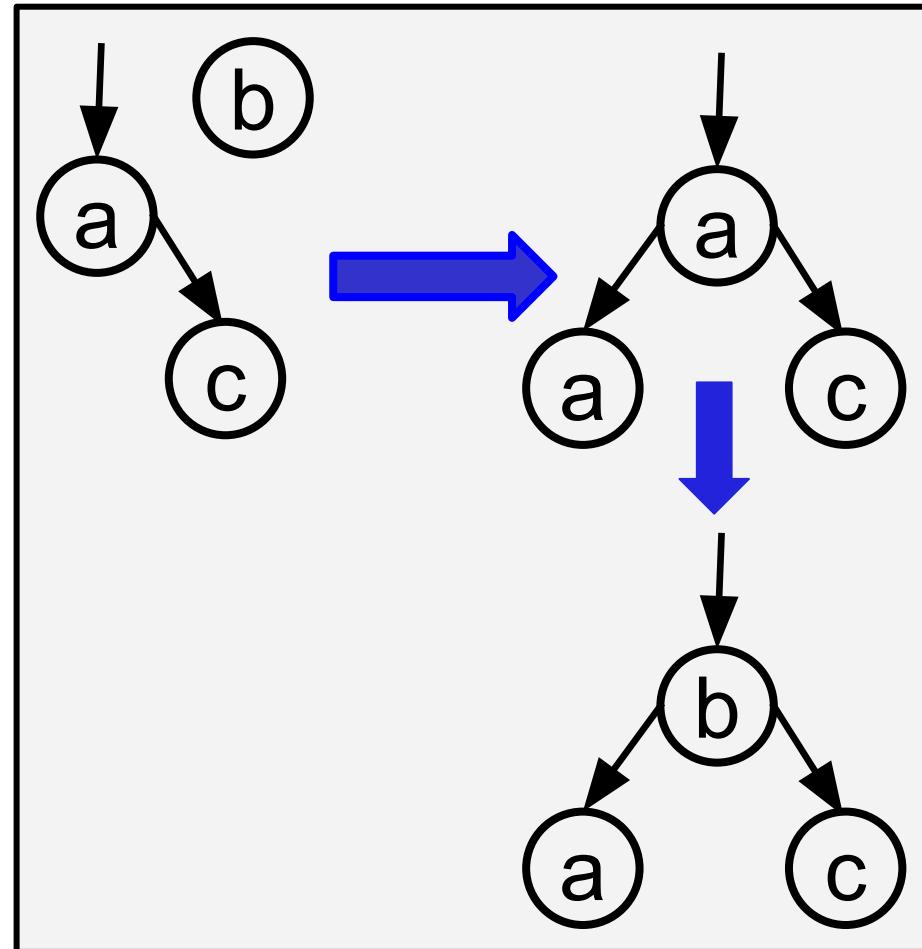
- Se tivermos dois elementos (raiz e dir), temos três possibilidades de inserção

```

void inserir(int elemento) {
    ...
} else if (raiz.esq == null){
    if(elemento < raiz.elemento){
        raiz.esq = new NoAN(elemento);
    } else if (elemento < raiz.dir.elemento){
        raiz.esq = new NoAN(raiz.elemento);
        raiz.elemento = elemento;
    } else {
        raiz.esq = new NoAN(raiz.elemento);
        raiz.elemento = raiz.dir.elemento;
        raiz.dir.elemento = elemento;
    }
    raiz.esq.cor = raiz.dir.cor = false;
}
...
raiz.cor = false;
}

```

• Dois elementos (raiz e dir)

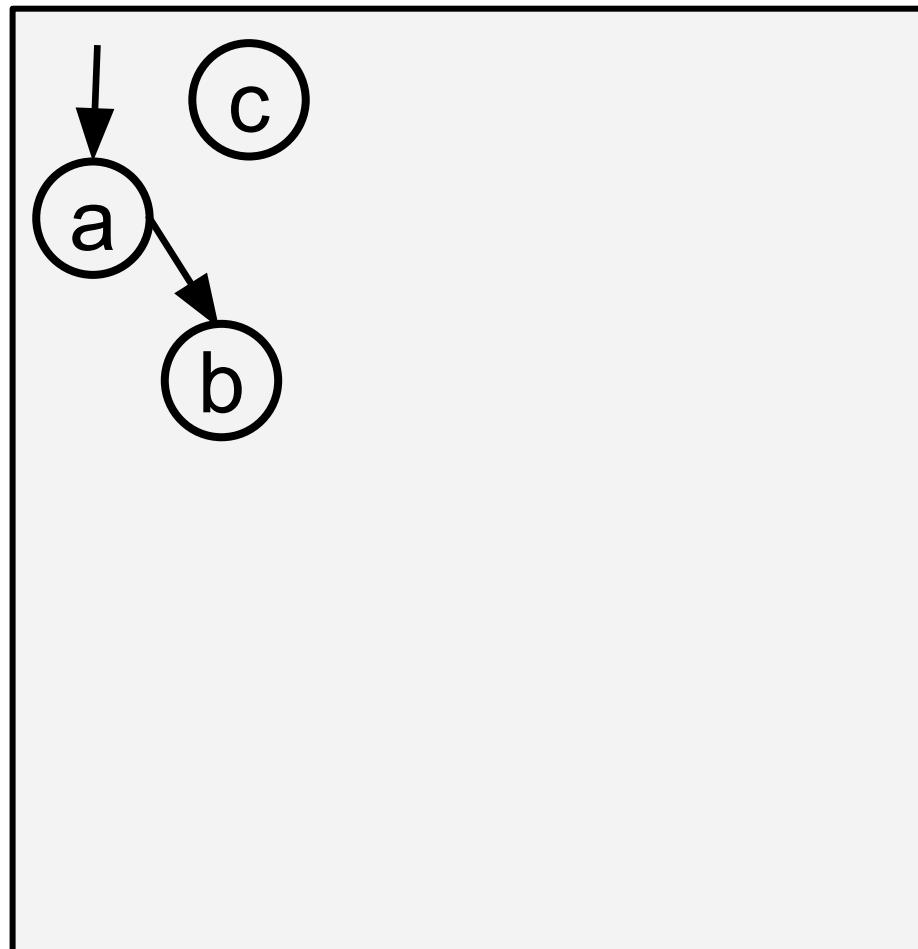


Algoritmo em C-like

- Se tivermos dois elementos (raiz e dir), temos três possibilidades de inserção

```
void inserir(int elemento) {  
    ...  
    } else if (raiz.esq == null){  
        if(elemento < raiz.elemento){  
            raiz.esq = new NoAN(elemento);  
        } else if (elemento < raiz.dir.elemento){  
            raiz.esq = new NoAN(raiz.elemento);  
            raiz.elemento = elemento;  
        } else {  
            raiz.esq = new NoAN(raiz.elemento);  
            raiz.elemento = raiz.dir.elemento;  
            raiz.dir.elemento = elemento;  
        }  
        raiz.esq.cor = raiz.dir.cor = false;  
    }  
    ...  
    raiz.cor = false;  
}
```

Dois elementos (raiz e dir)



Algoritmo em C-like

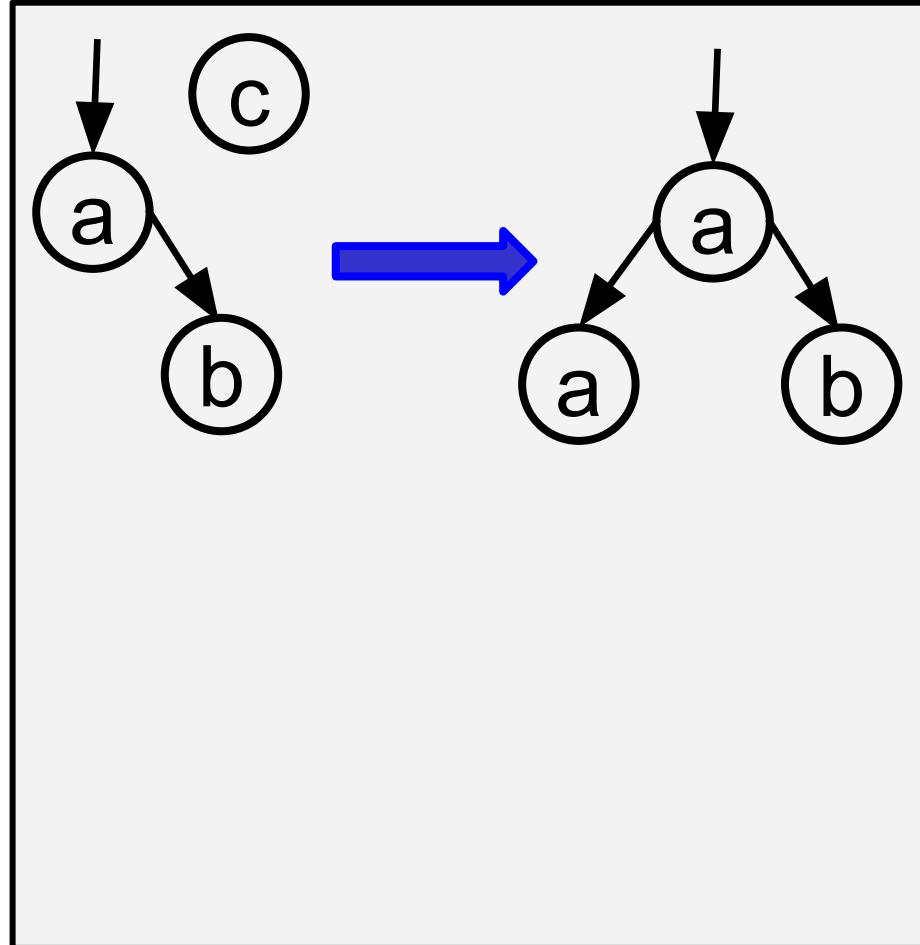
- Se tivermos dois elementos (raiz e dir), temos três possibilidades de inserção

```

void inserir(int elemento) {
    ...
} else if (raiz.esq == null){
    if(elemento < raiz.elemento){
        raiz.esq = new NoAN(elemento);
    } else if (elemento < raiz.dir.elemento){
        raiz.esq = new NoAN(raiz.elemento);
        raiz.elemento = elemento;
    } else {
        raiz.esq = new NoAN(raiz.elemento);
        raiz.elemento = raiz.dir.elemento;
        raiz.dir.elemento = elemento;
    }
    raiz.esq.cor = raiz.dir.cor = false;
}
...
raiz.cor = false;
}

```

• **Dois elementos (raiz e dir)**

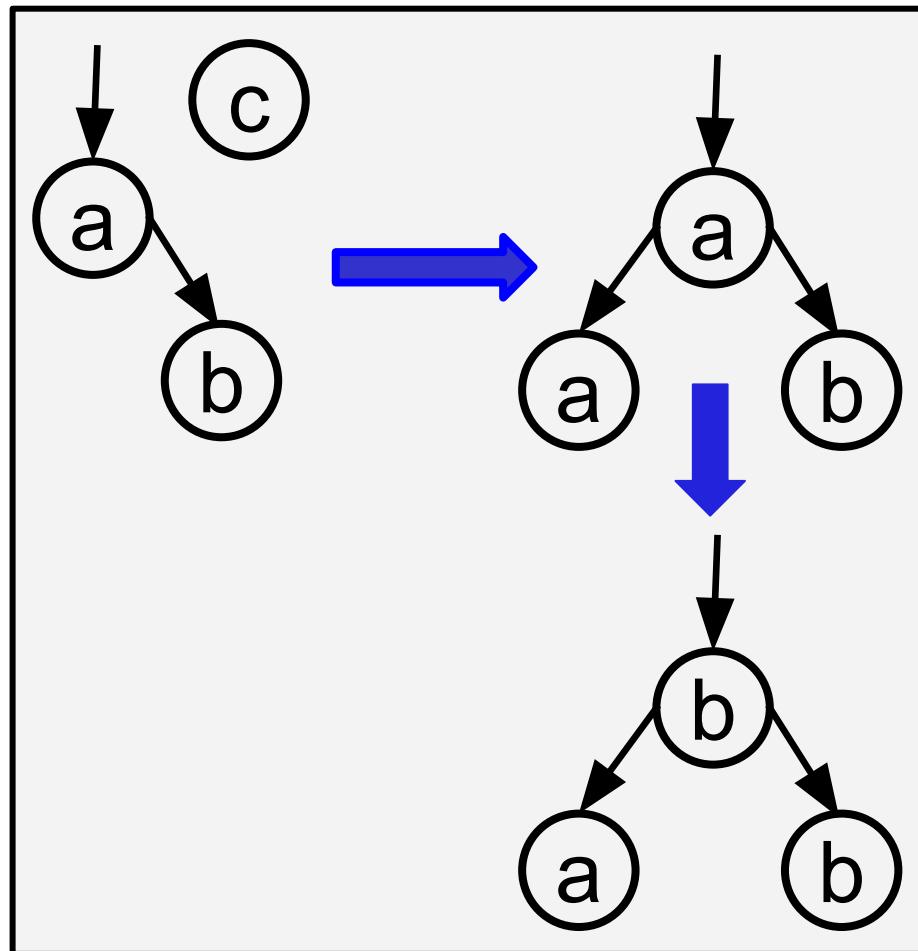


Algoritmo em C-like

- Se tivermos dois elementos (raiz e dir), temos três possibilidades de inserção

```
void inserir(int elemento) {
    ...
} else if (raiz.esq == null){
    if(elemento < raiz.elemento){
        raiz.esq = new NoAN(elemento);
    } else if (elemento < raiz.dir.elemento){
        raiz.esq = new NoAN(raiz.elemento);
        raiz.elemento = elemento;
    } else {
        raiz.esq = new NoAN(raiz.elemento);
        raiz.elemento = raiz.dir.elemento;
        raiz.dir.elemento = elemento;
    }
    raiz.esq.cor = raiz.dir.cor = false;
}
...
raiz.cor = false;
```

• **Dois elementos (raiz e dir)**



Algoritmo em C-like

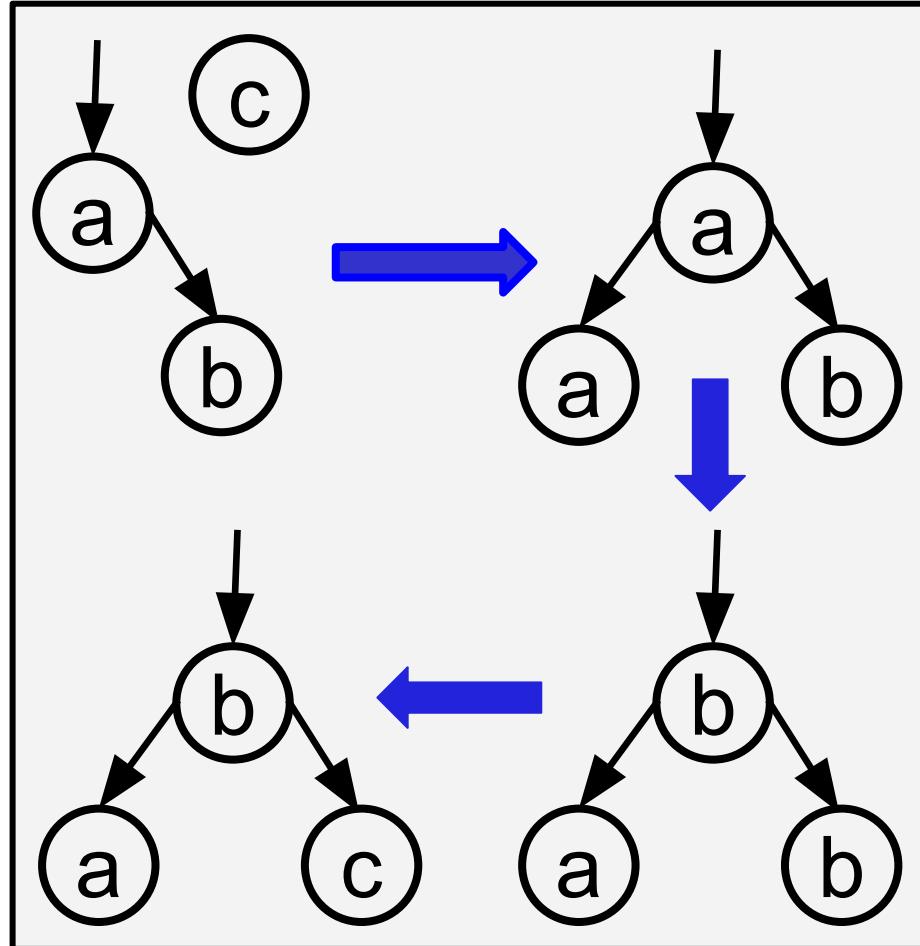
- Se tivermos dois elementos (raiz e dir), temos três possibilidades de inserção

```

void inserir(int elemento) {
    ...
} else if (raiz.esq == null){
    if(elemento < raiz.elemento){
        raiz.esq = new NoAN(elemento);
    } else if (elemento < raiz.dir.elemento){
        raiz.esq = new NoAN(raiz.elemento);
        raiz.elemento = elemento;
    } else {
        raiz.esq = new NoAN(raiz.elemento);
        raiz.elemento = raiz.dir.elemento;
        raiz.dir.elemento = elemento;
    }
    raiz.esq.cor = raiz.dir.cor = false;
}
...
raiz.cor = false;
}

```

Dois elementos (raiz e dir)



Algoritmo em C-like

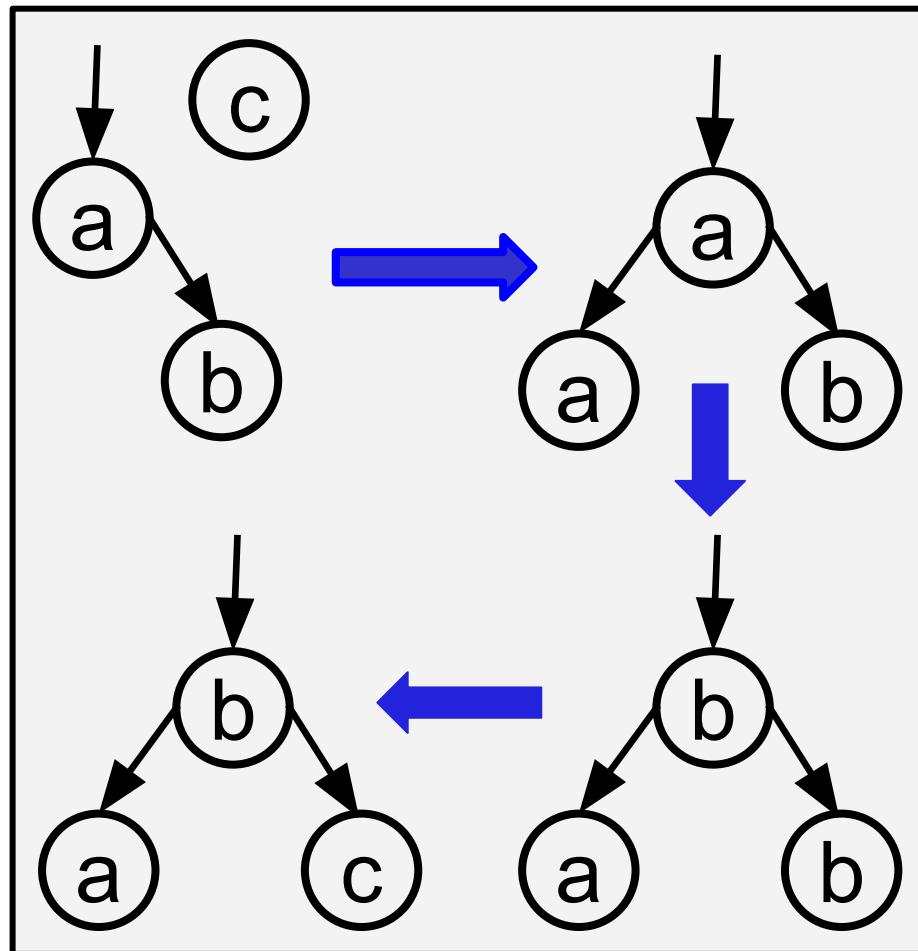
- Se tivermos dois elementos (raiz e dir), temos três possibilidades de inserção

```

void inserir(int elemento) {
    ...
} else if (raiz.esq == null){
    if(elemento < raiz.elemento){
        raiz.esq = new NoAN(elemento);
    } else if (elemento < raiz.dir.elemento){
        raiz.esq = new NoAN(raiz.elemento);
        raiz.elemento = elemento;
    } else {
        raiz.esq = new NoAN(raiz.elemento);
        raiz.elemento = raiz.dir.elemento;
        raiz.dir.elemento = elemento;
    }
    raiz.esq.cor = raiz.dir.cor = false;
}
...
raiz.cor = false;
}

```

Dois elementos (raiz e dir)



Algoritmo em C-like

- Se tivermos dois elementos (raiz e esq), temos três possibilidades de inserção

• **Dois elementos (raiz e esq)**

```
void inserir(int elemento) {  
    ...  
    } else if (raiz.dir == null){  
        if(elemento > raiz.elemento){  
            raiz.dir = new NoAN(elemento);  
        } else if (elemento > raiz.esq.elemento){  
            raiz.dir = new NoAN(raiz.elemento);  
            raiz.elemento = elemento;  
        } else {  
            raiz.dir = new NoAN(raiz.elemento);  
            raiz.elemento = raiz.esq.elemento;  
            raiz.esq.elemento = elemento;  
        }  
        raiz.esq.cor = raiz.dir.cor = false;  
    }  
    ...  
    raiz.cor = false;  
}
```

Algoritmo em C-like

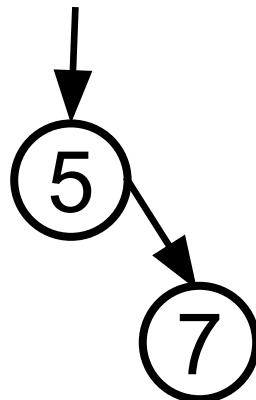
- Se tivermos três ou mais elementos, executamos a técnica apresentada

Mais de três elementos

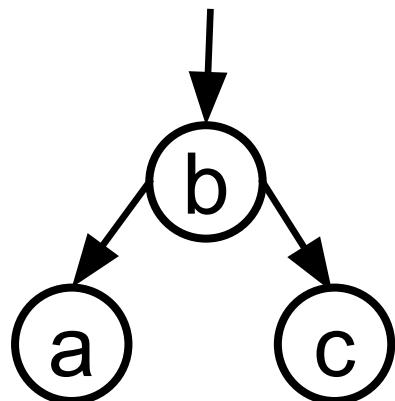
```
void inserir(int elemento){  
    if (raiz == null){  
        ...  
    } else if (raiz.esq == null && raiz.dir == null){  
        ...  
    } else if (raiz.esq == null){  
        ...  
    } else if (raiz.dir == null){  
        ...  
    } else {  
        inserir(elemento, null, null, null, raiz);  
    }  
    raiz.cor = false;  
}
```

Exercício Resolvido (9)

- Suponha a existência da árvore abaixo:

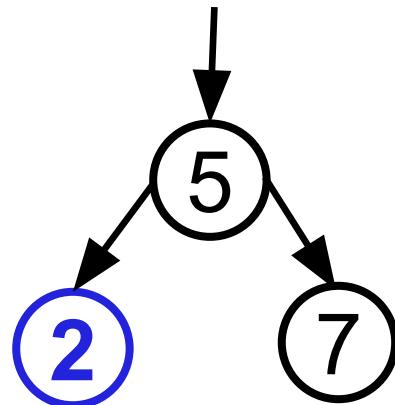


- Mostre o que devemos fazer para que nossa árvore fique como a abaixo se se inserirmos o número: (a) 2; (b) 6; e (c) 8

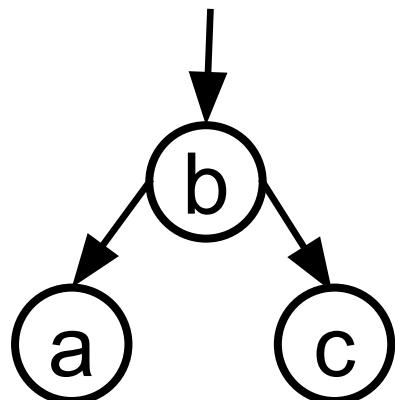


Exercício Resolvido (9)

- Suponha a existência da árvore abaixo:



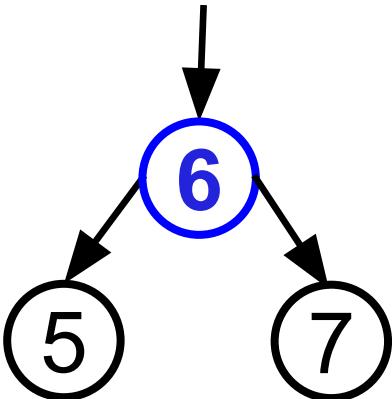
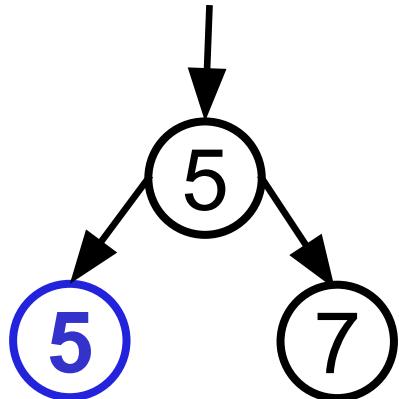
- Mostre o que devemos fazer para que nossa árvore fique como a abaixo se se inserirmos o número: (a) 2; (b) 6; e (c) 8



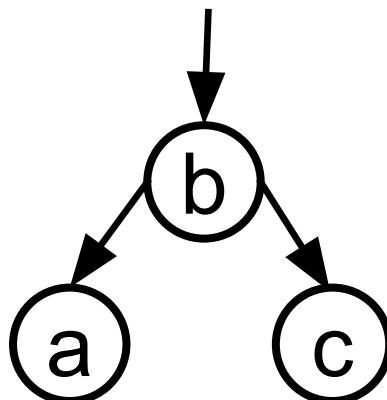
Como (`raiz.esq == null` e $2 < 5$), basta inserir o 2 à esquerda do 5

Exercício Resolvido (9)

- Suponha a existência da árvore abaixo:



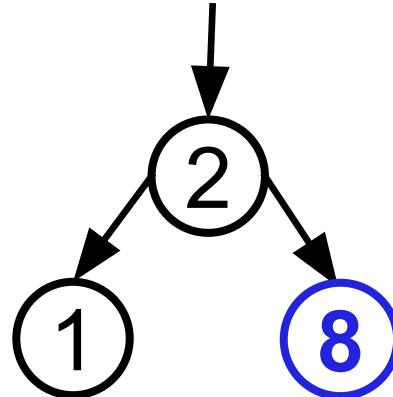
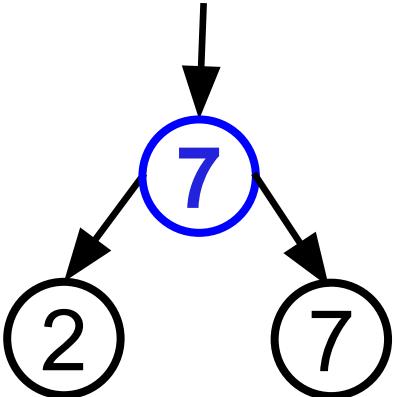
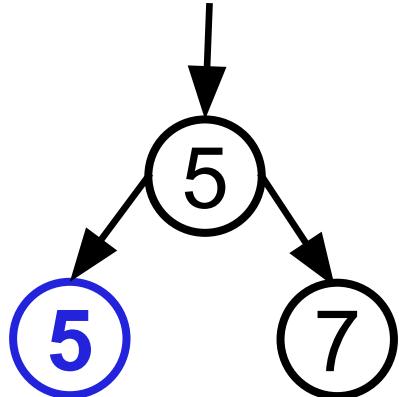
- Mostre o que devemos fazer para que nossa árvore fique como a abaixo se se inserirmos o número: (a) 2; (b) 6; e (c) 8



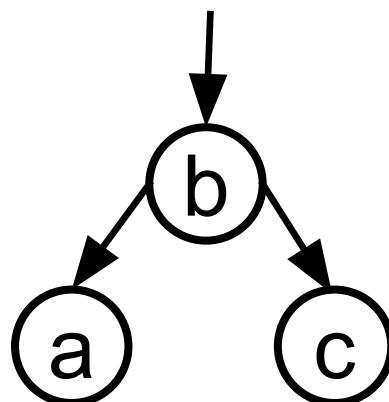
Como (`raiz.esq == null` e $5 < 6 < 7$), basta inserir o 5 à esquerda da raiz e substituir o 6 na raiz

Exercício Resolvido (9)

- Suponha a existência da árvore abaixo:



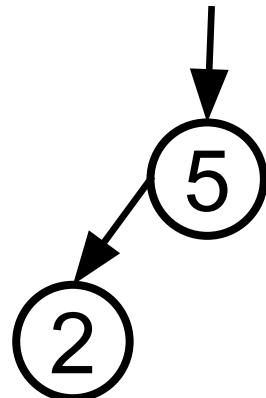
- Mostre o que devemos fazer para que nossa árvore fique como a abaixo se se inserirmos o número: (a) 2; (b) 6; e **(c) 8**



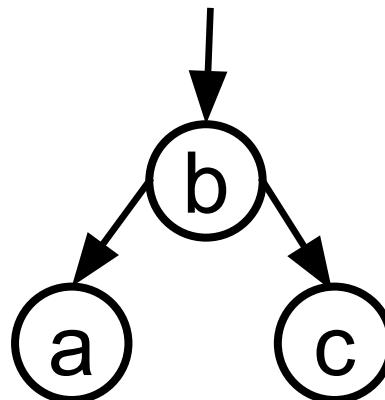
Como (`raiz.esq == null` e $5 < 7 < 8$), basta inserir o 5 à esquerda da raiz, substituir o 7 na raiz e o 8 à direita da raiz

Exercício Resolvido (10)

- Suponha a existência da árvore abaixo:

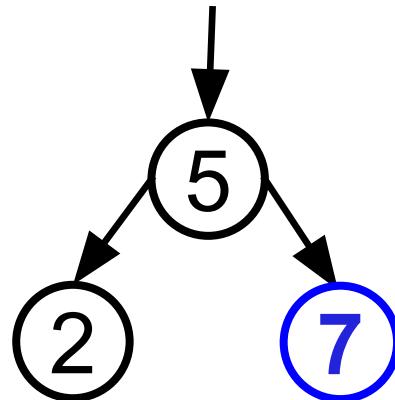


- Mostre o que devemos fazer para que nossa árvore fique como a abaixo se se inserirmos o número: (a) 7; (b) 3; e (c) 1

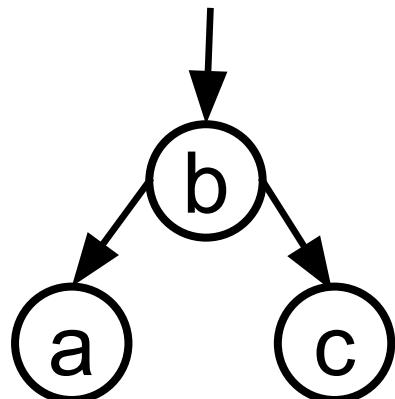


Exercício Resolvido (10)

- Suponha a existência da árvore abaixo:



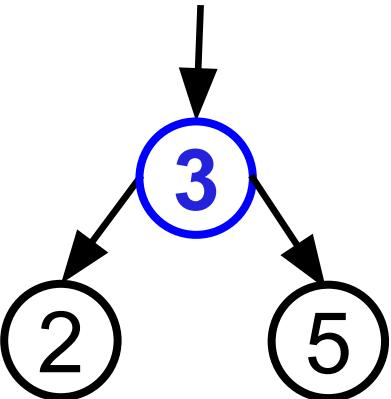
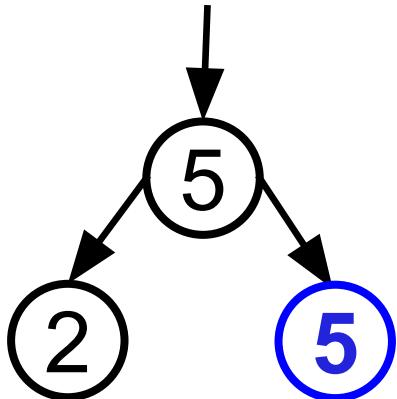
- Mostre o que devemos fazer para que nossa árvore fique como a abaixo se se inserirmos o número: (a) 7; (b) 3; e (c) 1



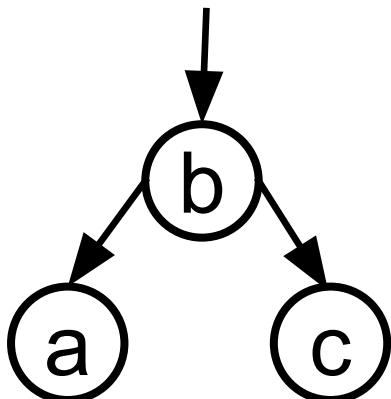
Como (raiz.dir == null e 5 < 7), basta inserir o 7 à direita do 5

Exercício Resolvido (10)

- Suponha a existência da árvore abaixo:



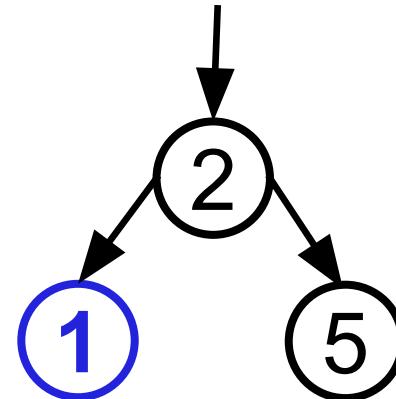
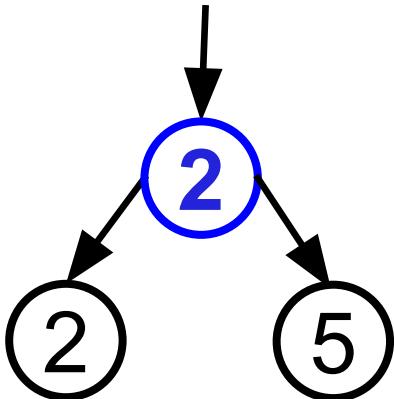
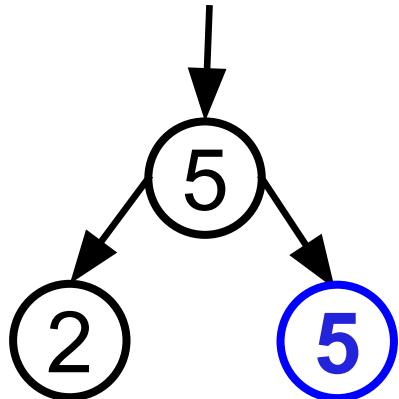
- Mostre o que devemos fazer para que nossa árvore fique como a abaixo se se inserirmos o número: (a) 7; (b) 3; e (c) 1



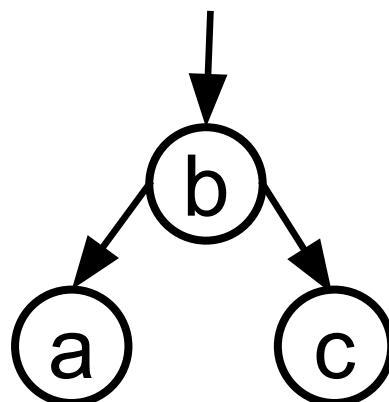
Como (raiz.dir == null e $2 < 3 < 5$), basta inserir o 5 à direita da raiz e substituir o 3 na raiz

Exercício Resolvido (10)

- Suponha a existência da árvore abaixo:



- Mostre o que devemos fazer para que nossa árvore fique como a abaixo se se inserirmos o número: (a) 7; (b) 3; e **(c) 1**



Como (raiz.dir == null e $1 < 2 < 5$), basta inserir o 5 à direita da raiz, substituir o 2 na raiz e o 1 à esquerda da raiz

Algoritmo em C-like

Ver código em: [fonte/unidade08/alvinegra/](#)