

Unidade VIII: Árvores AVL



PUC Minas

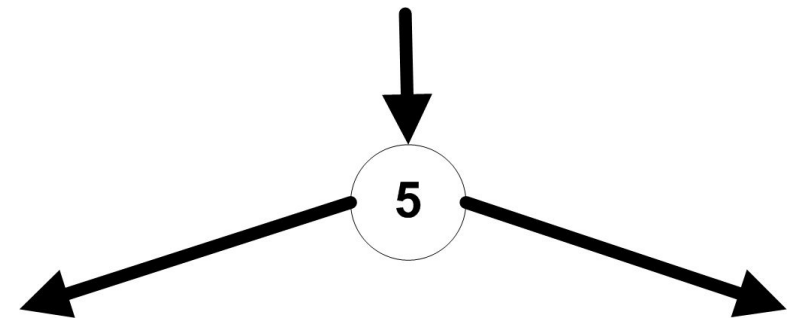
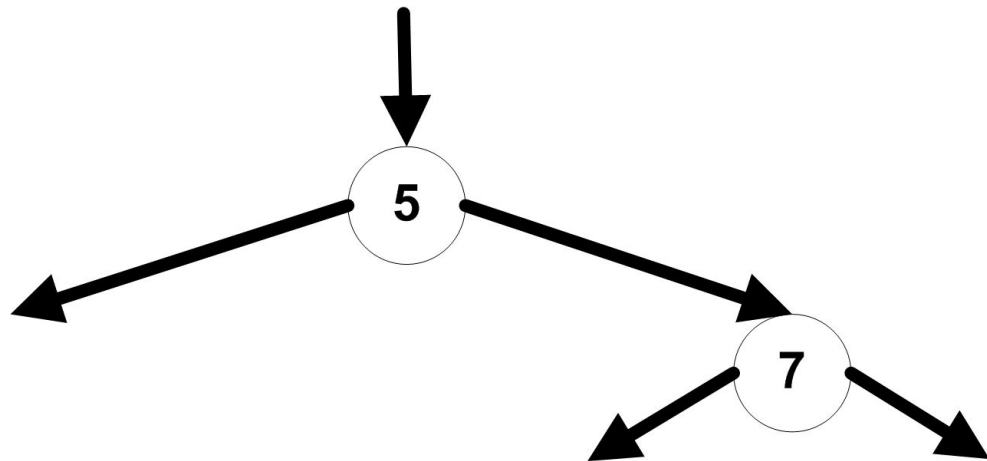
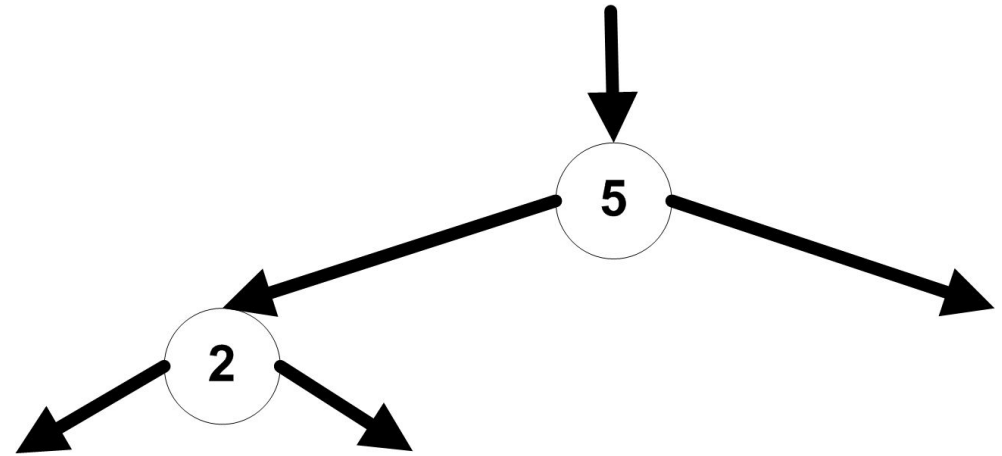
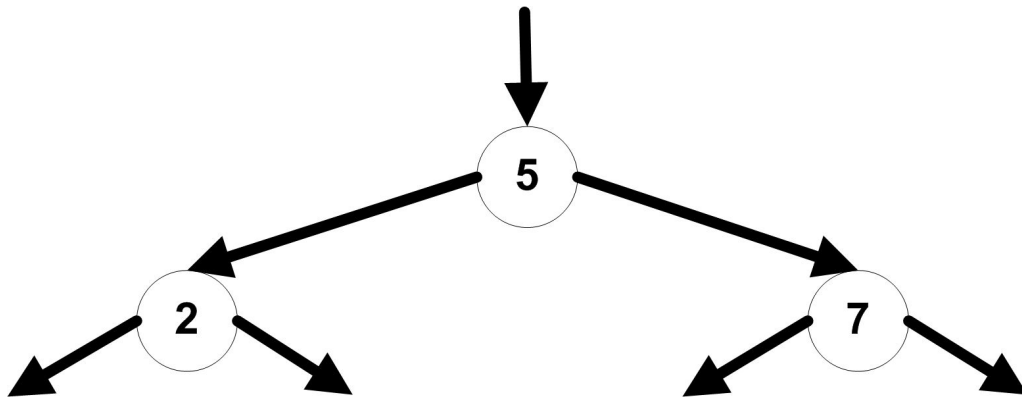
Instituto de Ciências Exatas e Informática
Departamento de Ciência da Computação

- As árvores AVL foram propostas por Adelson-Velskii e Landis
- No pior caso, o número de comparações para se localizar um elemento em uma AVL é aproximadamente $1,44 * \lg(n) = \Theta(\lg(n))$
- Cada nó possui um **fator de balanceamento** que consiste na diferença entre o número de níveis de suas subárvores à esquerda e à direita

$$\text{fator}(i) = \text{alturaDir}(i) - \text{alturaEsq}(i)$$

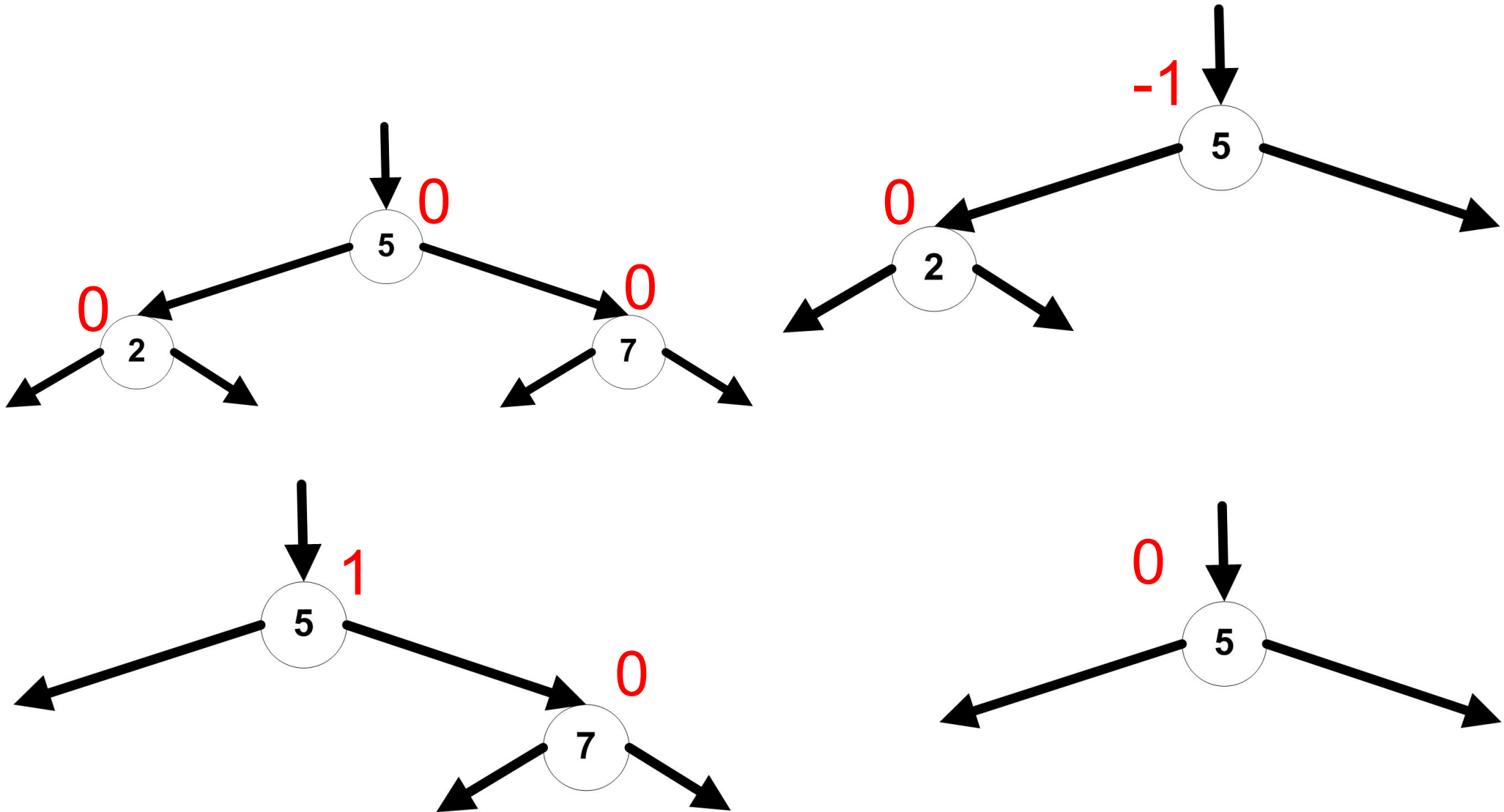
Exercício

- Sejam as árvores abaixo, mostre o fator de balanceamento de cada nó

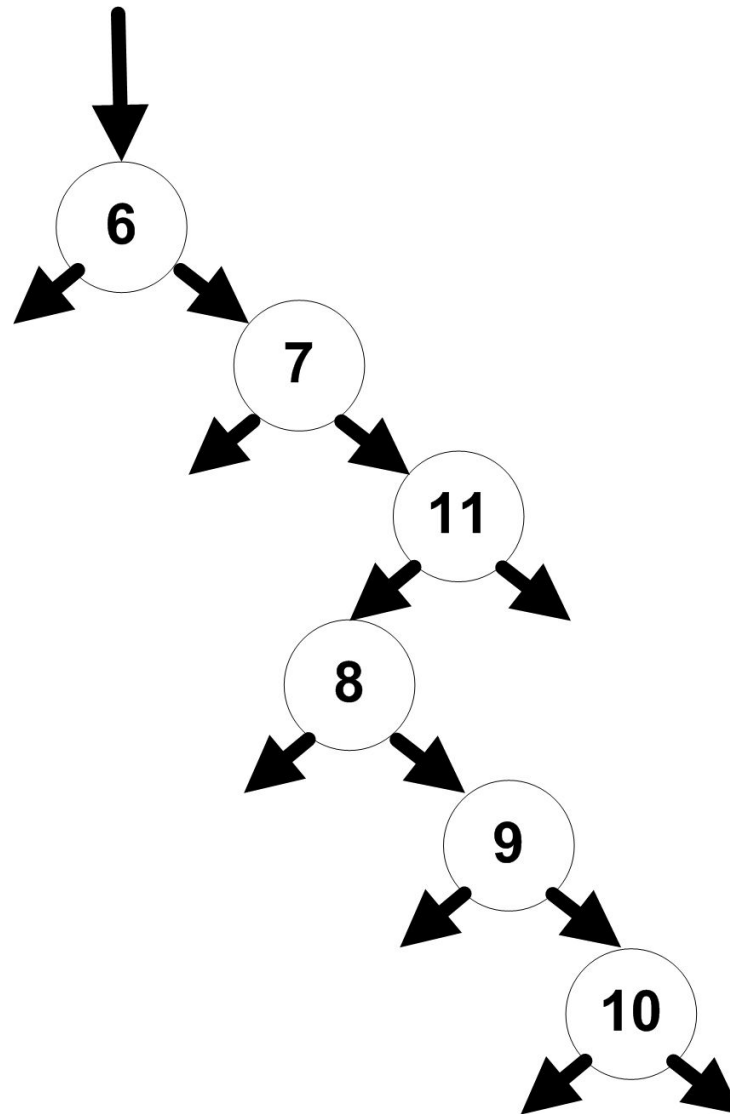


Exercício

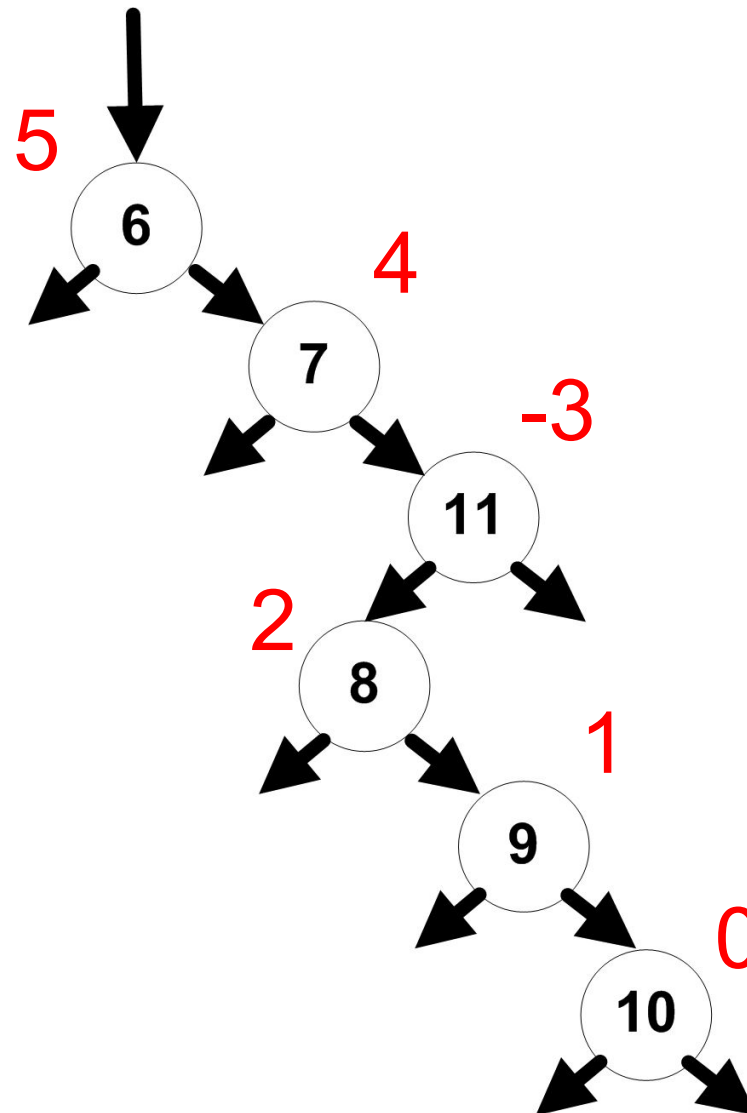
- Sejam as árvores abaixo, mostre o fator de balanceamento de cada nó



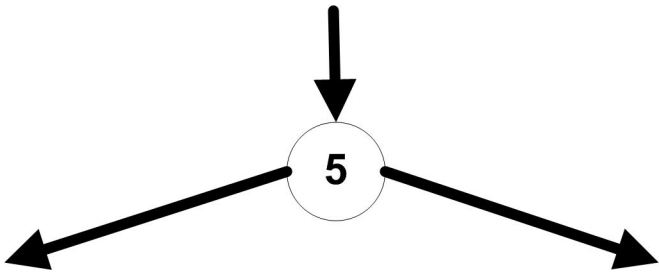
- Seja a árvore abaixo, mostre o fator de balanceamento de cada nó



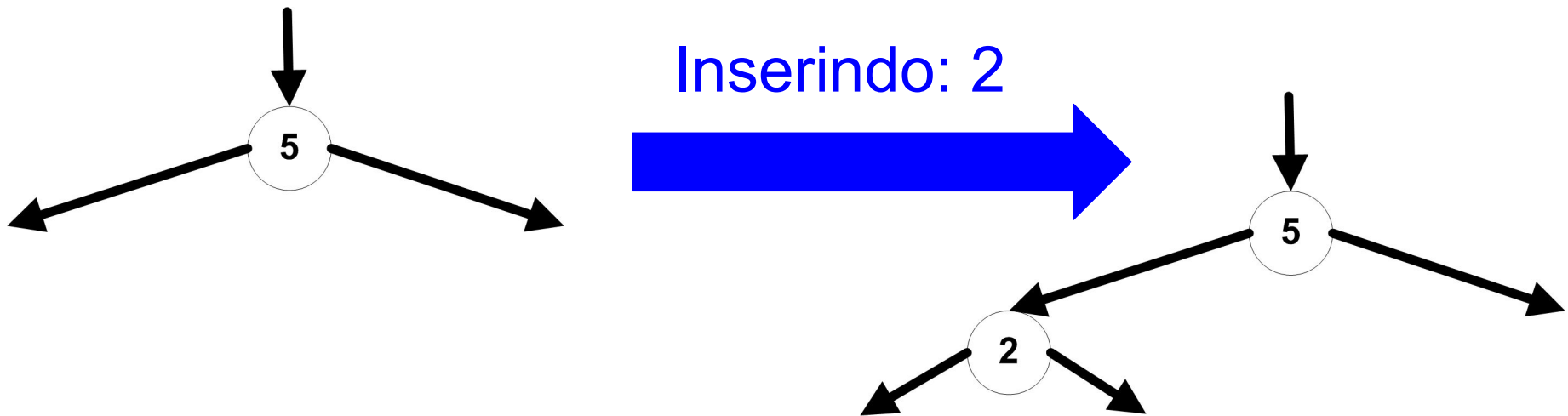
- Seja a árvore abaixo, mostre o fator de balanceamento de cada nó



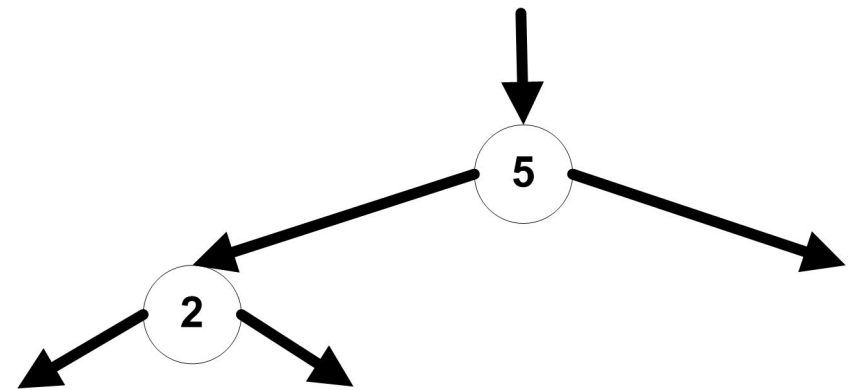
- Seja a árvore abaixo, faça a inserção de um elemento tal que o fator de balanceamento do nó cinco seja menos um



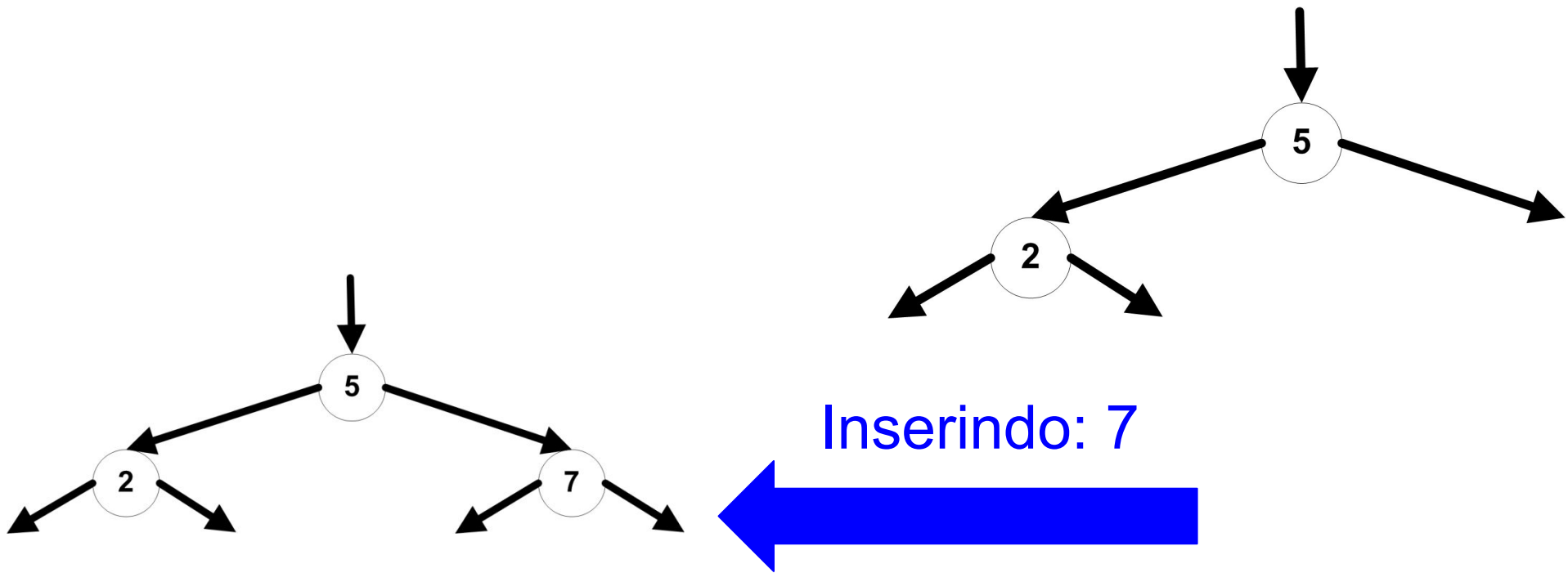
- Seja a árvore abaixo, faça a inserção de um elemento tal que o fator de balanceamento do nó cinco seja menos um



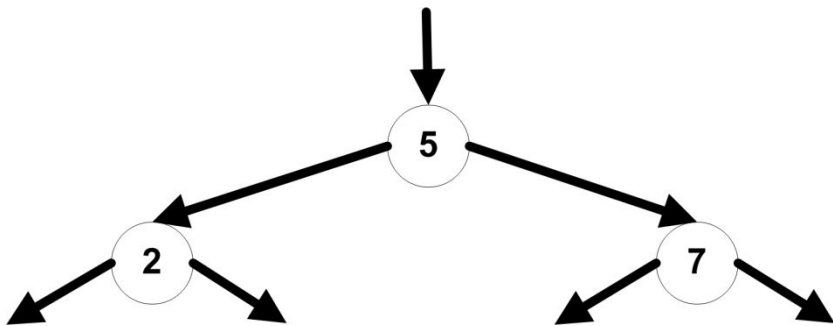
- Agora, faça a inserção de outro elemento para que o fator de balanceamento do nó cinco volte a ser zero



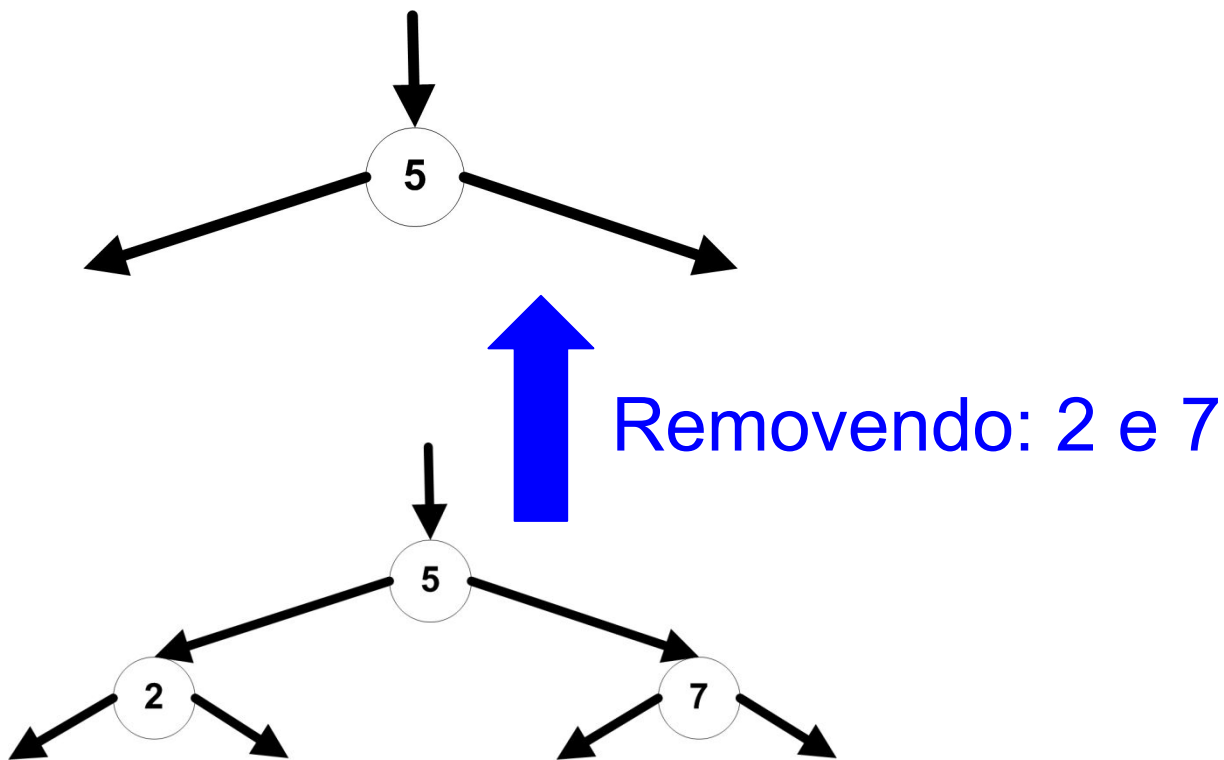
- Faça a inserção de outro elemento para que o fator de balanceamento do nó cinco volte a ser 0



- O que acontece se removermos o dois e, depois, o sete?

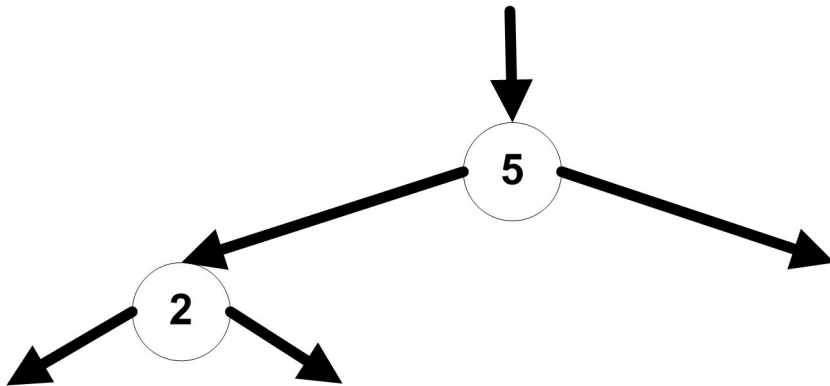


- O que acontece se removermos o dois e, depois, o sete?



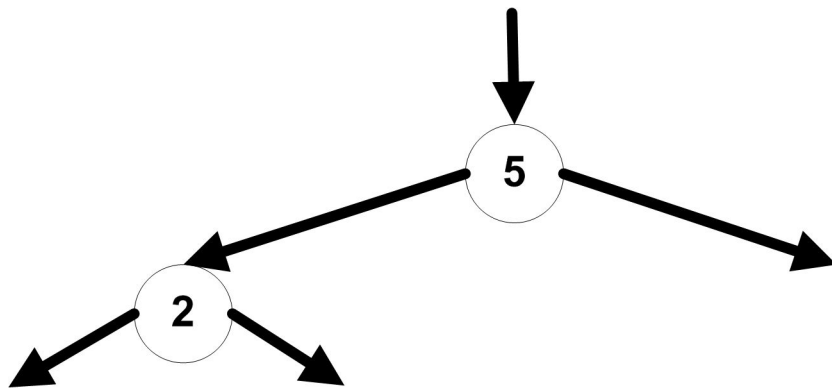
Exercício

- Seja a árvore abaixo, faça a inserção de um elemento tal que o fator de balanceamento do nó cinco seja menos dois

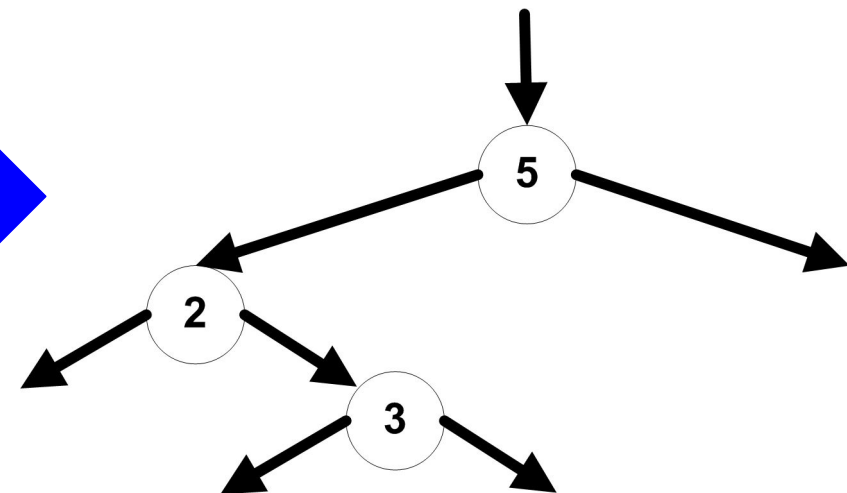


Exercício

- Seja a árvore abaixo, faça a inserção de um elemento tal que o fator de balanceamento do nó cinco seja menos dois

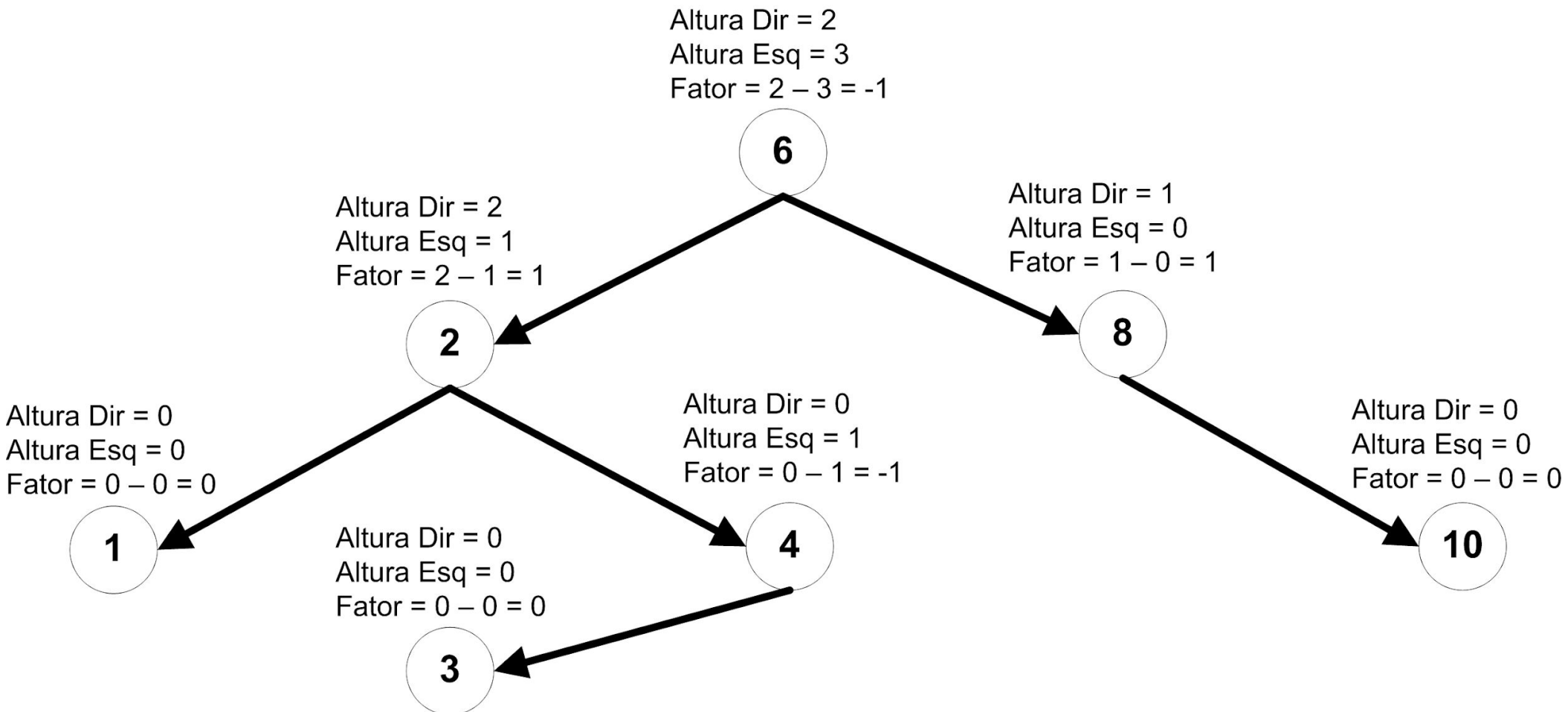


Inserindo: 3



Exemplo de uma Árvore AVL

- O fator de cada nó será -1, 0 ou 1 como no exemplo abaixo:



- Cada nó conhece seu fator de balanceamento
- Quando o fator de um nó se torna ± 2 , o algoritmo da AVL rotaciona esse nó, sabendo que existem quatro tipos de rotação (R_E , R_D , R_{DE} e R_{ED})

Fator do nó	Tipo de rotação
2	Rotação para a esquerda
-2	Rotação para a direita

Fator do nó	Tipo de rotação
2	Rotação para a esquerda $(R_E \text{ e } R_{DE})$
-2	Rotação para a direita $(R_D \text{ e } R_{ED})$

Fator do nó

O tipo de rotação depende do fator do filho pertencente a maior subárvore

Ou seja, o pai...

Rotação para a esquerda

2

$(R_E \text{ e } R_{DE})$

Rotação para a direita

-2

$(R_D \text{ e } R_{ED})$

Ideia Básica

Fator do nó	Fator do filho à direita	Fator do filho à esquerda	Tipo de rotação
2	1	-	Simple à esquerda
	0		Dupla dir-esq
-2		-1	Simple à direita
		0	Dupla esq-dir
	-1		
	1		

Ideia Básica

Fator do nó	Fator do filho à direita	Fator do filho à esquerda	Tipo de rotação
2	1	-	Simples à esquerda
	0		Dupla dir-esq
	-1		
-2		-1	Simples à direita
		0	
		1	Dupla esq-dir

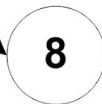
- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à direita com fator 1

Rotação simples à esquerda no nó com fator 2

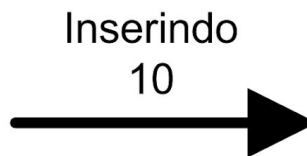
Altura Dir = 1
Altura Esq = 0
Fator = 1 - 0 = 1



Altura Dir = 0
Altura Esq = 0
Fator = 0 - 0 = 0



Árvore
Balanceada



Altura Dir = 2
Altura Esq = 0
Fator = 2 - 0 = 2



Altura Dir = 1
Altura Esq = 0
Fator = 1 - 0 = 1



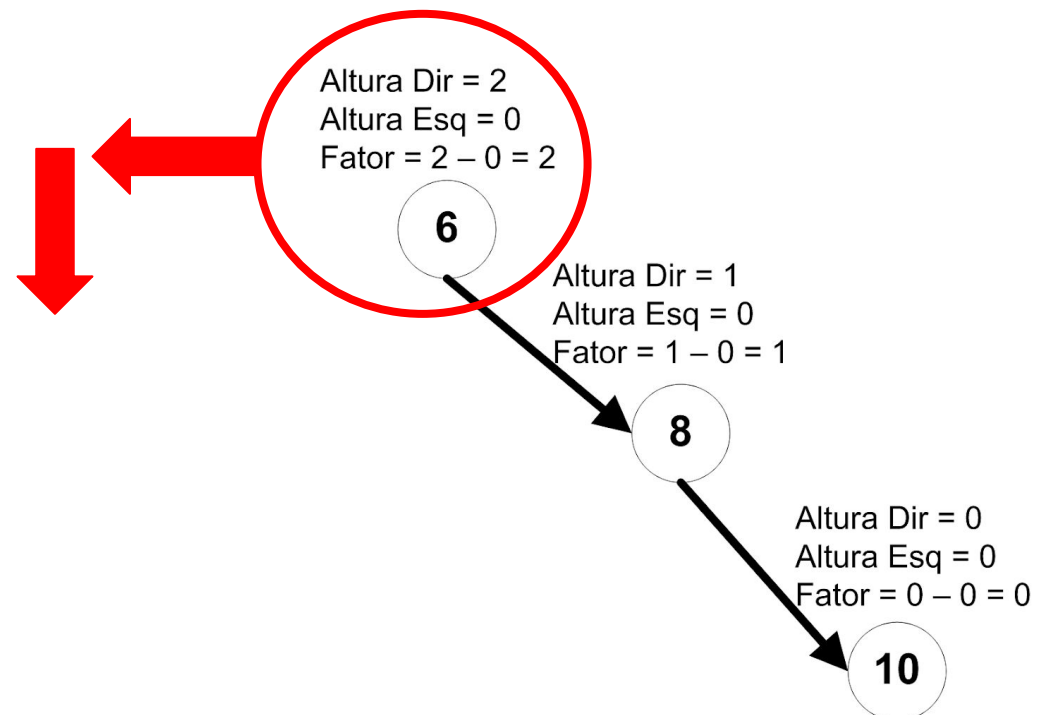
Árvore
Desbalanceada

Altura Dir = 0
Altura Esq = 0
Fator = 0 - 0 = 0



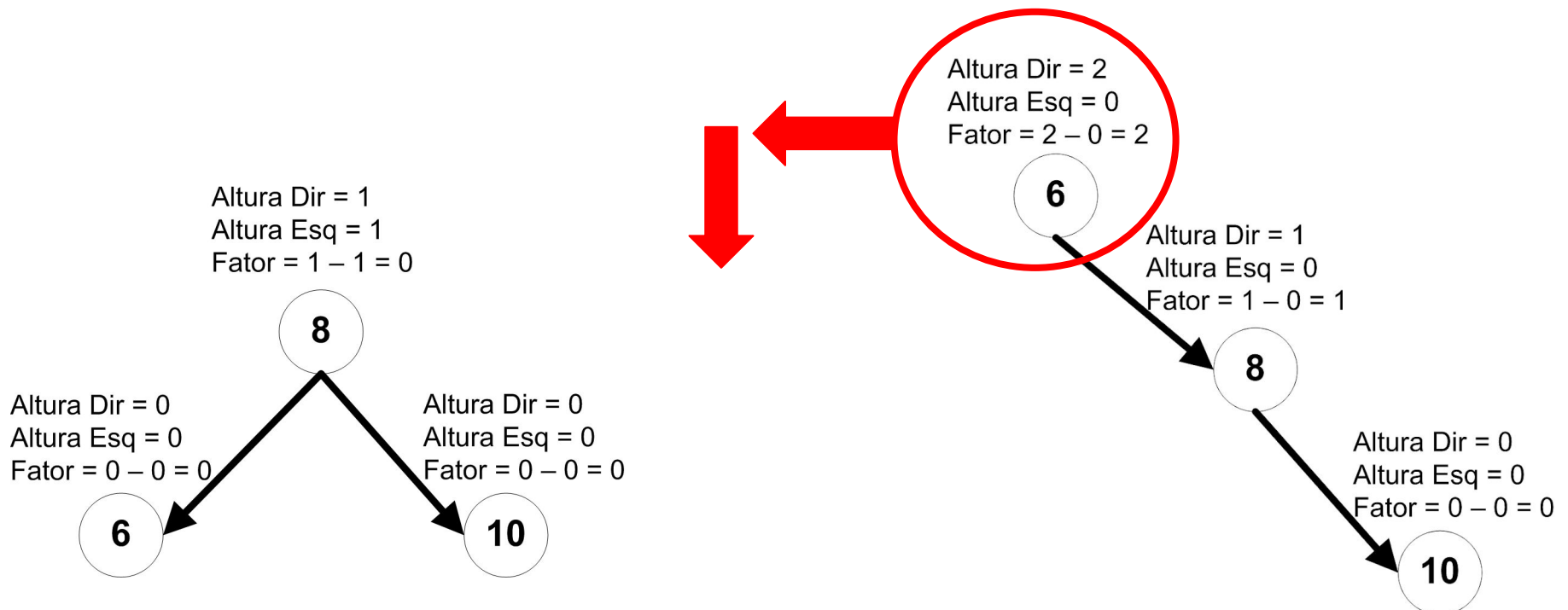
- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à direita com fator 1

Rotação simples à esquerda no nó com fator 2



- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à direita com fator 1

Rotação simples à esquerda no nó com fator 2

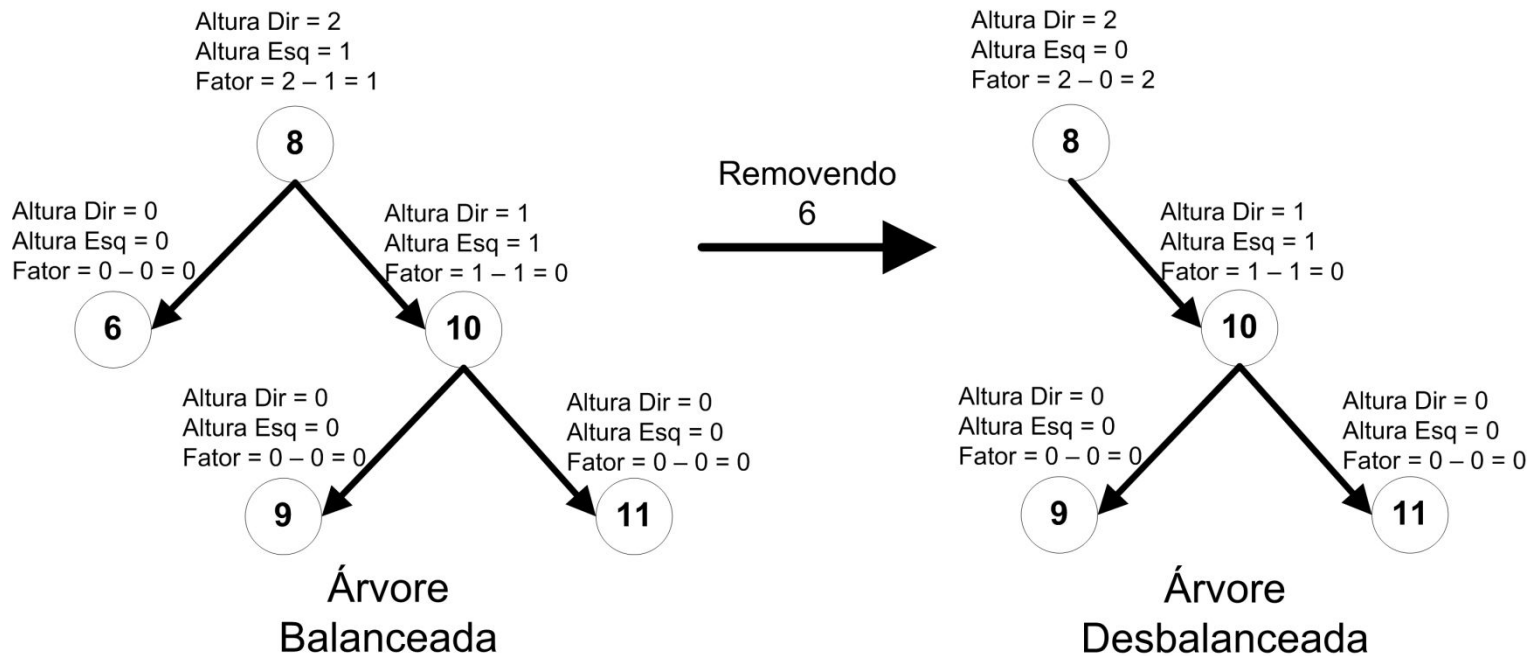


Ideia Básica

Fator do nó	Fator do filho à direita	Fator do filho à esquerda	Tipo de rotação
2	1		Simple à esquerda
	0		
	-1		
-2		-1	Simple à direita
		1	Dupla esq-dir

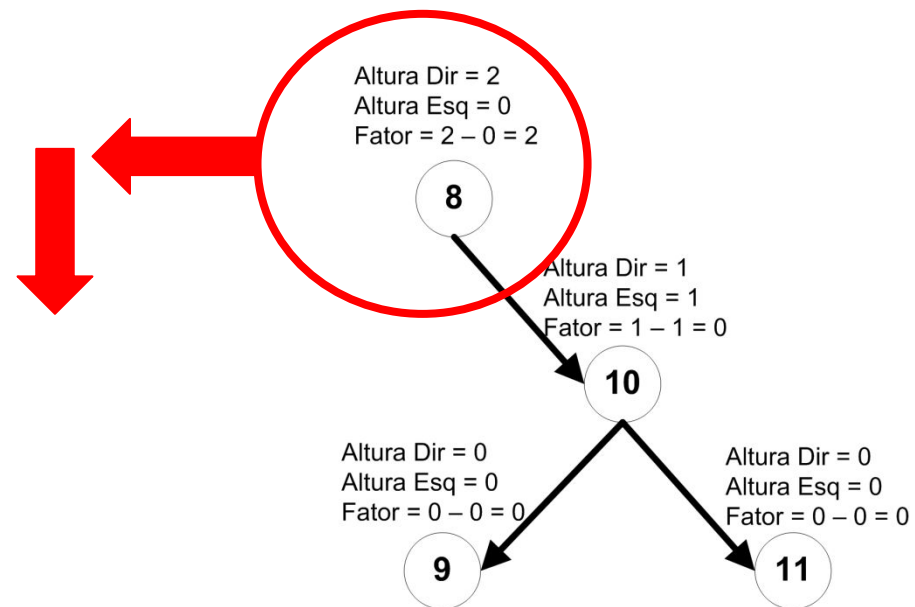
- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à direita com fator 0

Rotação simples à esquerda no nó com fator 2



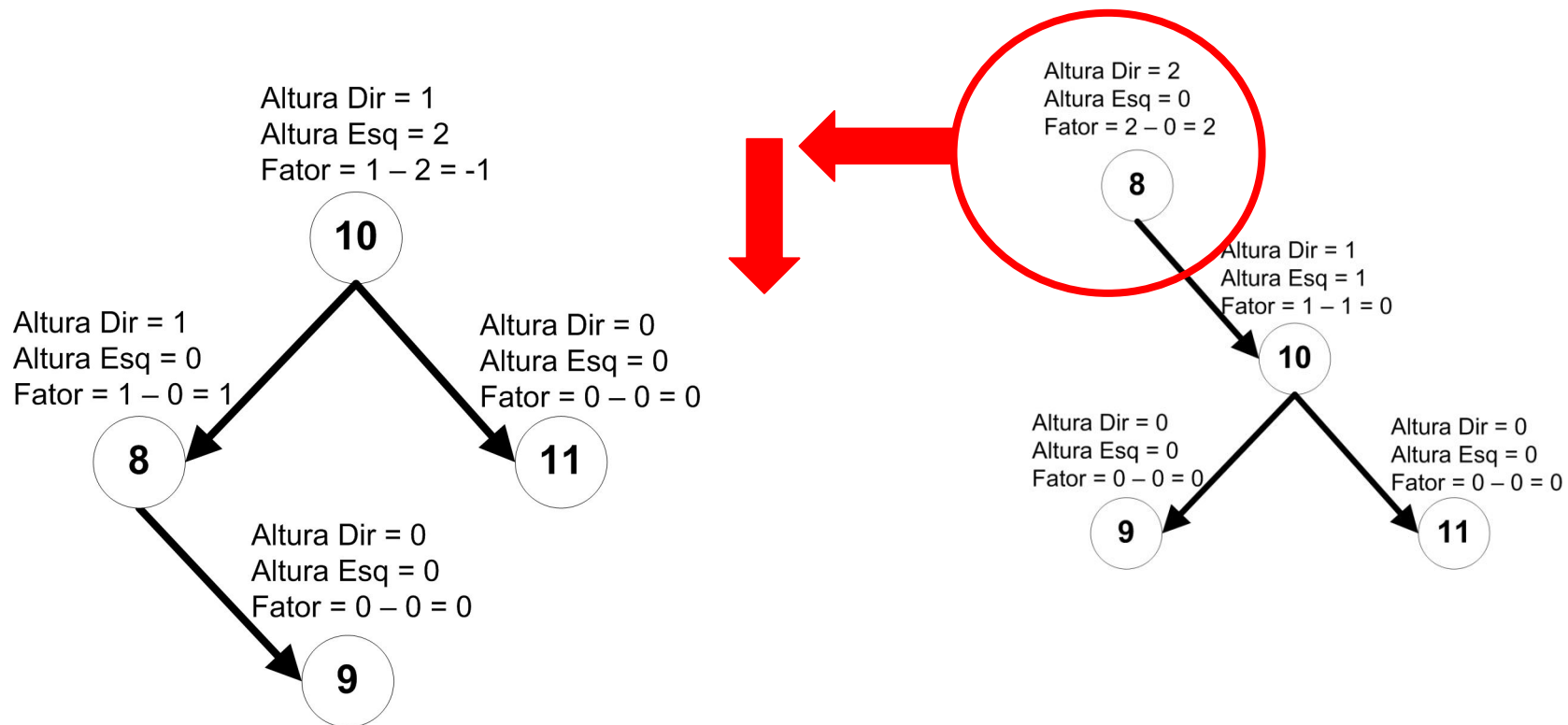
- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à direita com fator 0

Rotação simples à esquerda no nó com fator 2



- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à direita com fator 0

Rotação simples à esquerda no nó com fator 2

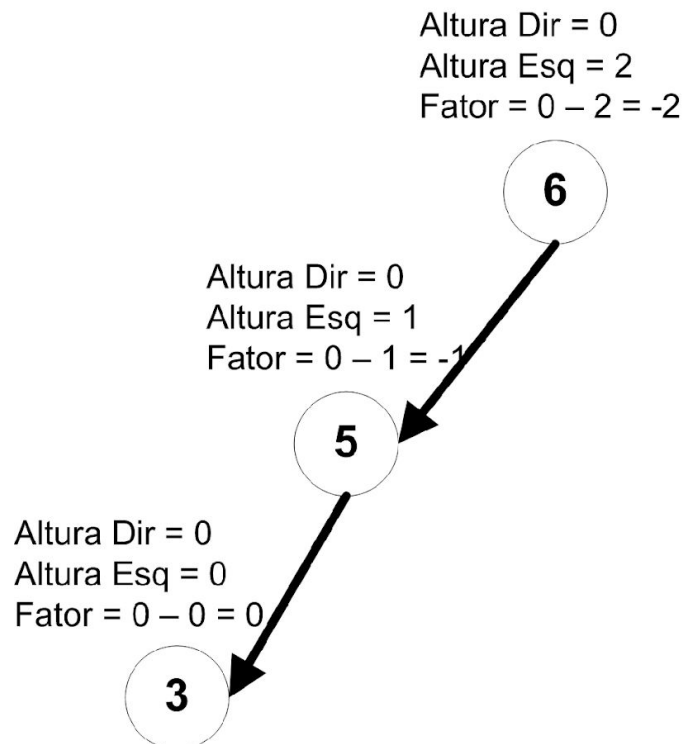


Ideia Básica

Fator do nó	Fator do filho à direita	Fator do filho à esquerda	Tipo de rotação
2	1		Simple à esquerda
	0		Dupla dir-esq
-2		-1	Simple à direita
		0	
		1	Dupla esq-dir

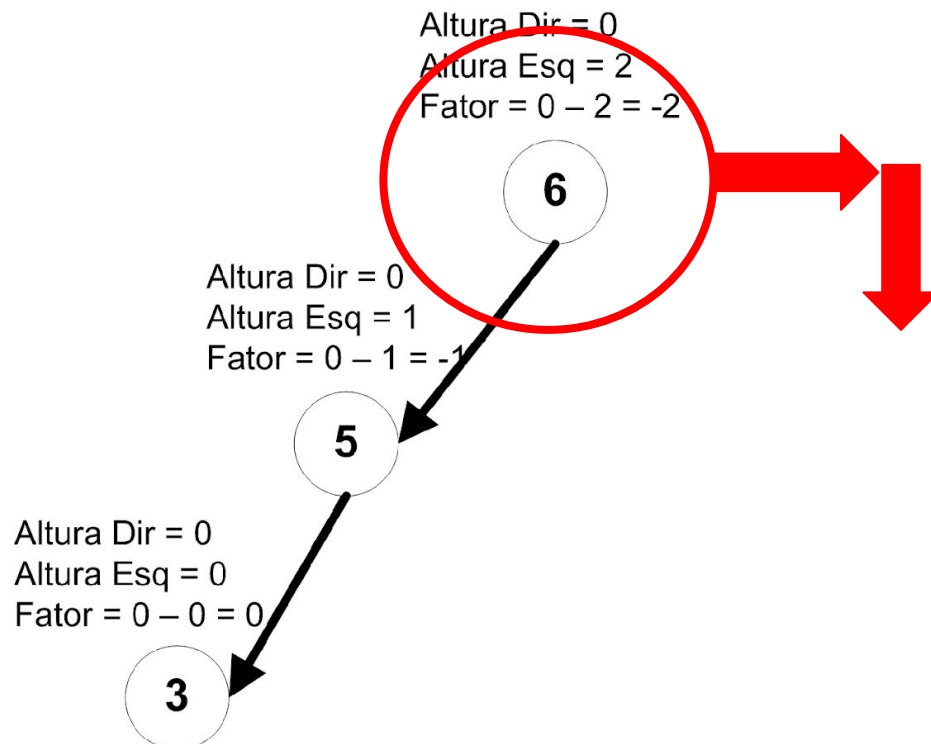
- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à esquerda com fator -1

Rotação simples à direita no nó com fator -2



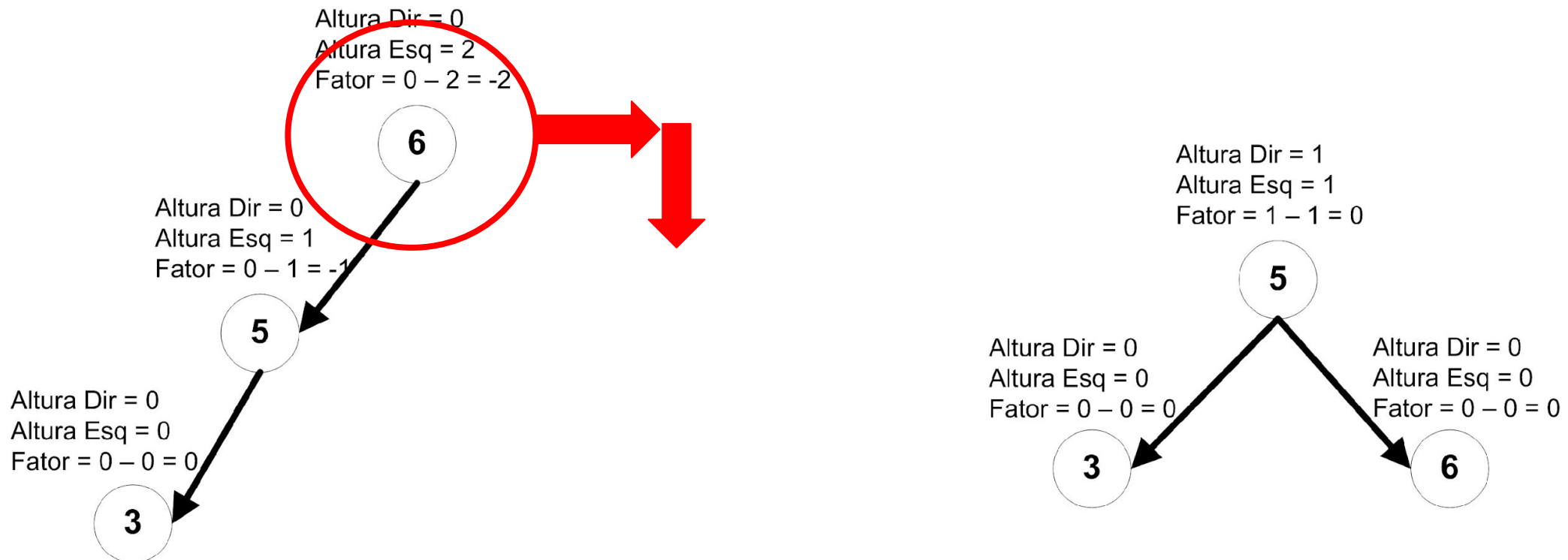
- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à esquerda com fator -1

Rotação simples à direita no nó com fator -2



- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à esquerda com fator -1

Rotação simples à direita no nó com fator -2

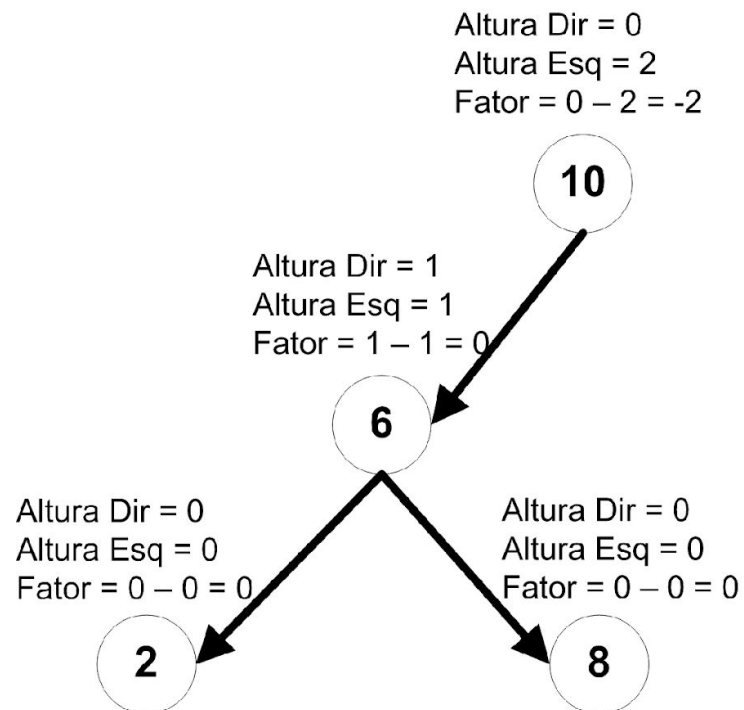


Ideia Básica

Fator do nó	Fator do filho à direita	Fator do filho à esquerda	Tipo de rotação
2	1		Simples à esquerda
	0		Dupla dir-esq
-2		-1	Simples à direita
		0	
		1	Dupla esq-dir

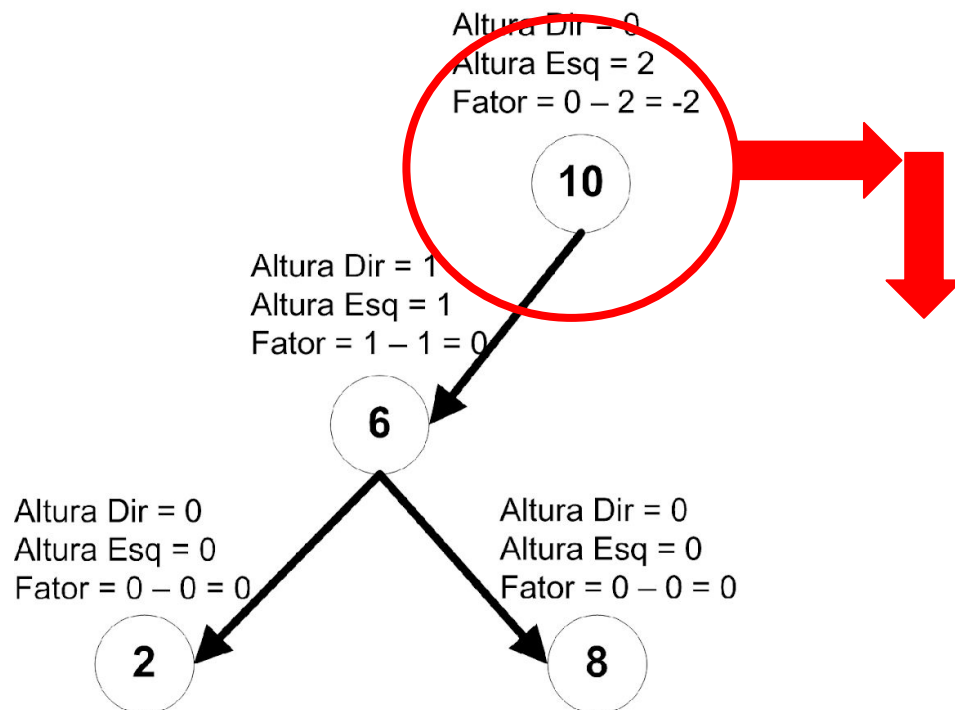
- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à esquerda com fator -1

Rotação simples à direita no nó com fator -2



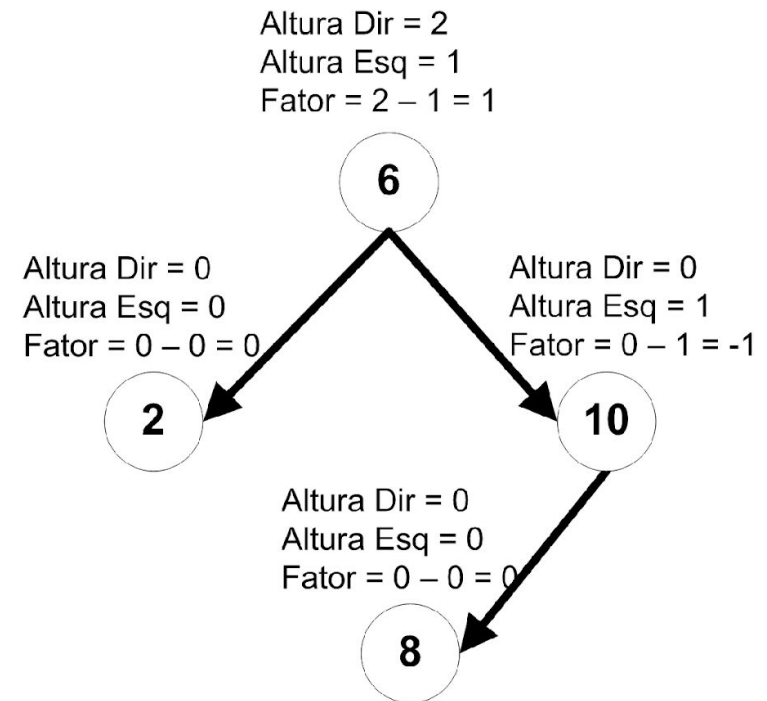
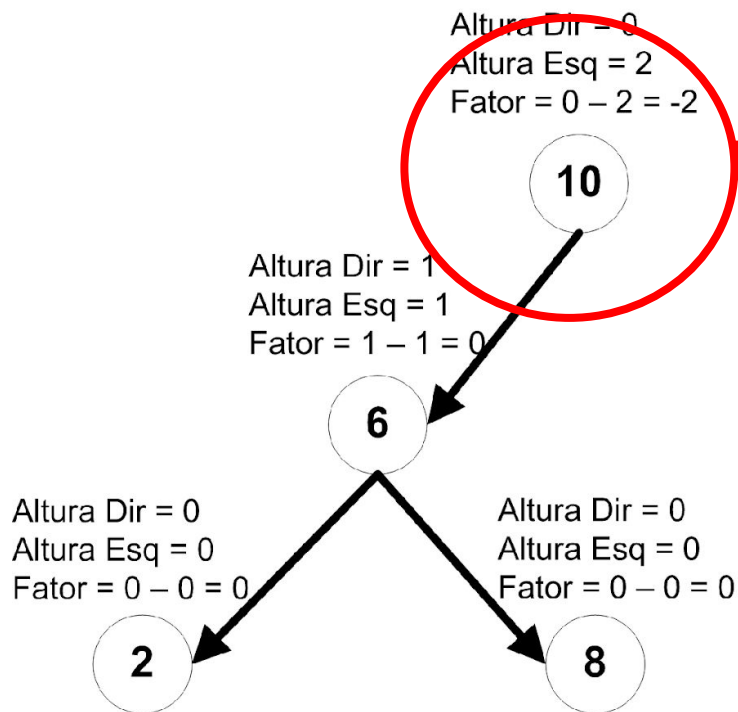
- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à esquerda com fator -1

Rotação simples à direita no nó com fator -2



- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à esquerda com fator -1

Rotação simples à direita no nó com fator -2



Ideia Básica

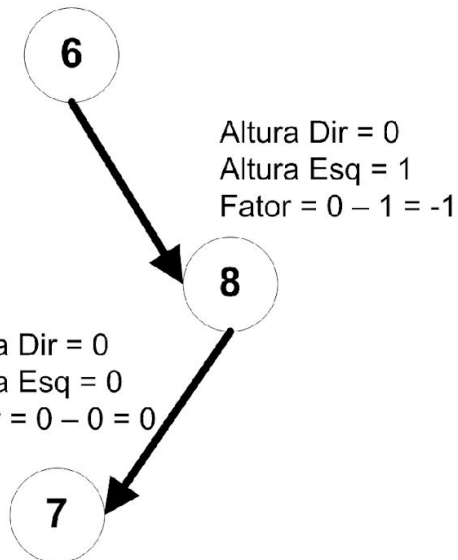
Fator do nó	Fator do filho à direita	Fator do filho à esquerda	Tipo de rotação
2	1 0		Simple à esquerda
	-1		Dupla dir-esq
-2		-1 0	Simple à direita
		1	Dupla esq-dir

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à esquerda com fator

-1

Rotação à direita no nó com fator -1 e à esquerda no com 2

Altura Dir = 2
Altura Esq = 0
Fator = $2 - 0 = 2$

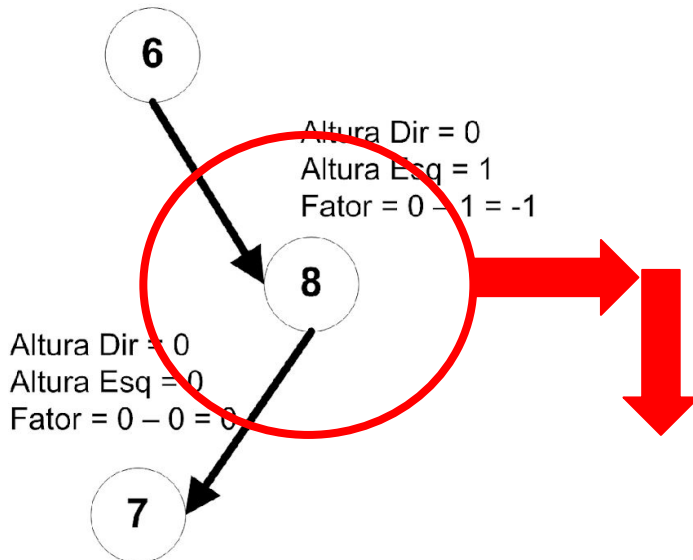


- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à esquerda com fator

-1

Rotação à direita no nó com fator -1 e à esquerda no com 2

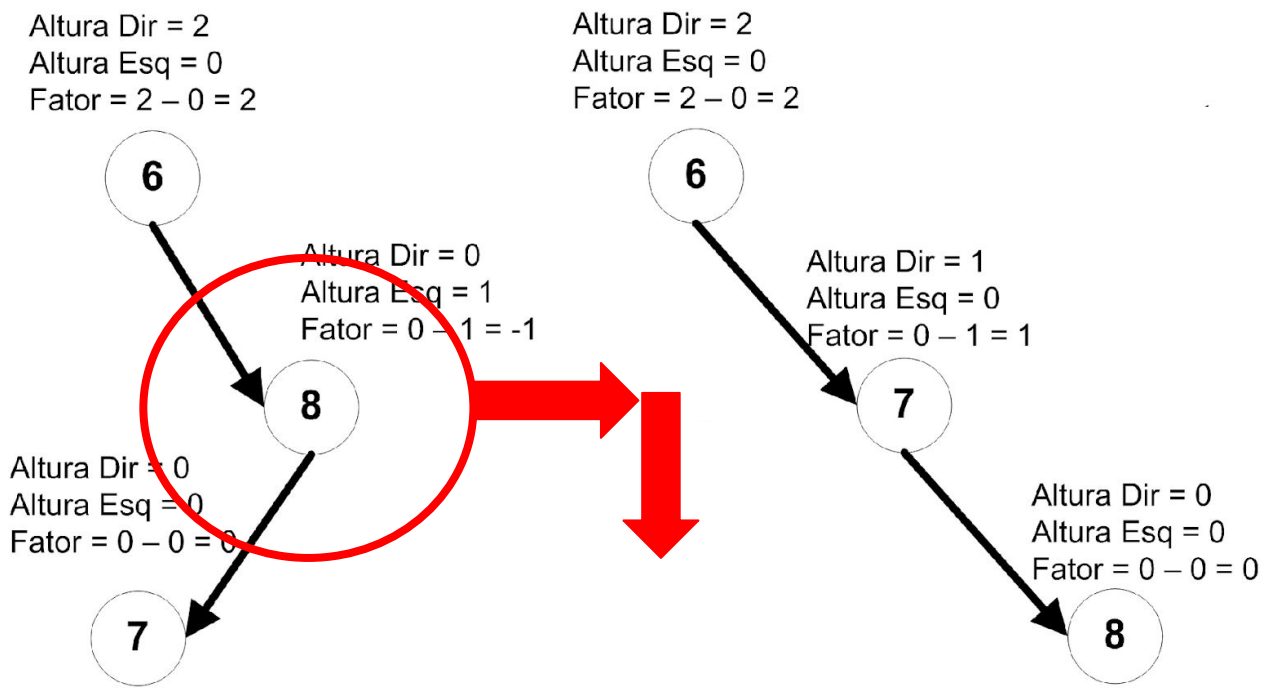
Altura Dir = 2
 Altura Esq = 0
 Fator = 2 - 0 = 2



- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à esquerda com fator

-1

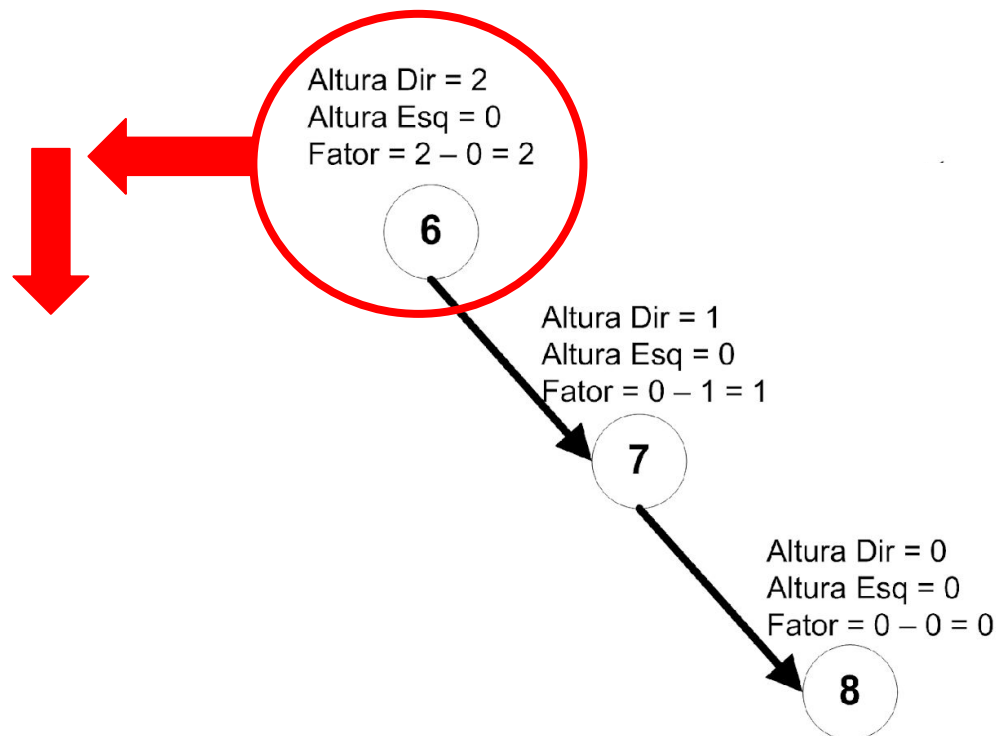
Rotação à direita no nó com fator -1 e à esquerda no com 2



- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à esquerda com fator

-1

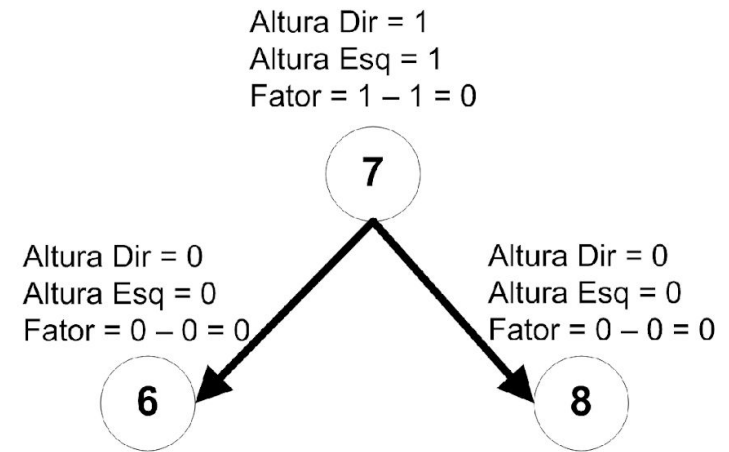
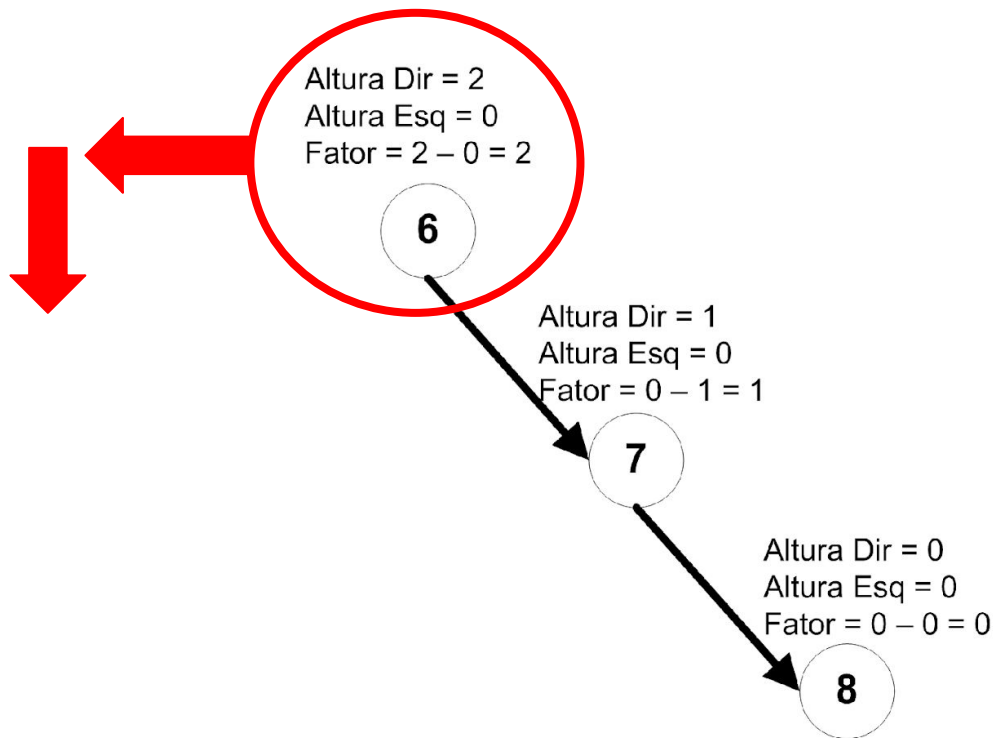
Rotação à direita no nó com fator -1 e à esquerda no com 2



- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à esquerda com fator

-1

Rotação à direita no nó com fator -1 e à esquerda no com 2



Ideia Básica

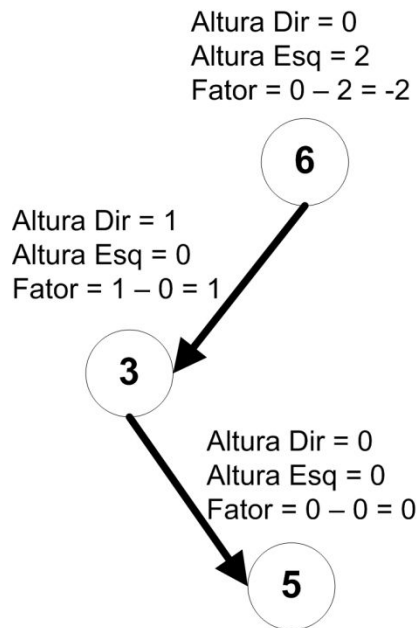
Fator do nó	Fator do filho à direita	Fator do filho à esquerda	Tipo de rotação
2	1		Simple à esquerda
	0		Dupla dir-esq
-2		-1	Simple à direita
		0	Dupla esq-dir
	-1		
	1		

Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à direita com fator

1

Rotação à esquerda no nó com fator 1 e à direita no com -2

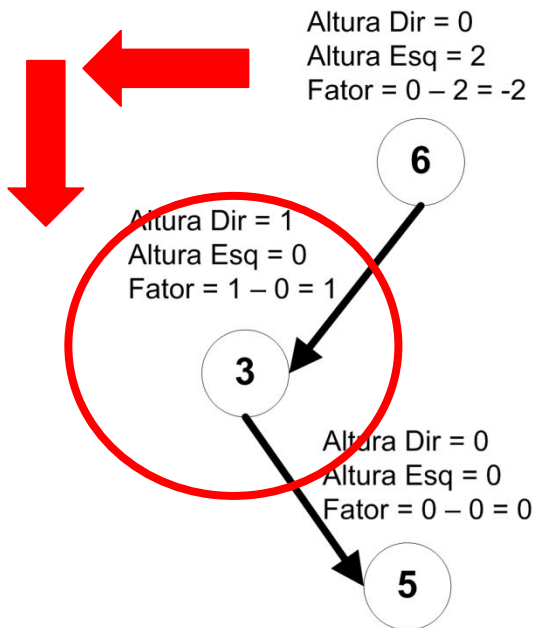


Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à direita com fator

1

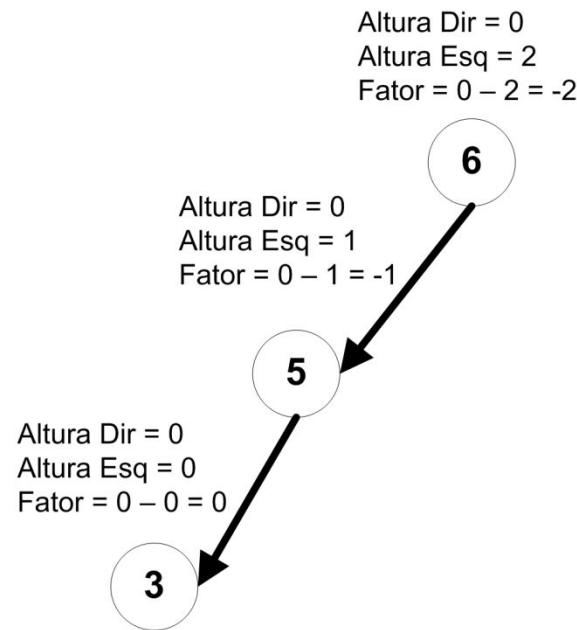
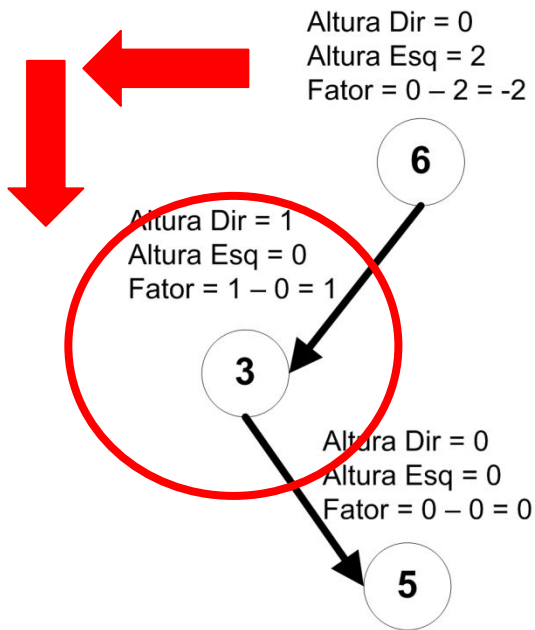
Rotação à esquerda no nó com fator 1 e à direita no com -2



- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à direita com fator 1

1

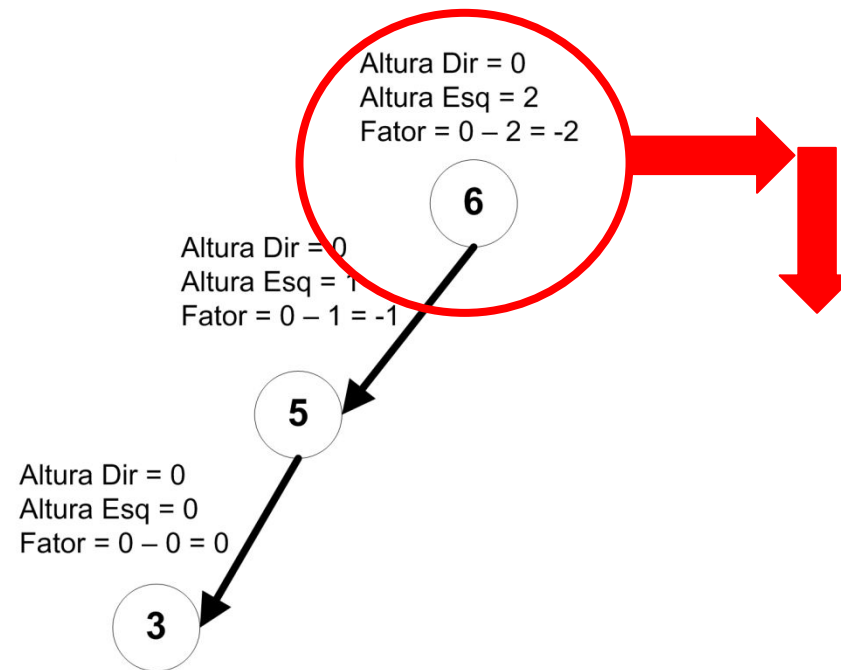
Rotação à esquerda no nó com fator 1 e à direita no com -2



- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à direita com fator

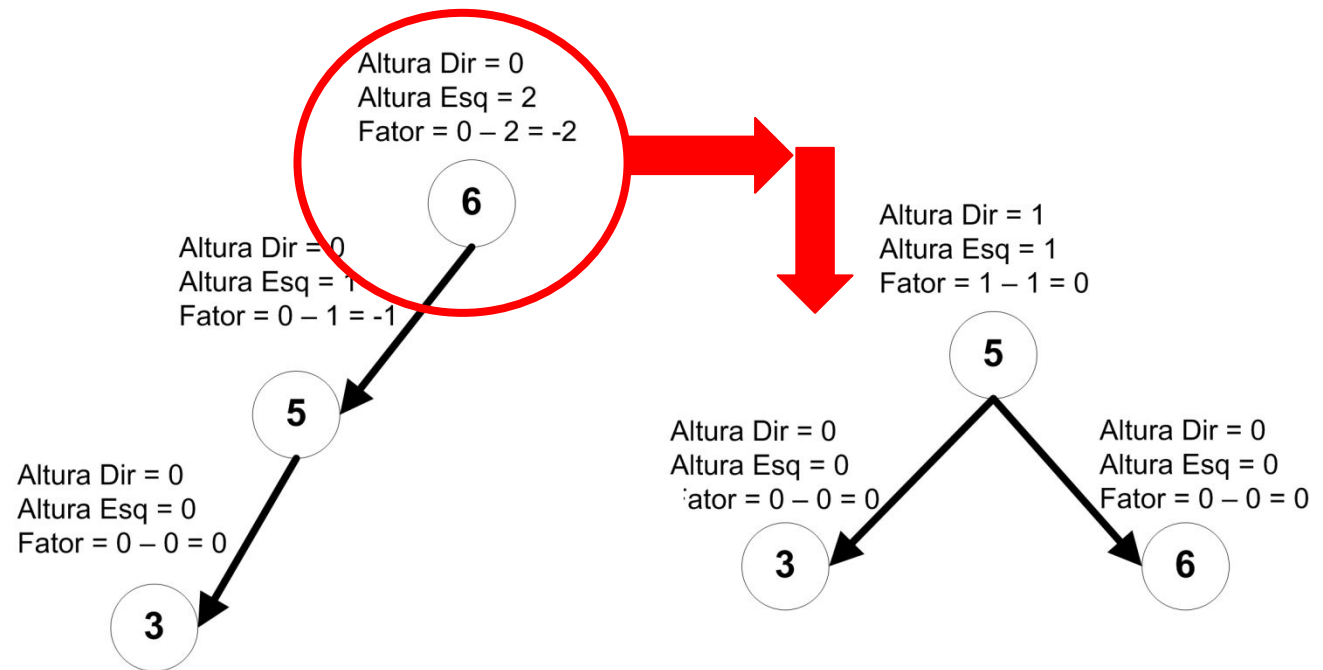
1

Rotação à esquerda no nó com fator 1 e à direita no com -2



- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à direita com fator 1

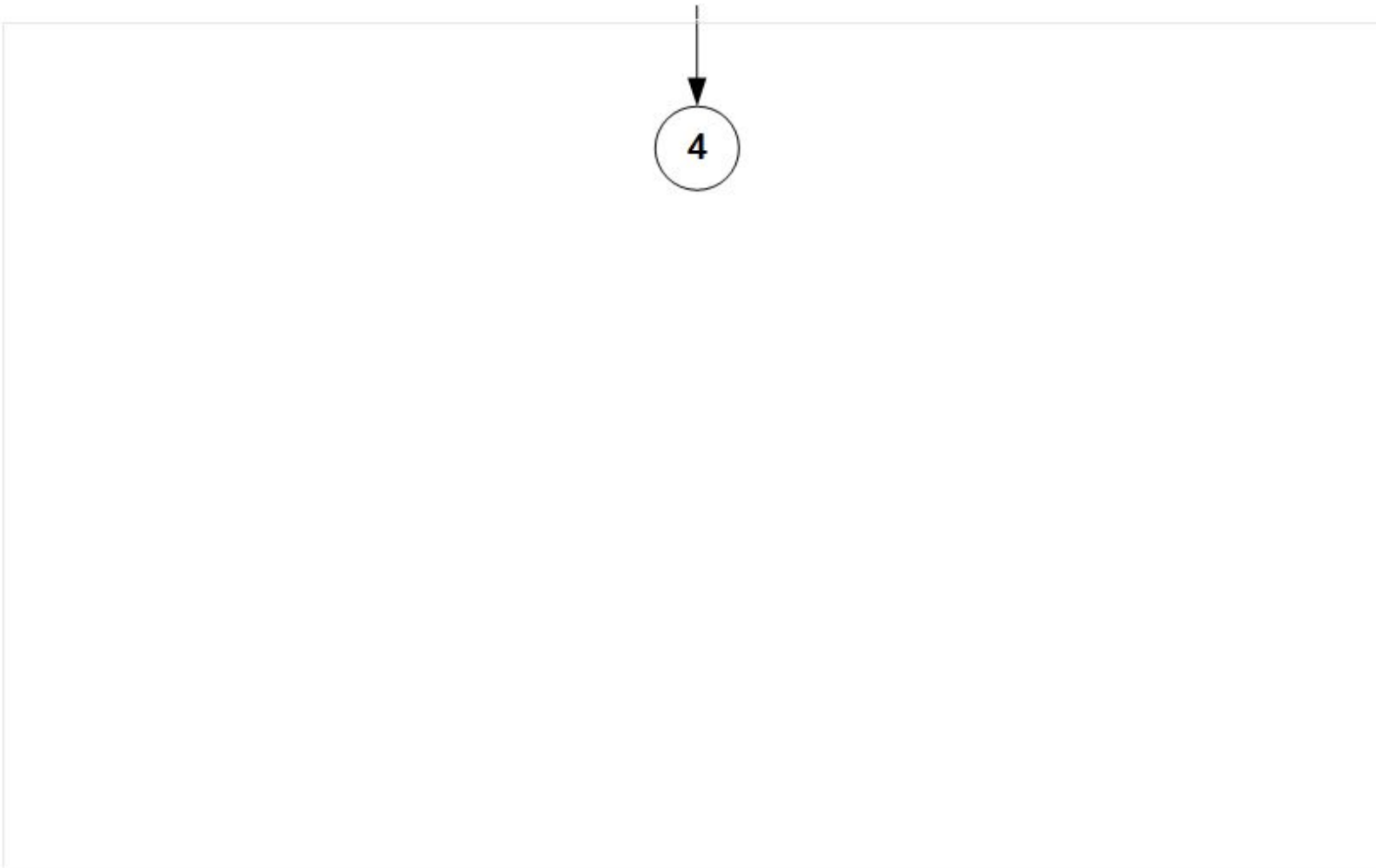
Rotação à esquerda no nó com fator 1 e à direita no com -2



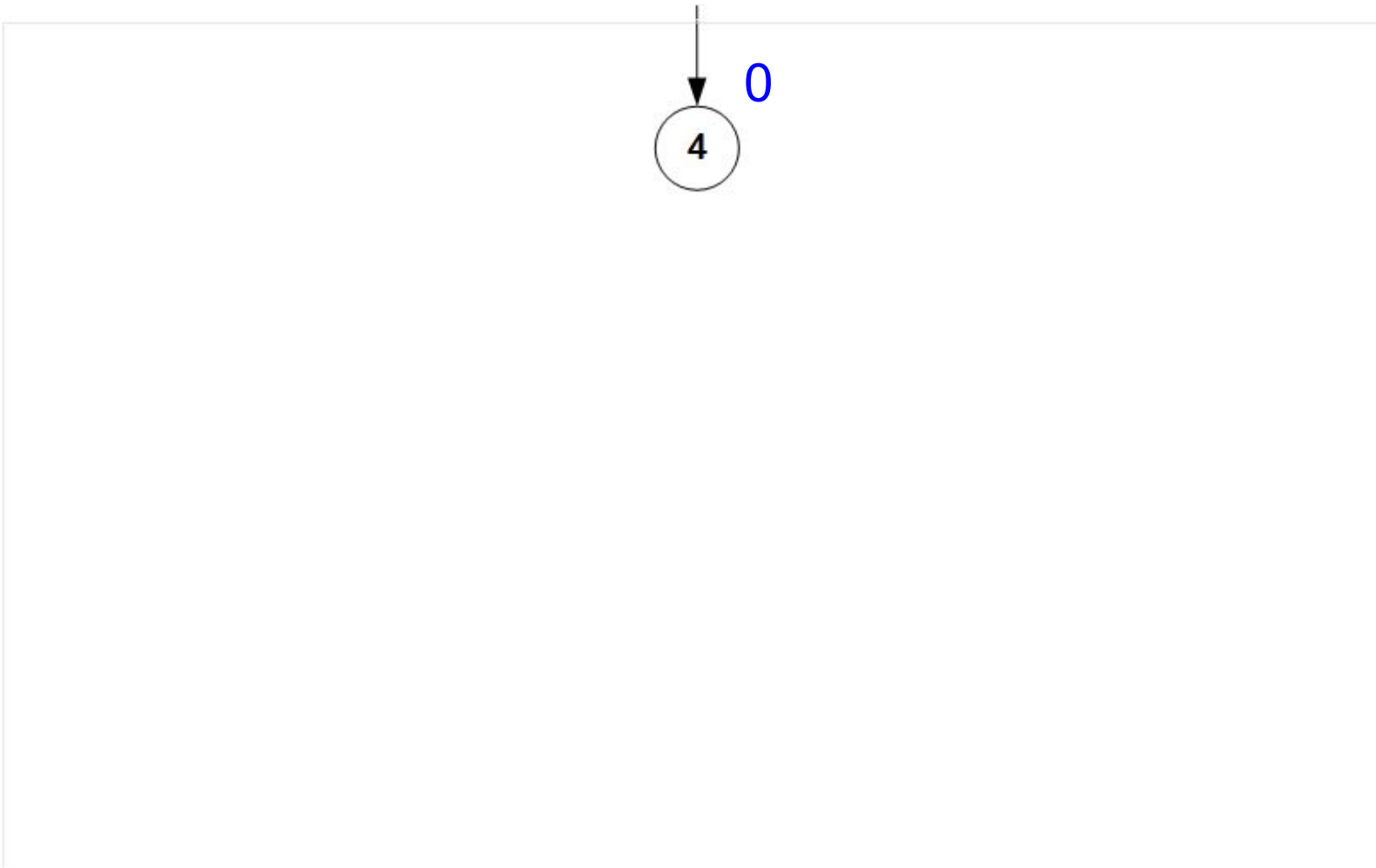
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente

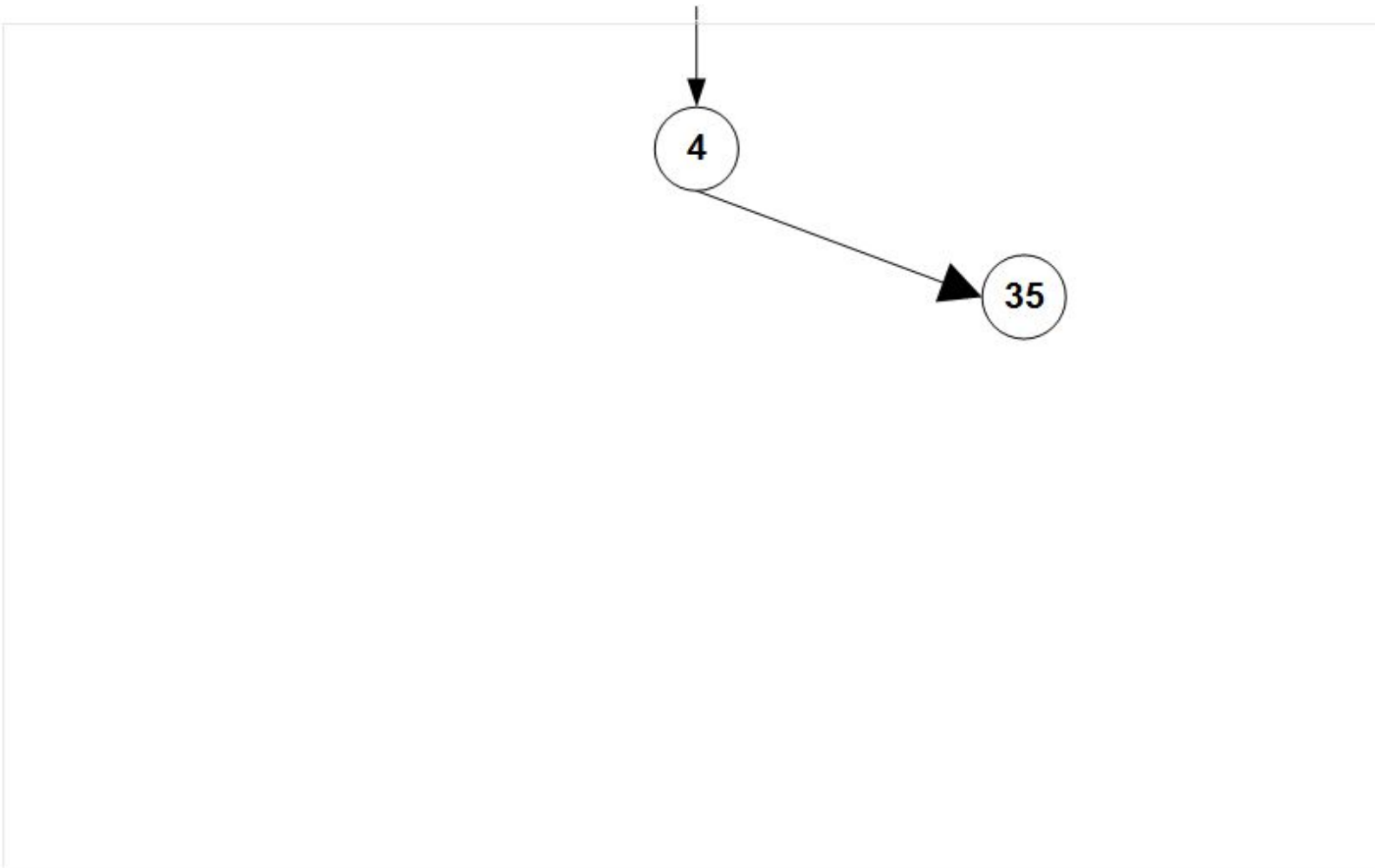
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



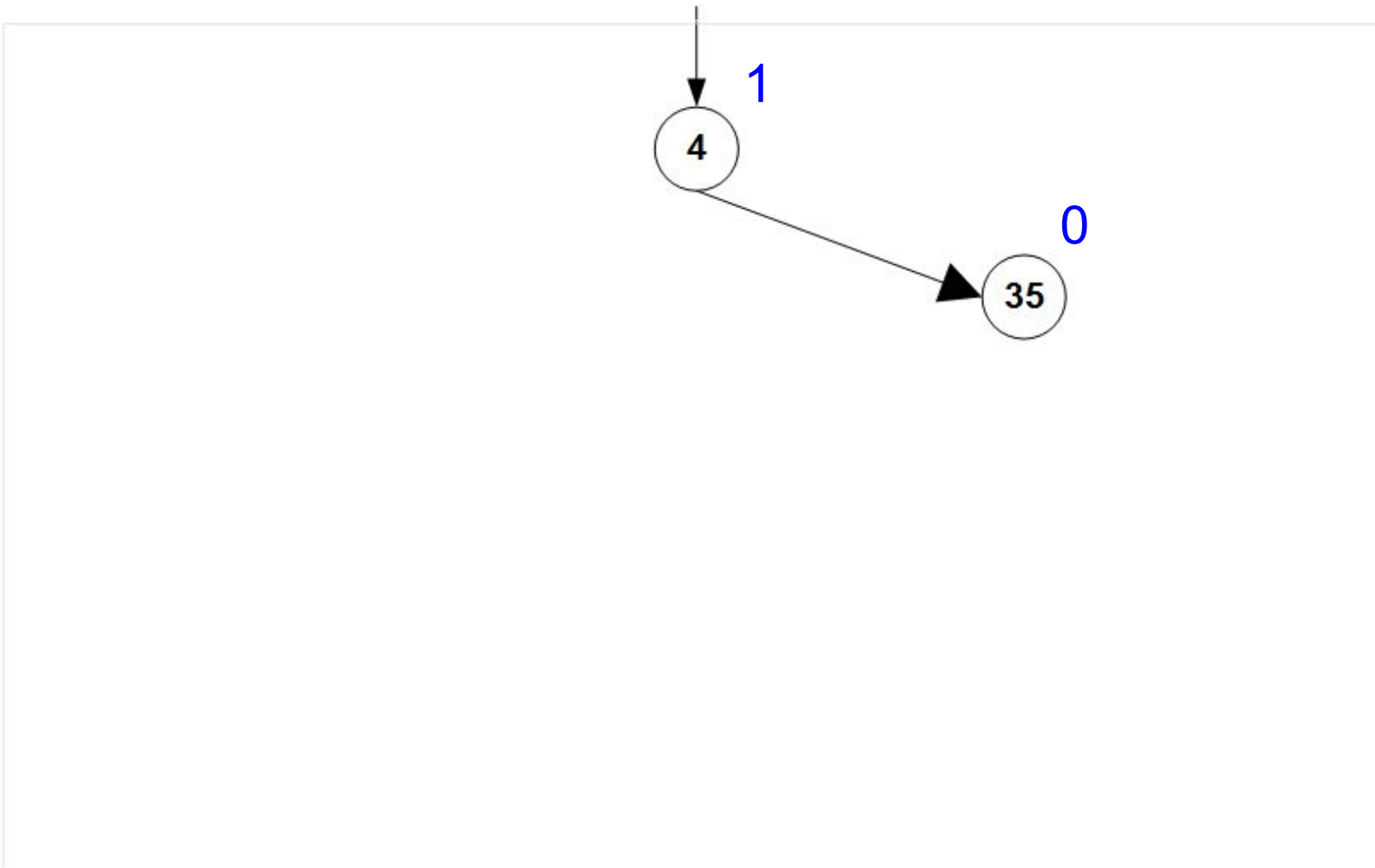
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



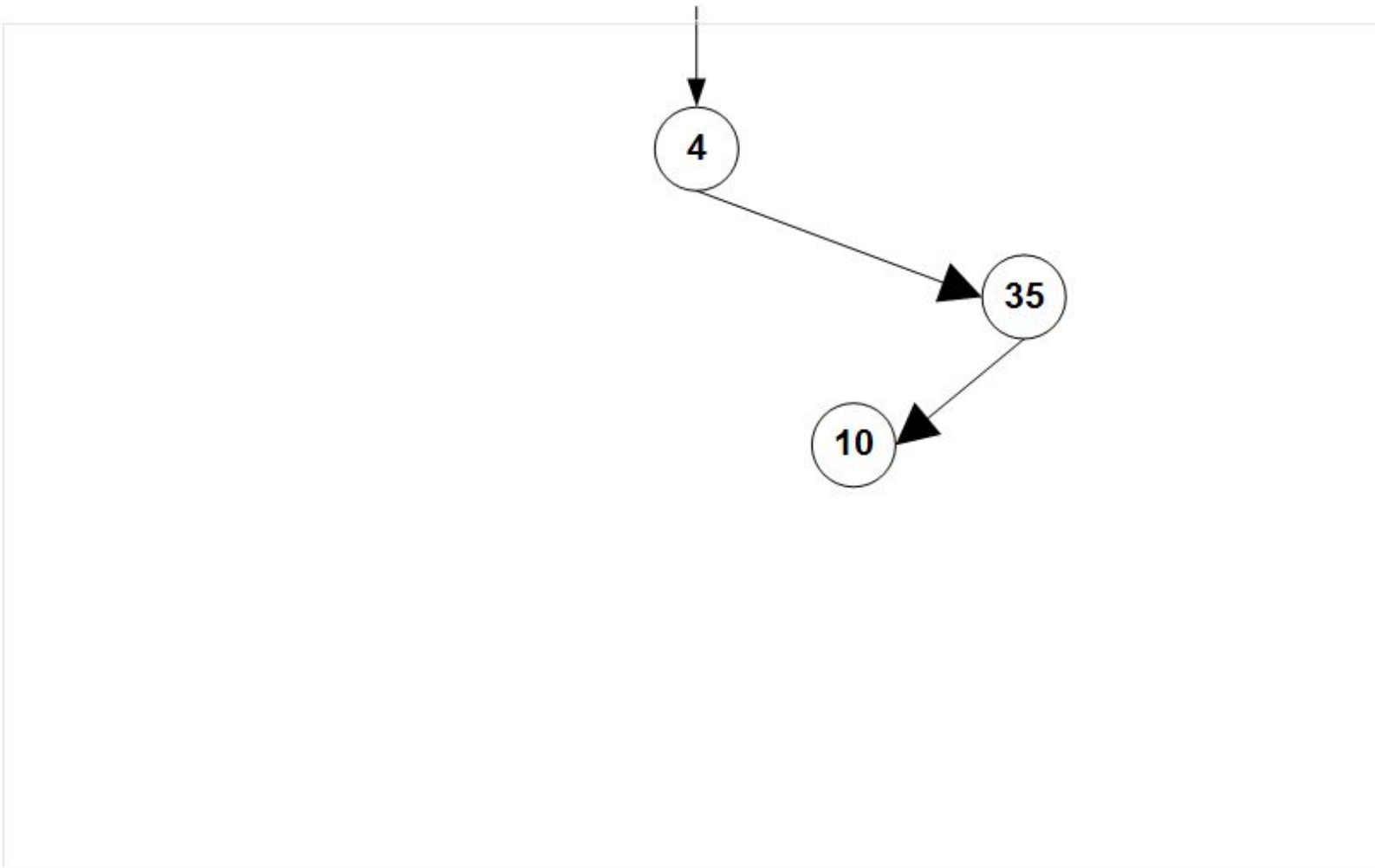
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



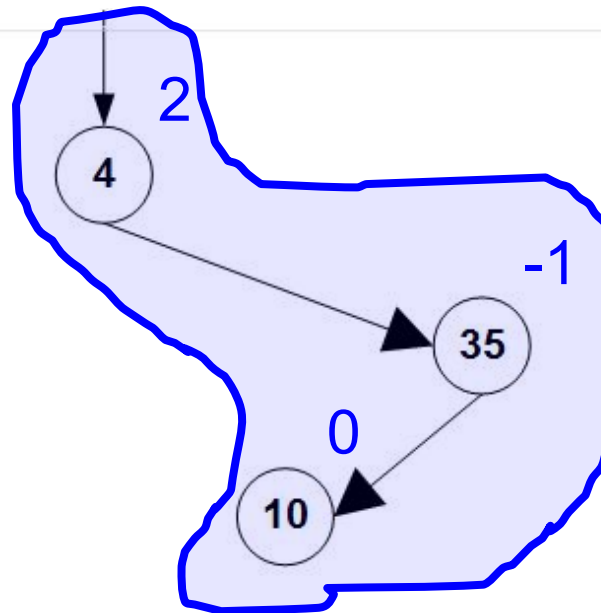
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente

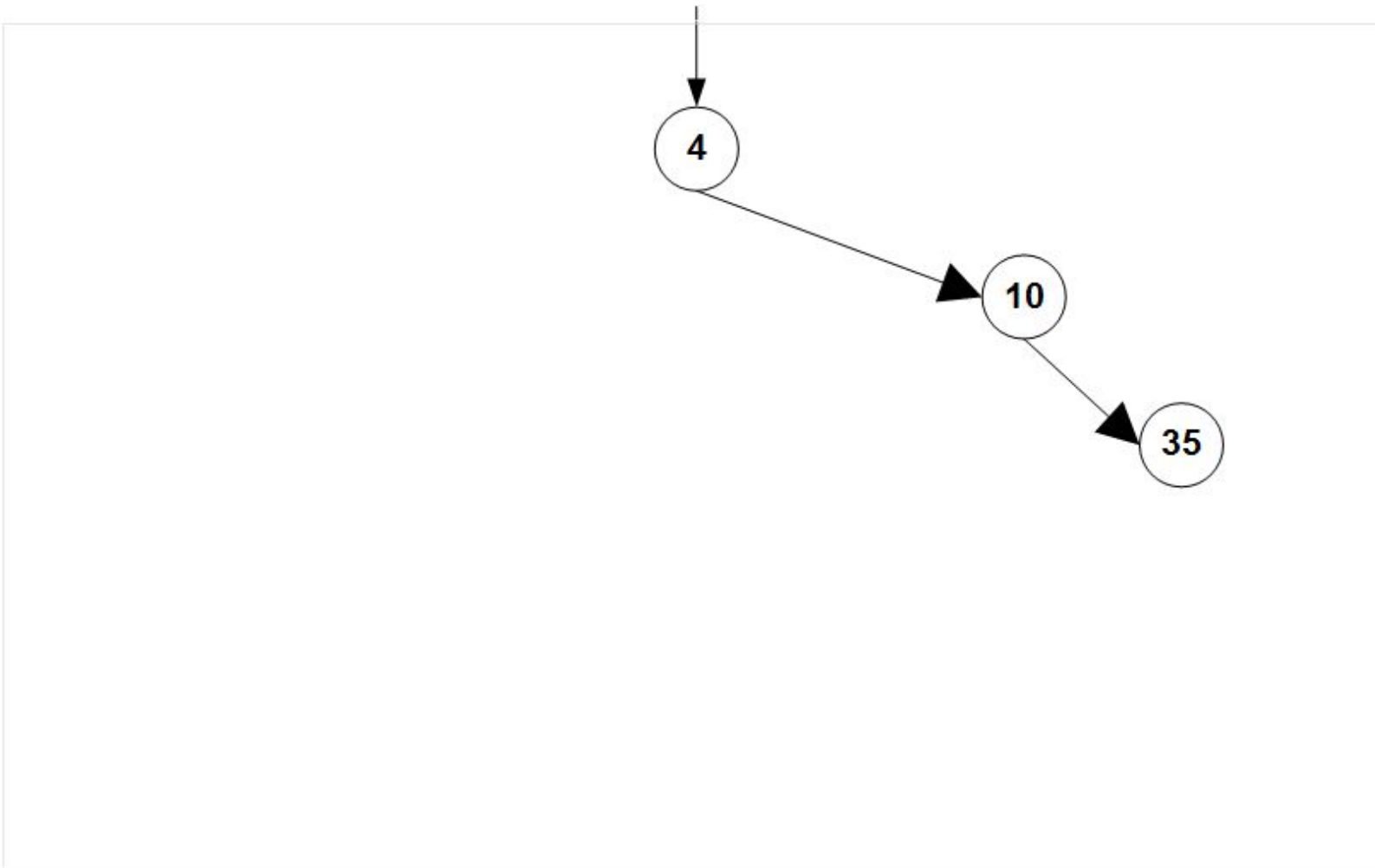


- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente rotação Dir (35) Esq (4)

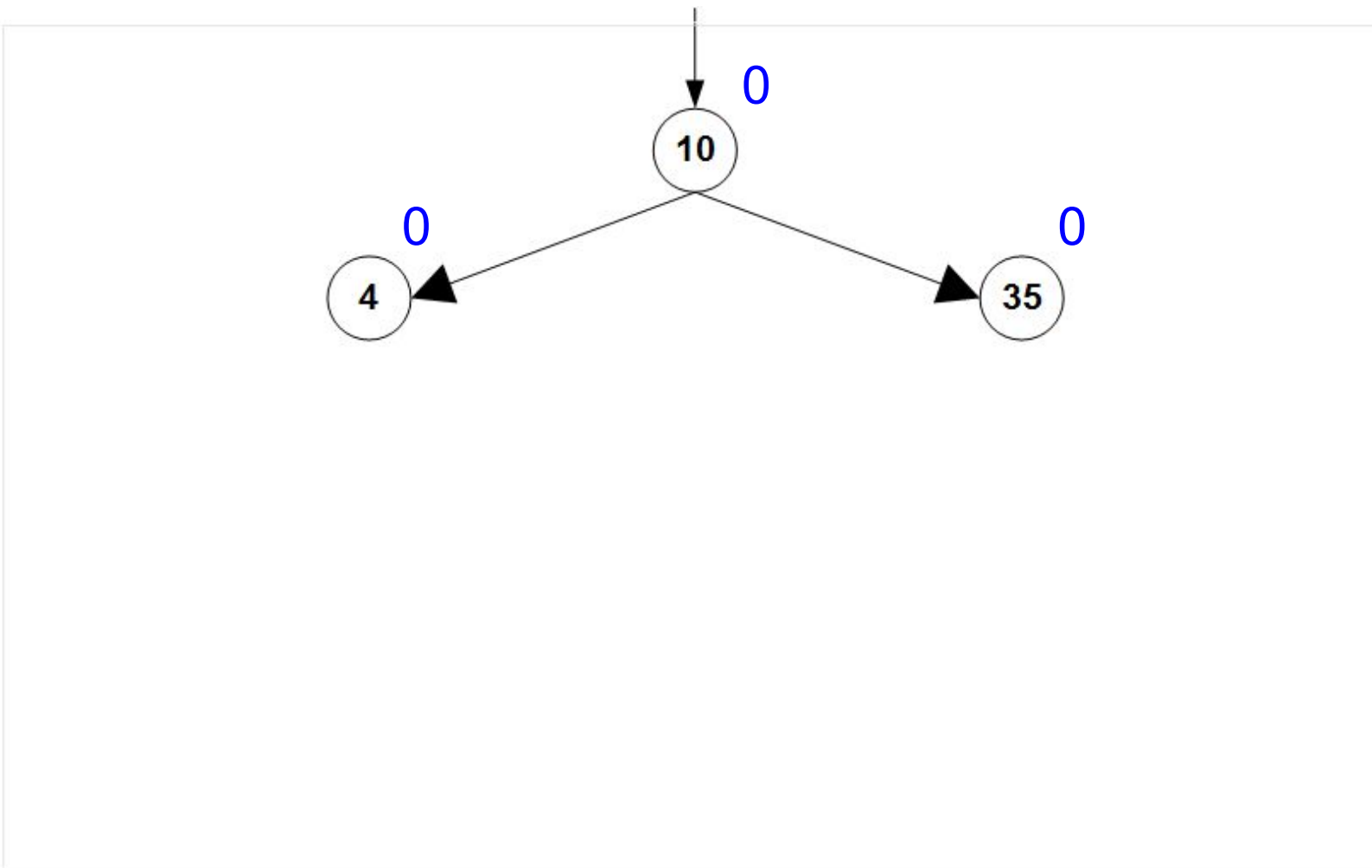


Como o fator(4) = 2 e seu filho à direita -1, faremos uma rotação DirEsq

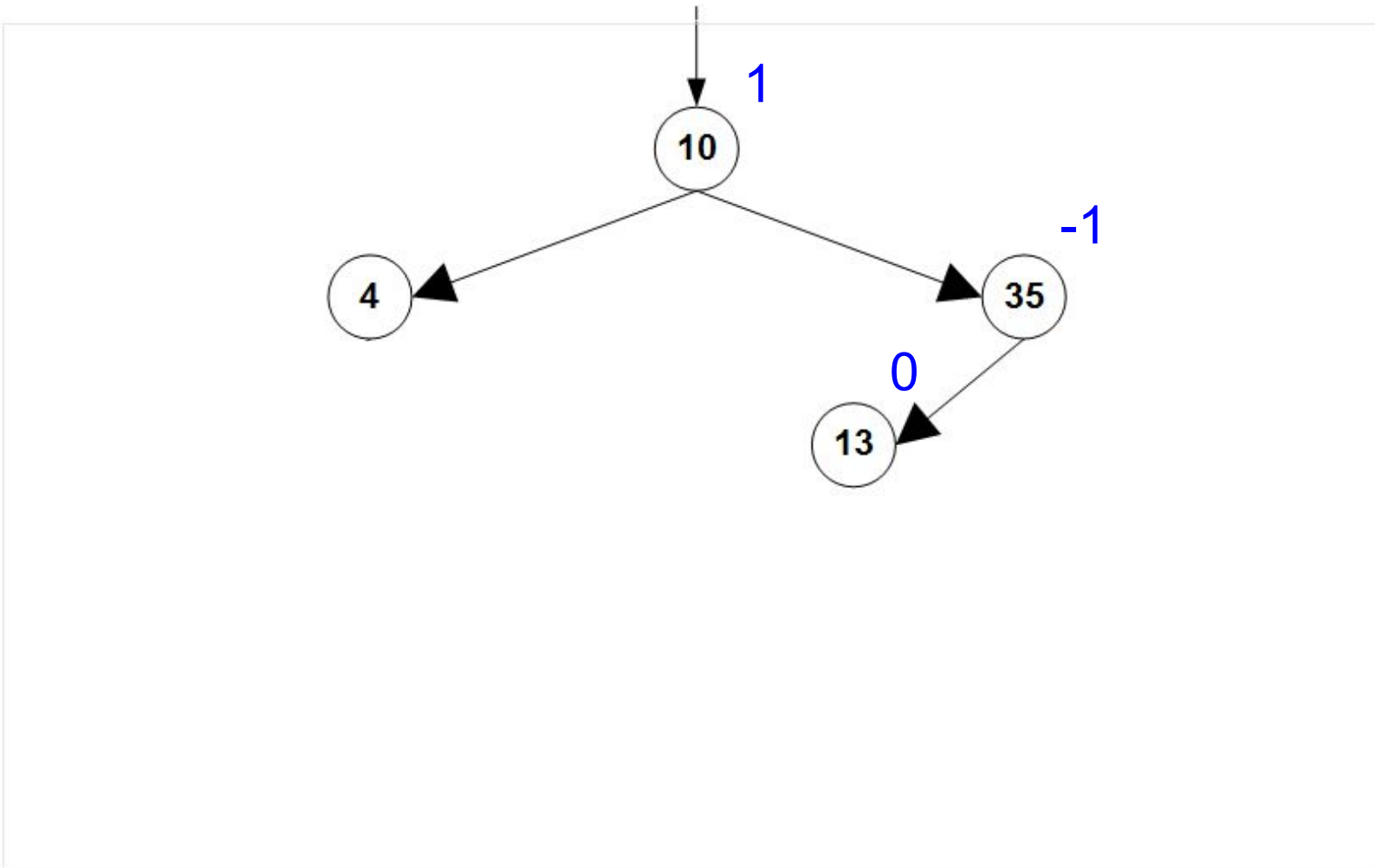
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente rotação Dir (35) Esq (4)



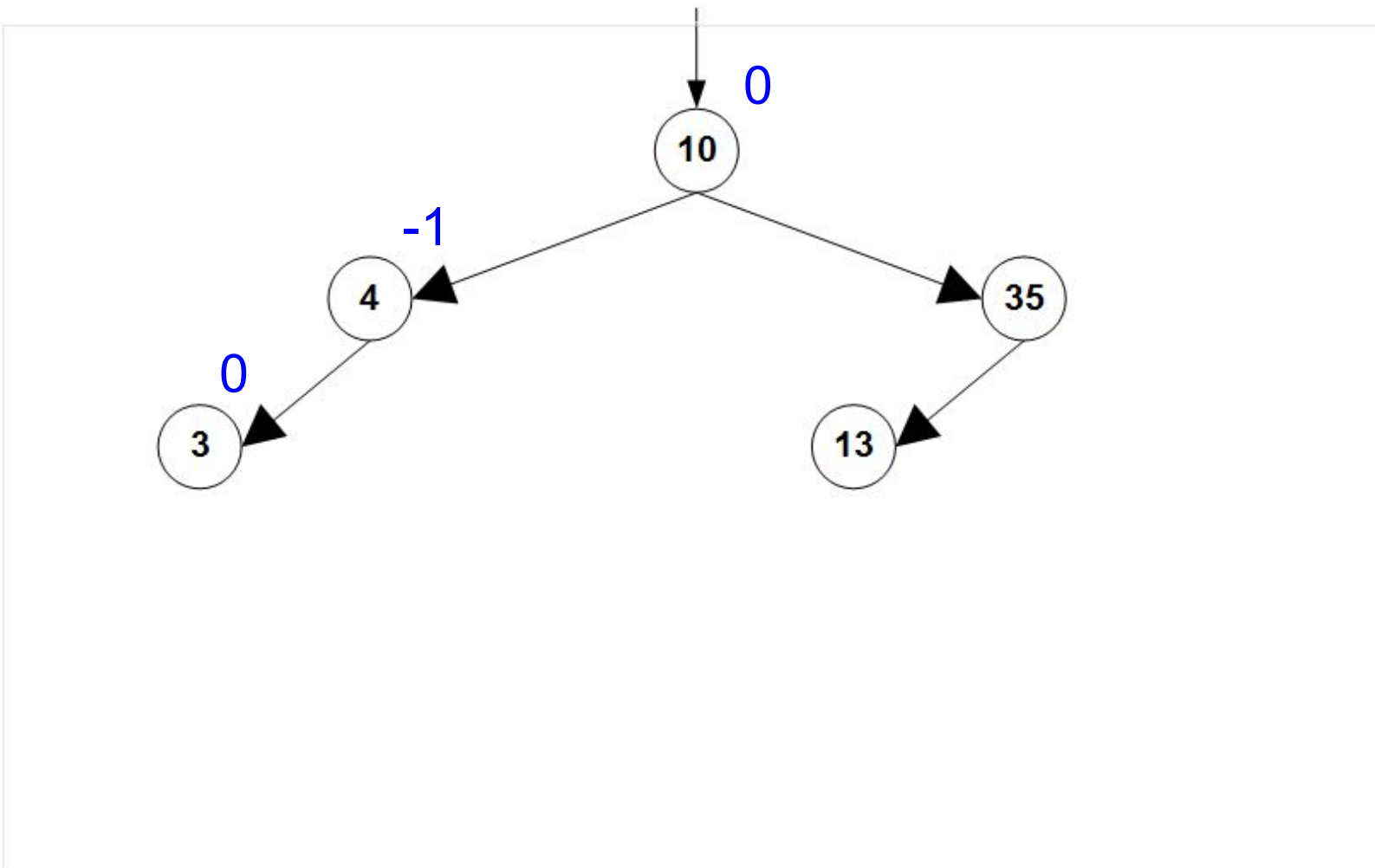
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente rotação Dir (35) Esq (4)



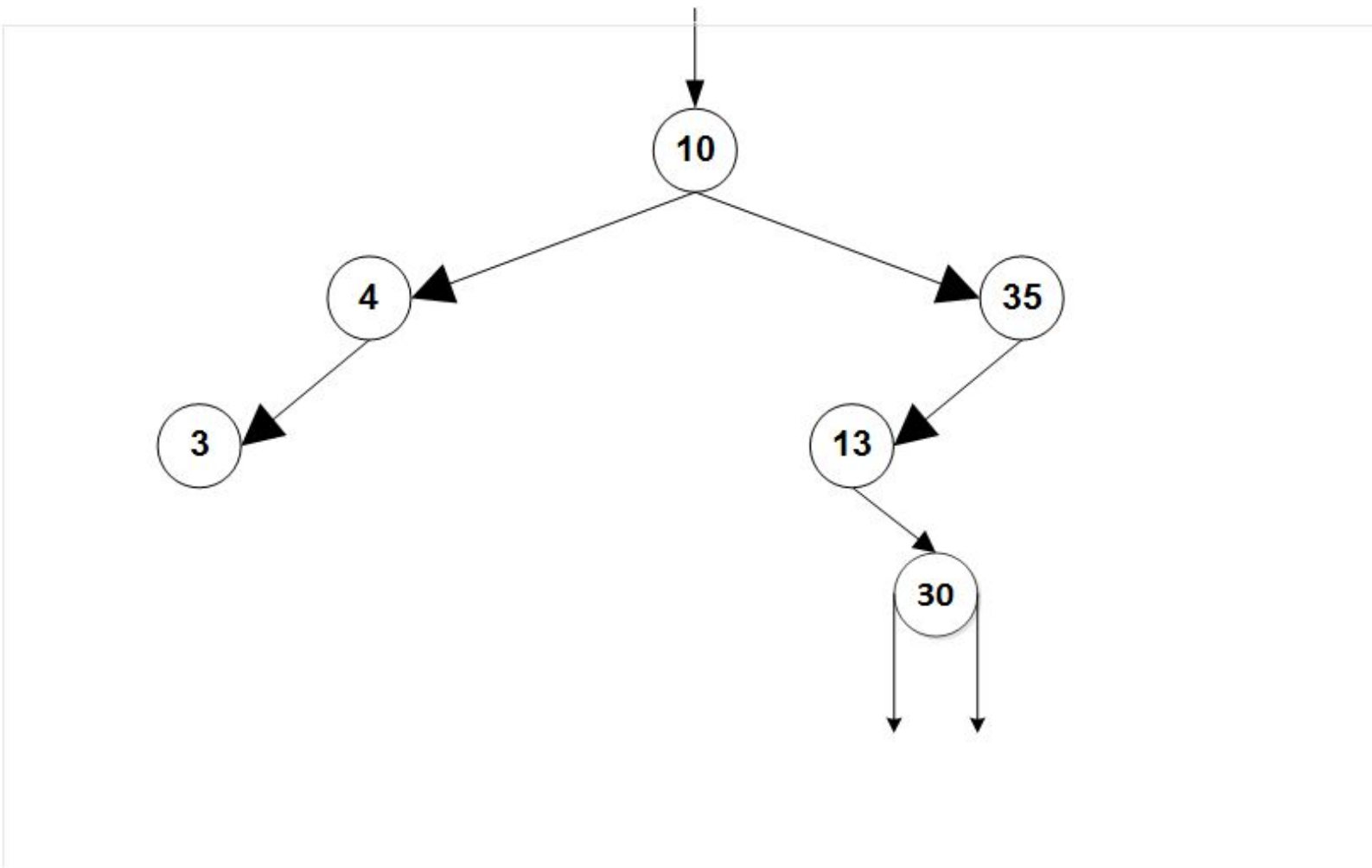
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



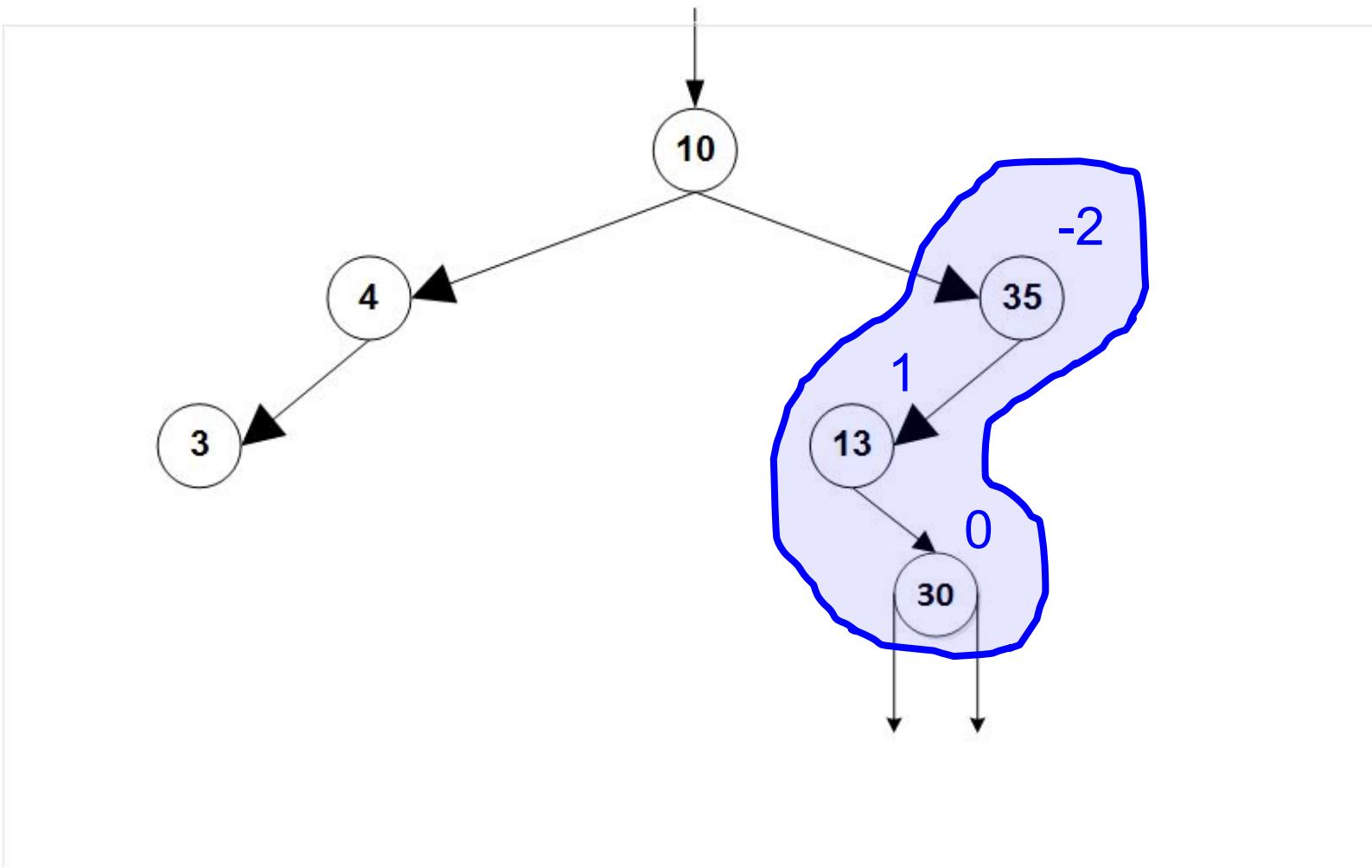
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, **15**, **12**, **7**, **40** e **20** respectivamente



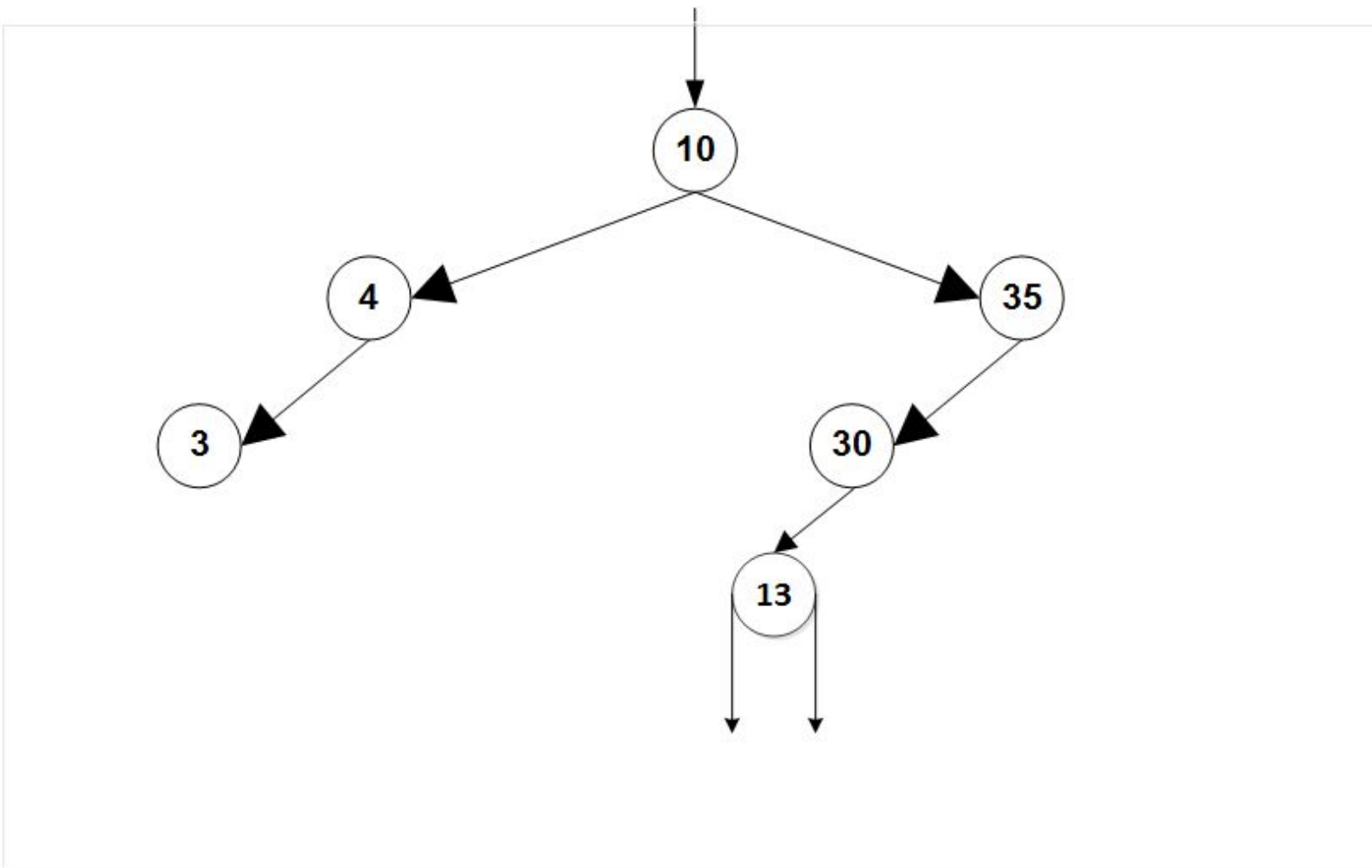
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



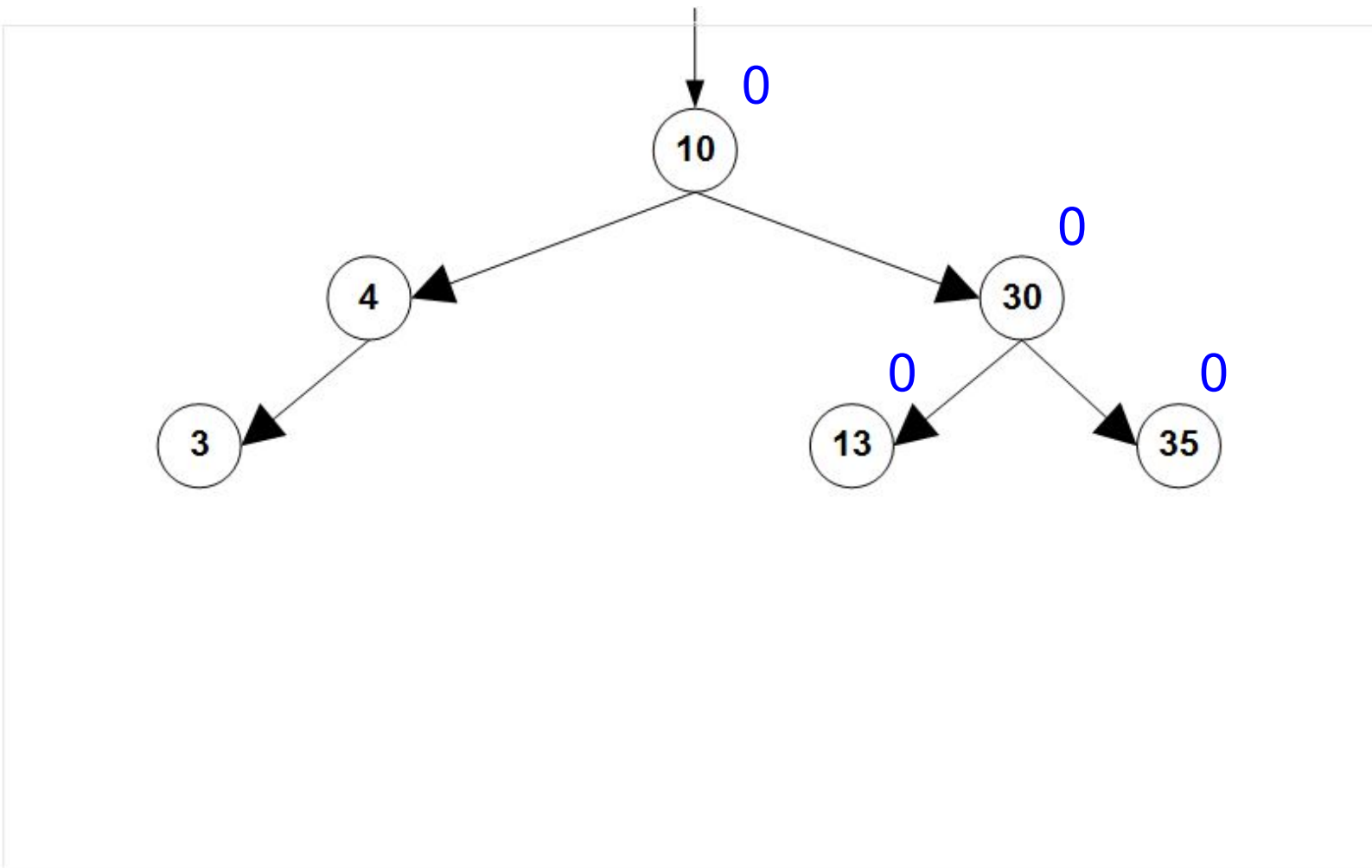
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente rotação Esq (13) Dir (35)



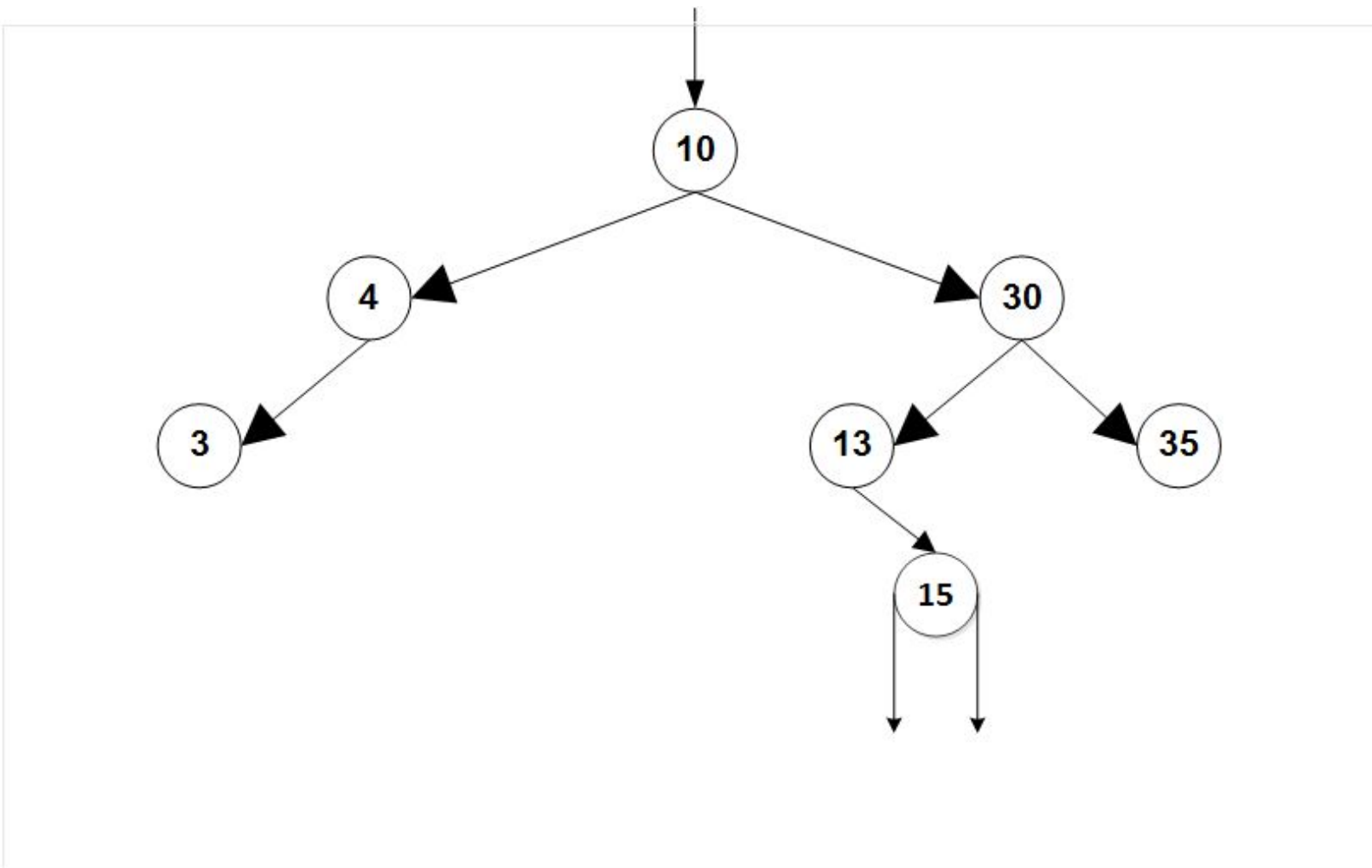
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente rotação Esq (13) Dir (35)



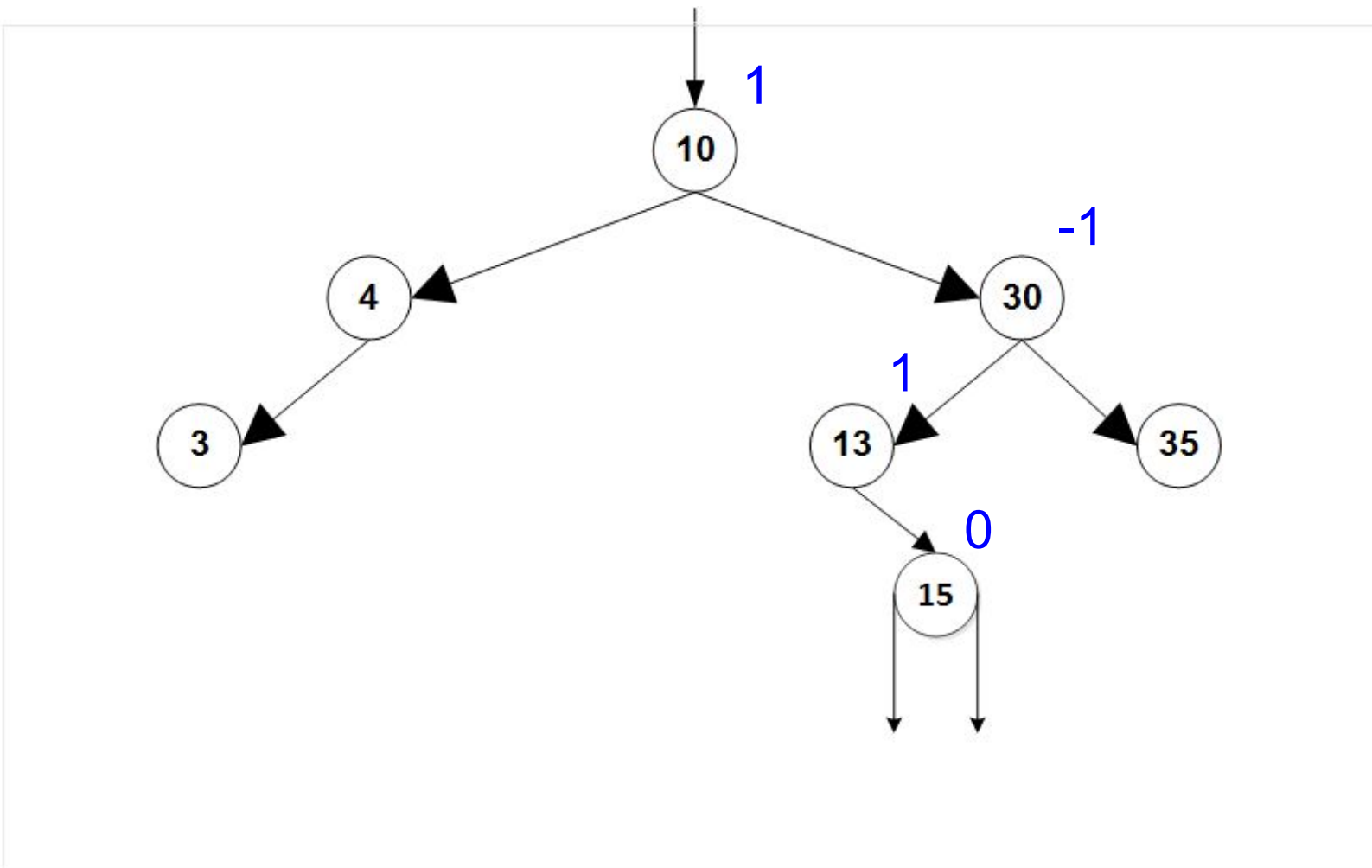
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente rotação Esq (13) Dir (35)



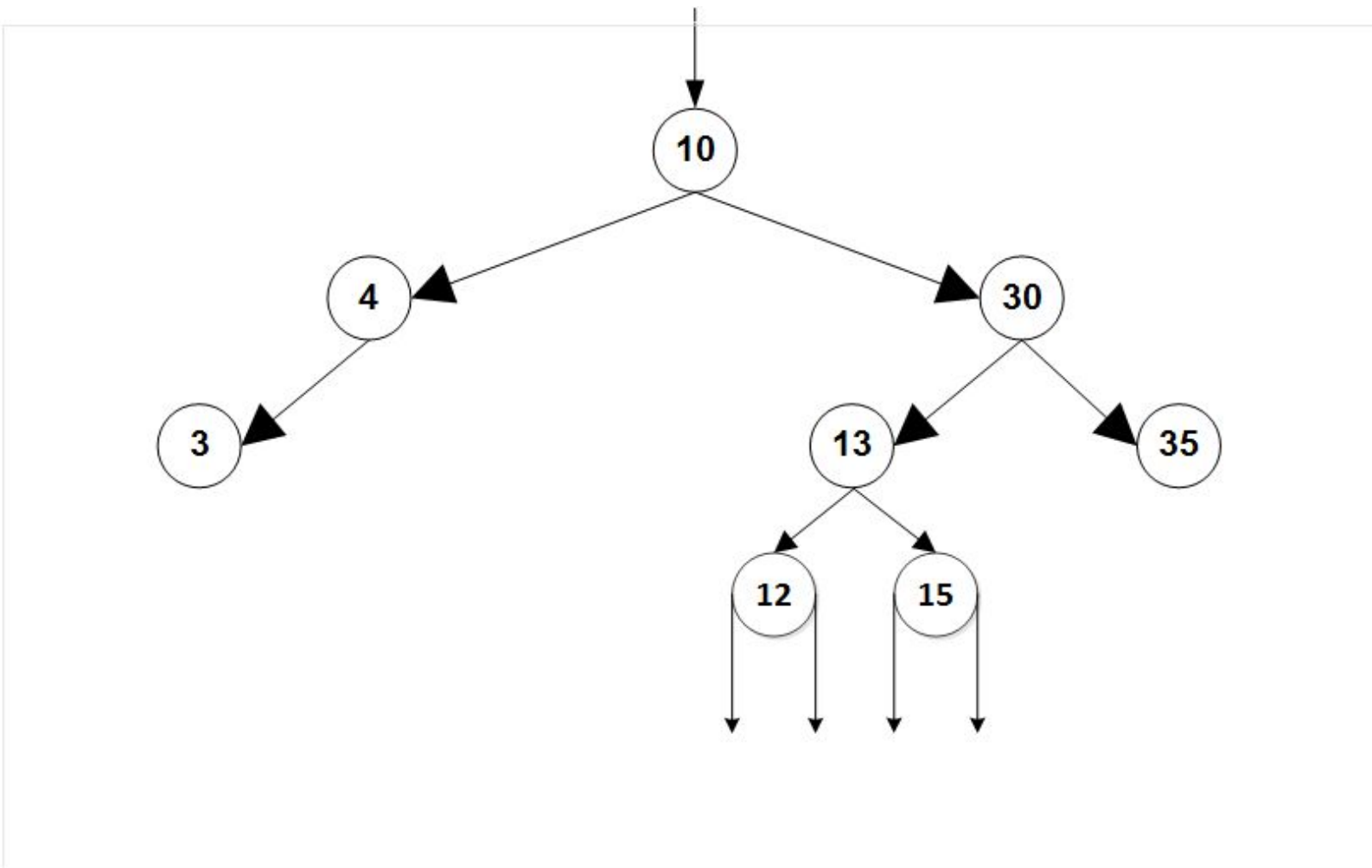
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, **15**, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



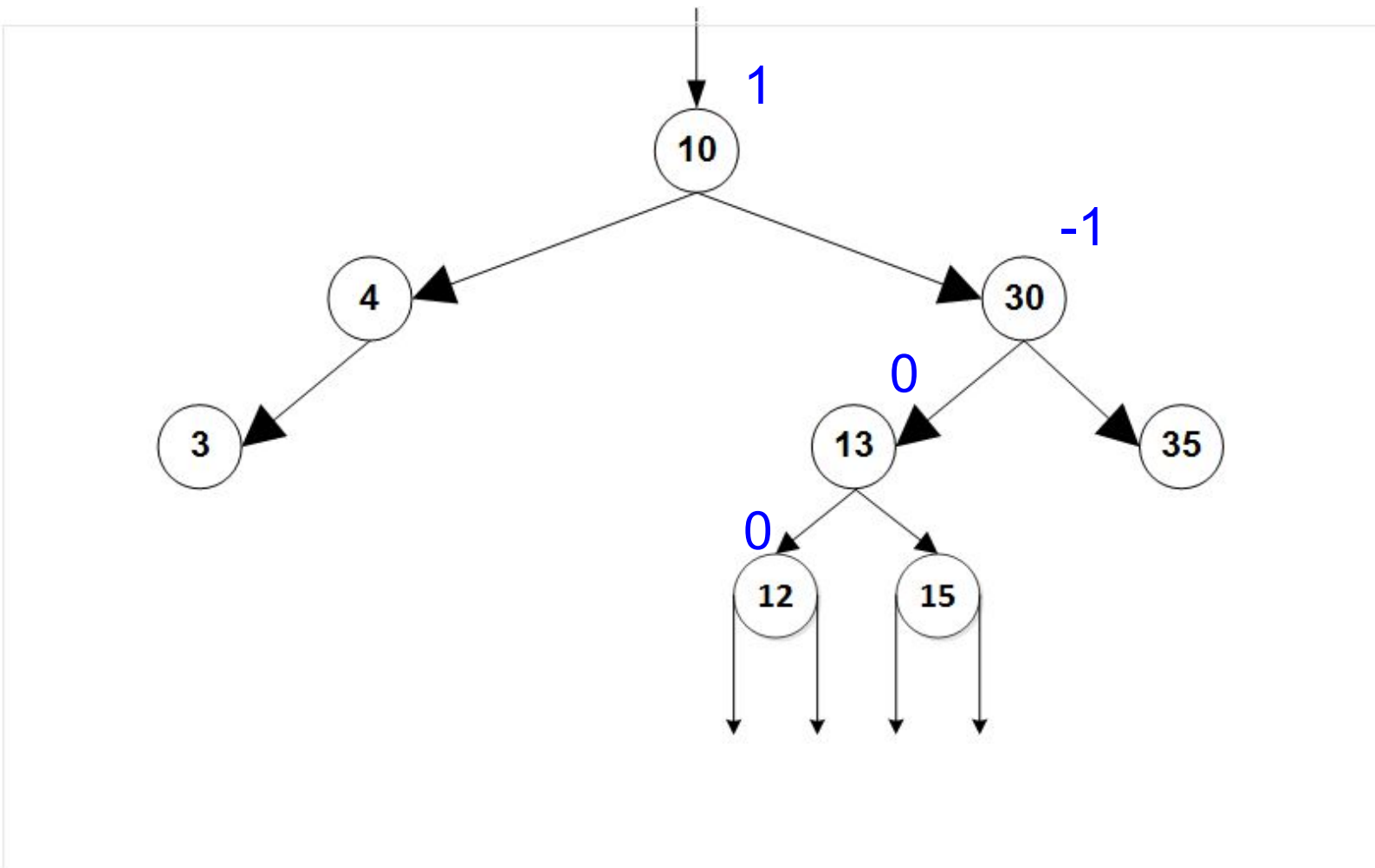
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, **15**, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



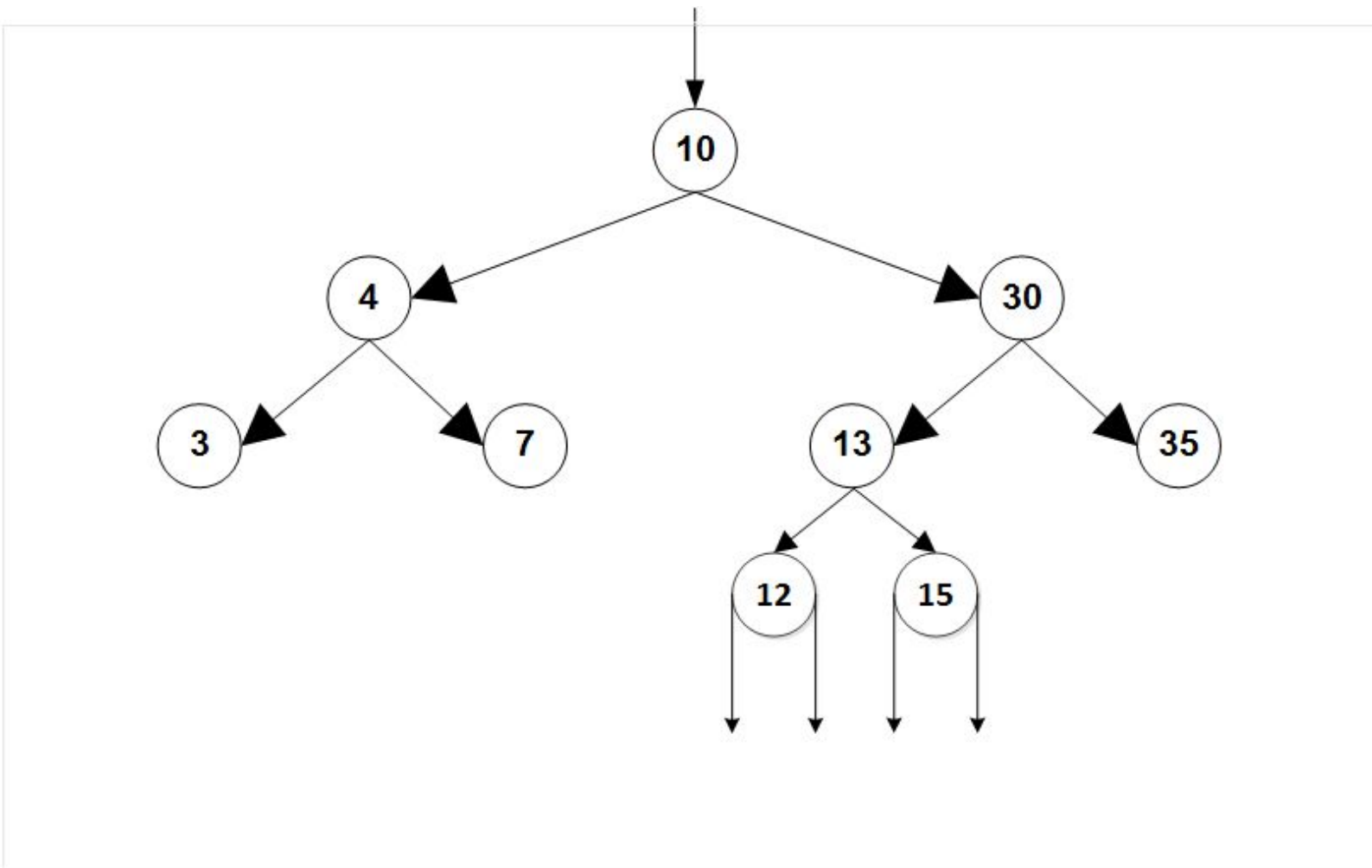
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, **15**, **12**, 7, 40 e 20 respectivamente



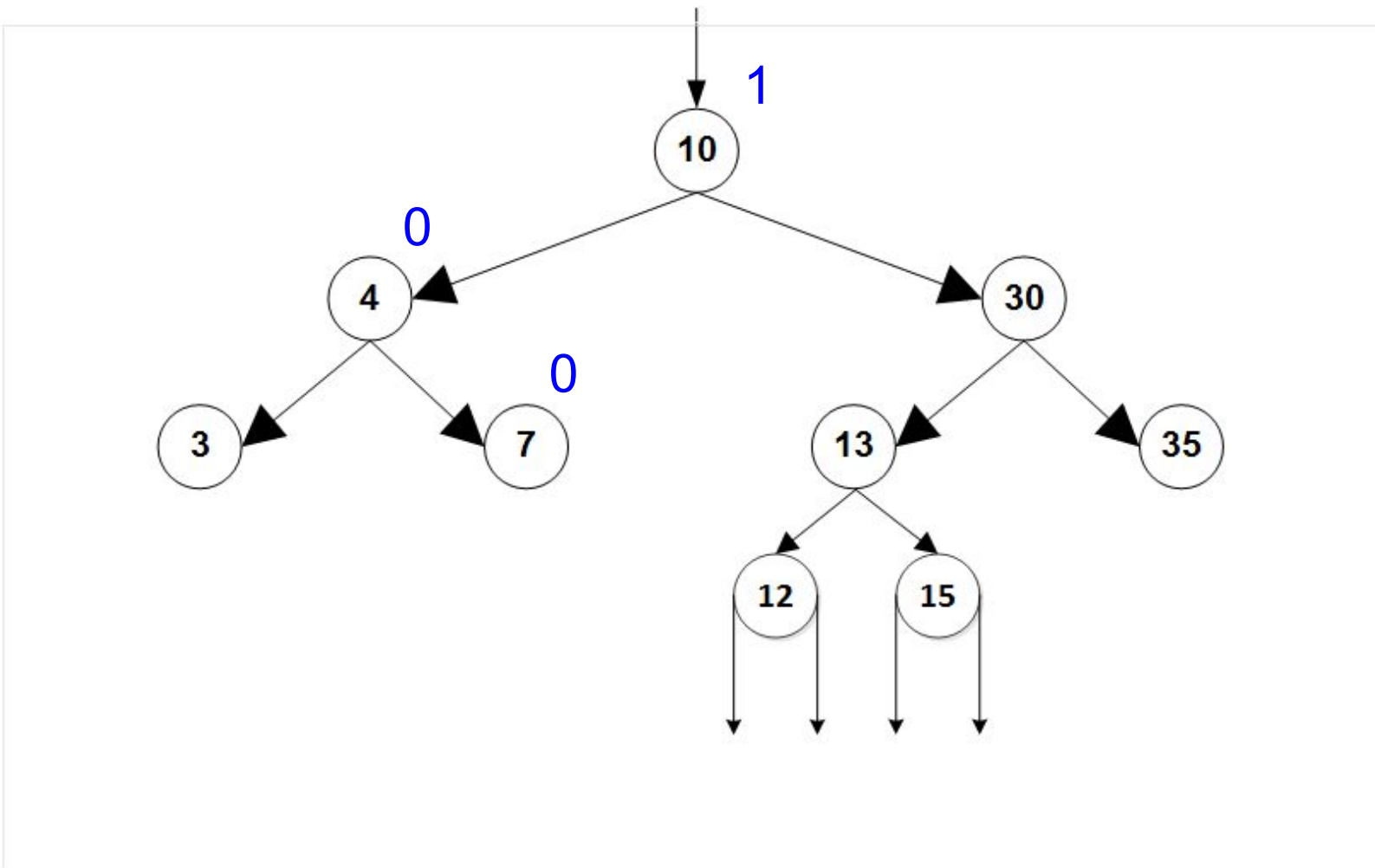
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, **15**, **12**, 7, 40 e 20 respectivamente



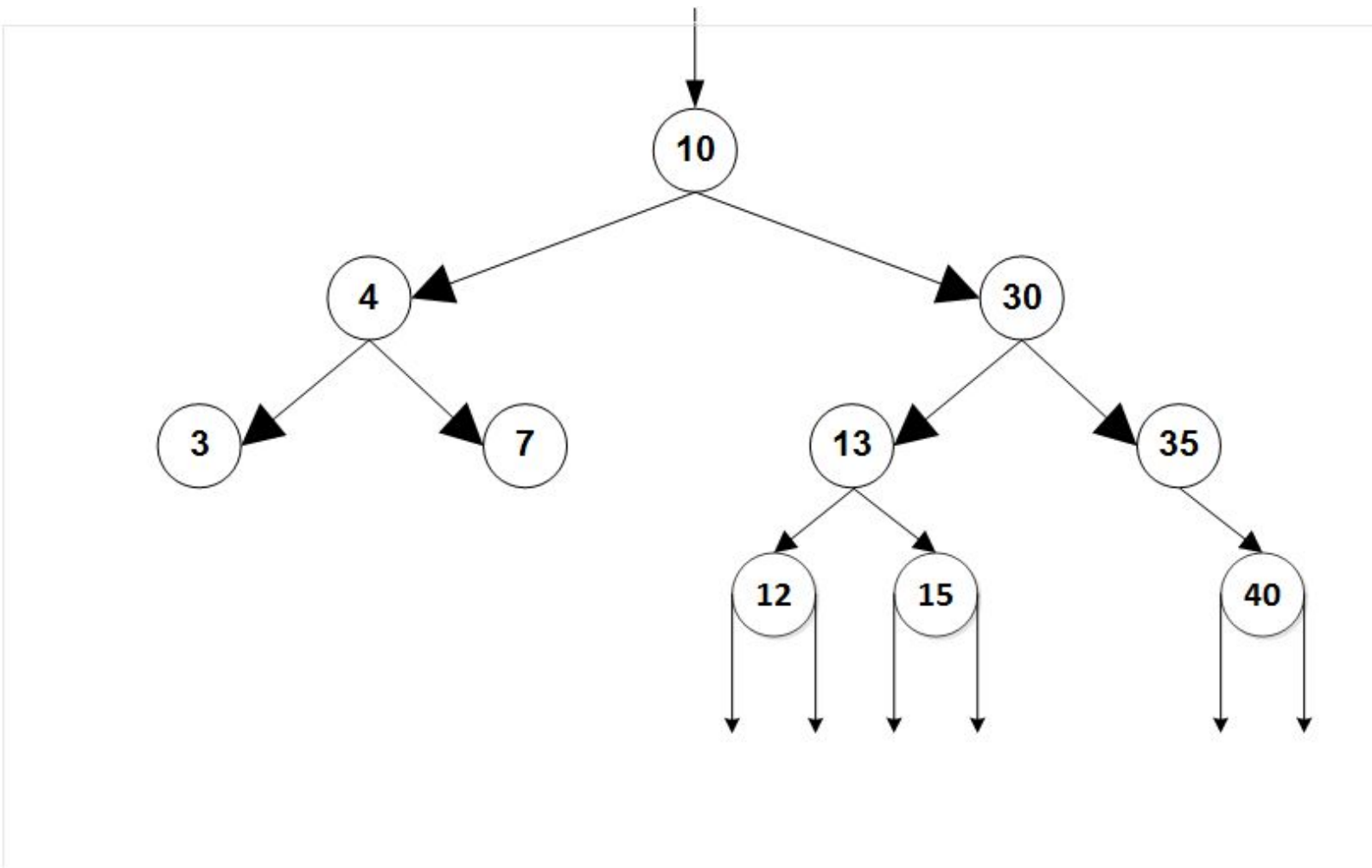
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, **15**, **12**, **7**, 40 e 20 respectivamente



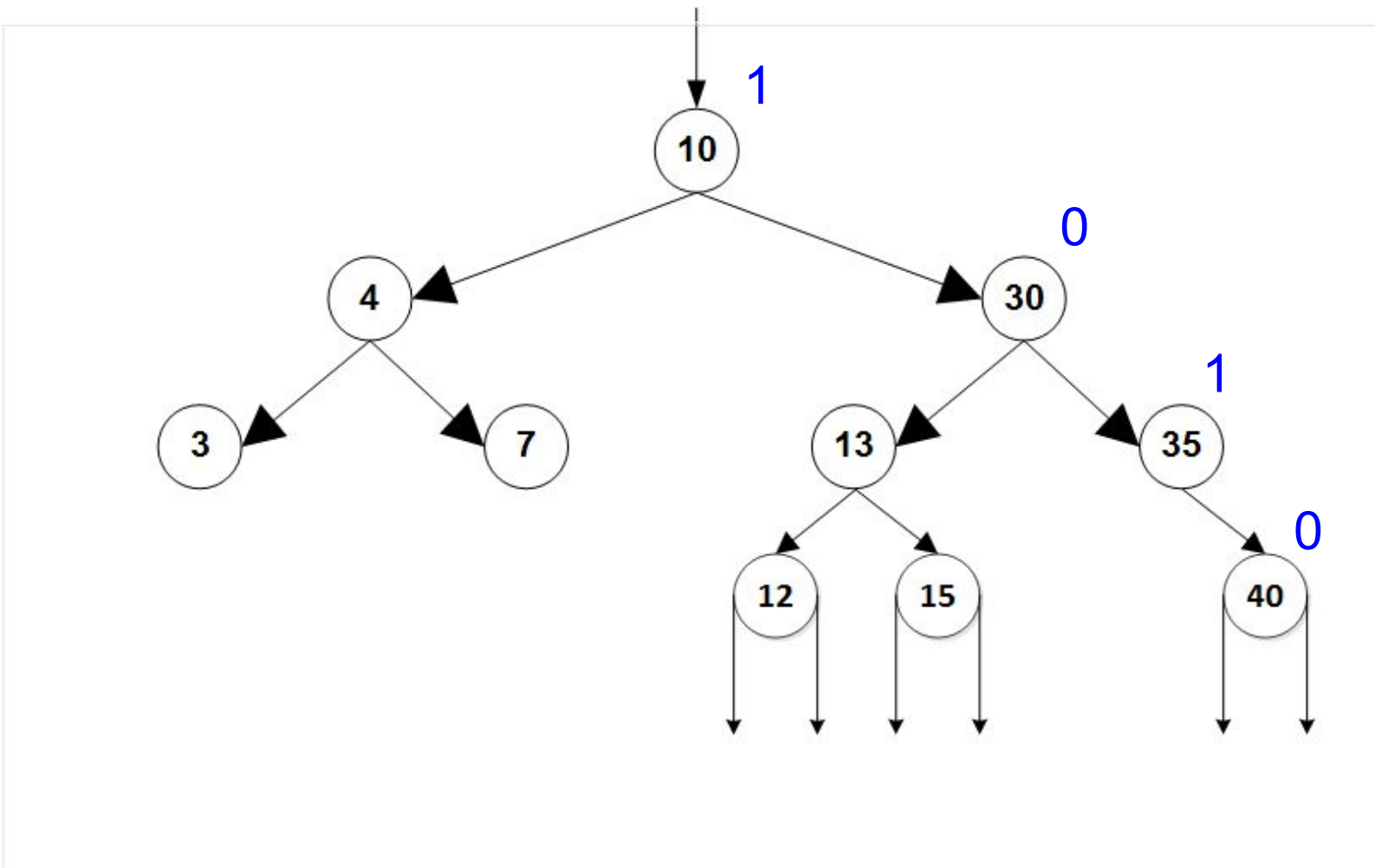
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, **15**, **12**, **7**, 40 e 20 respectivamente



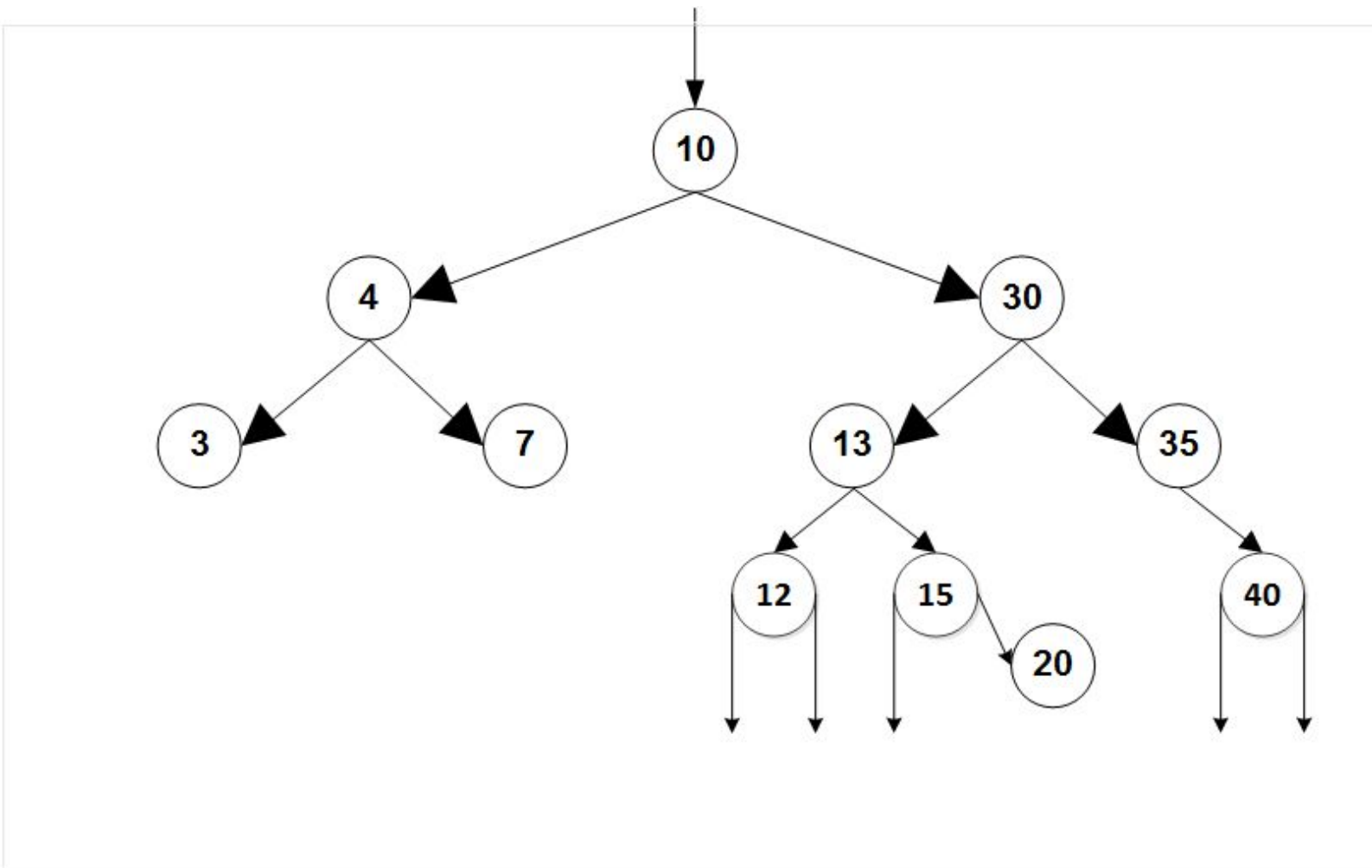
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, **15**, **12**, **7**, **40** e 20 respectivamente



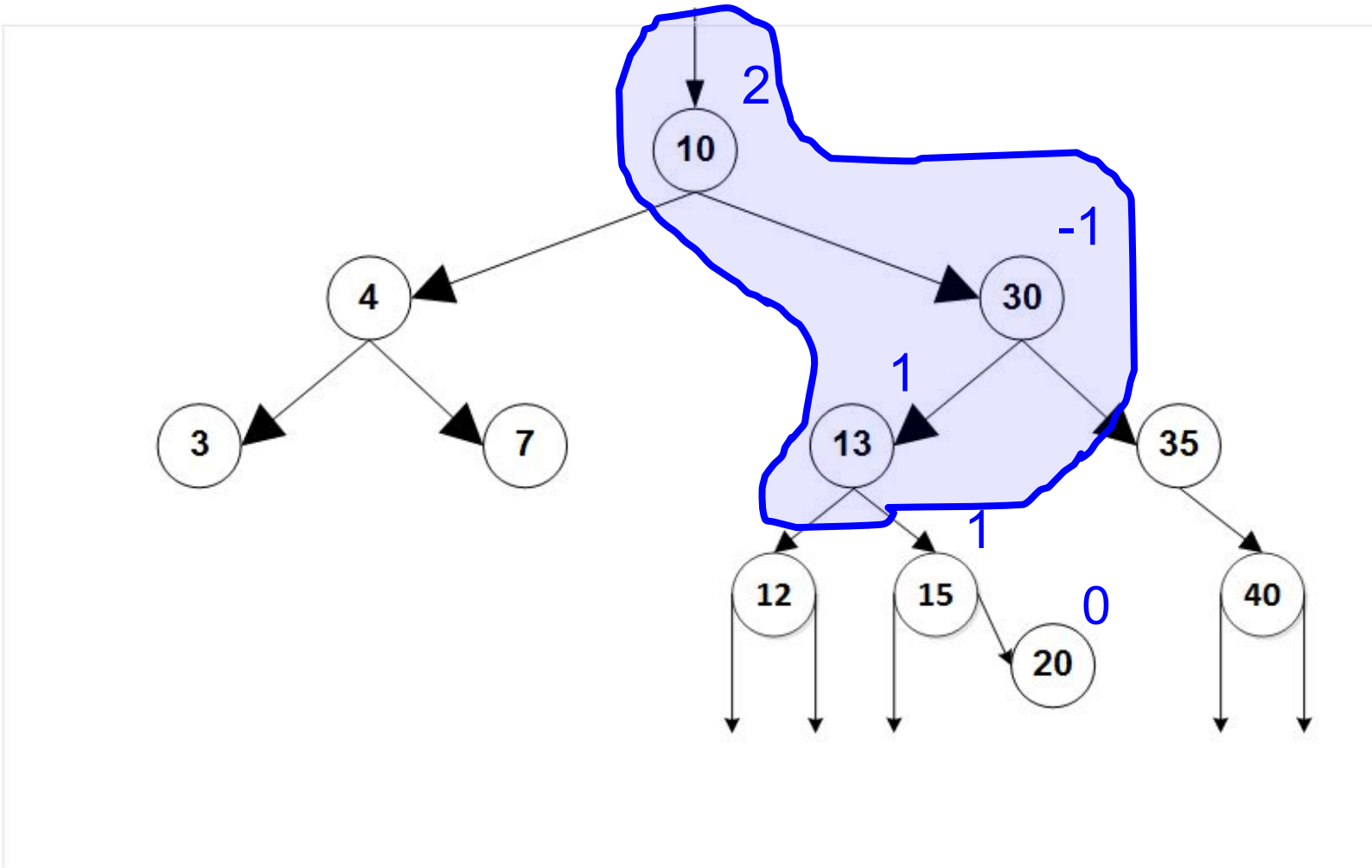
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, **15**, **12**, **7**, **40** e 20 respectivamente



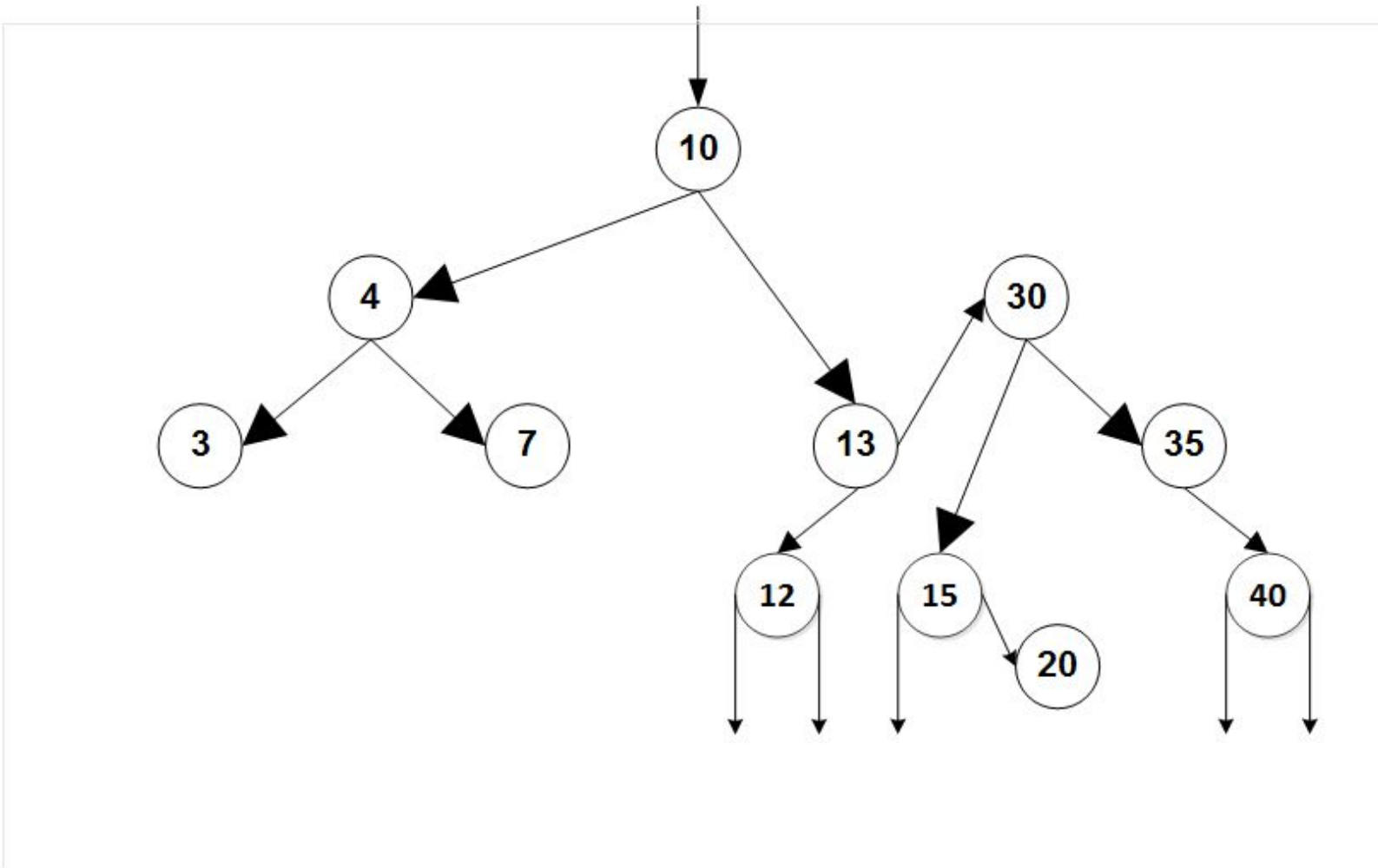
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, **15**, **12**, **7**, **40** e **20** respectivamente



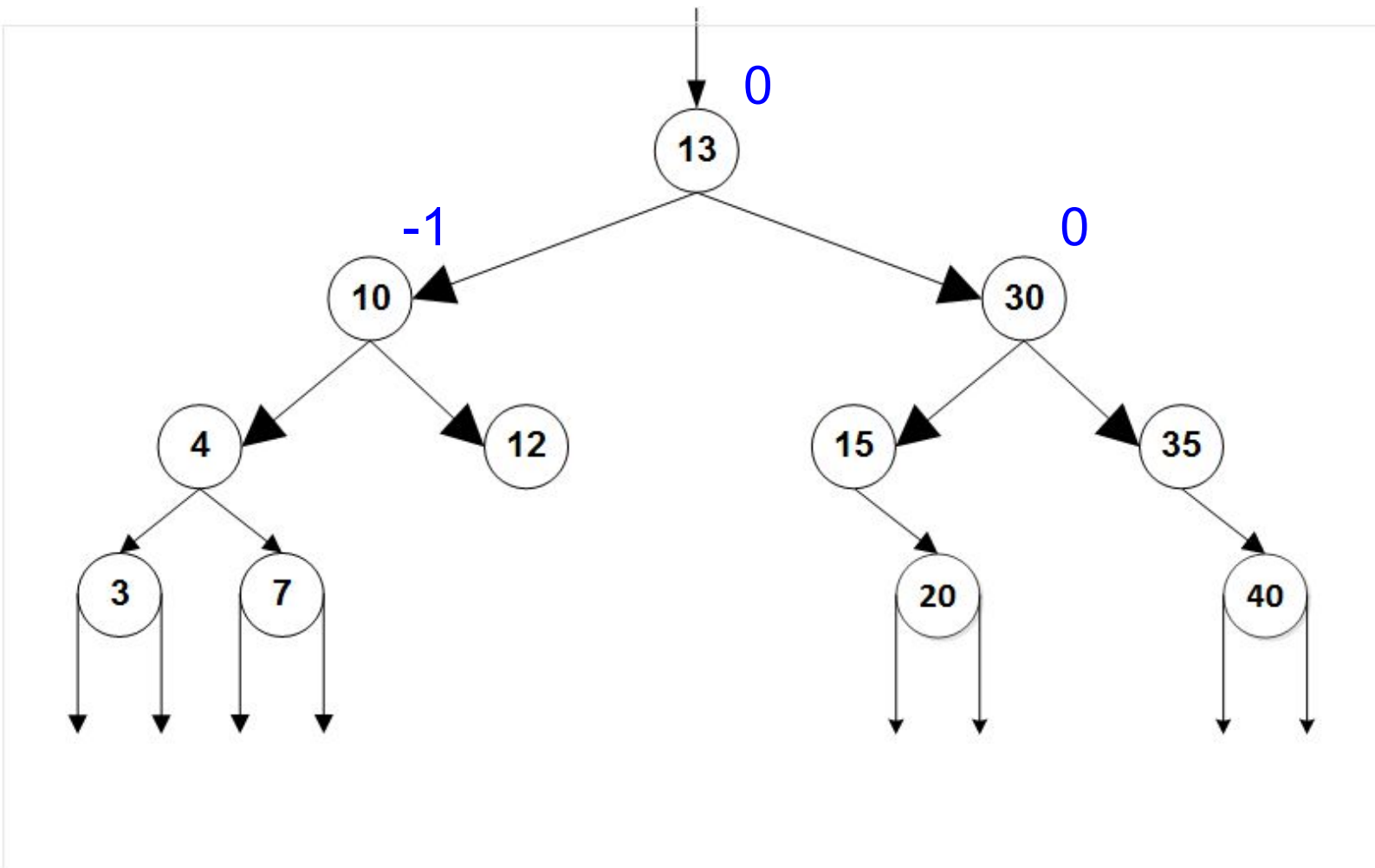
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, **15**, **12**, **7**, **40** e **20** respectivamente rotação Dir (30) Esq (10)



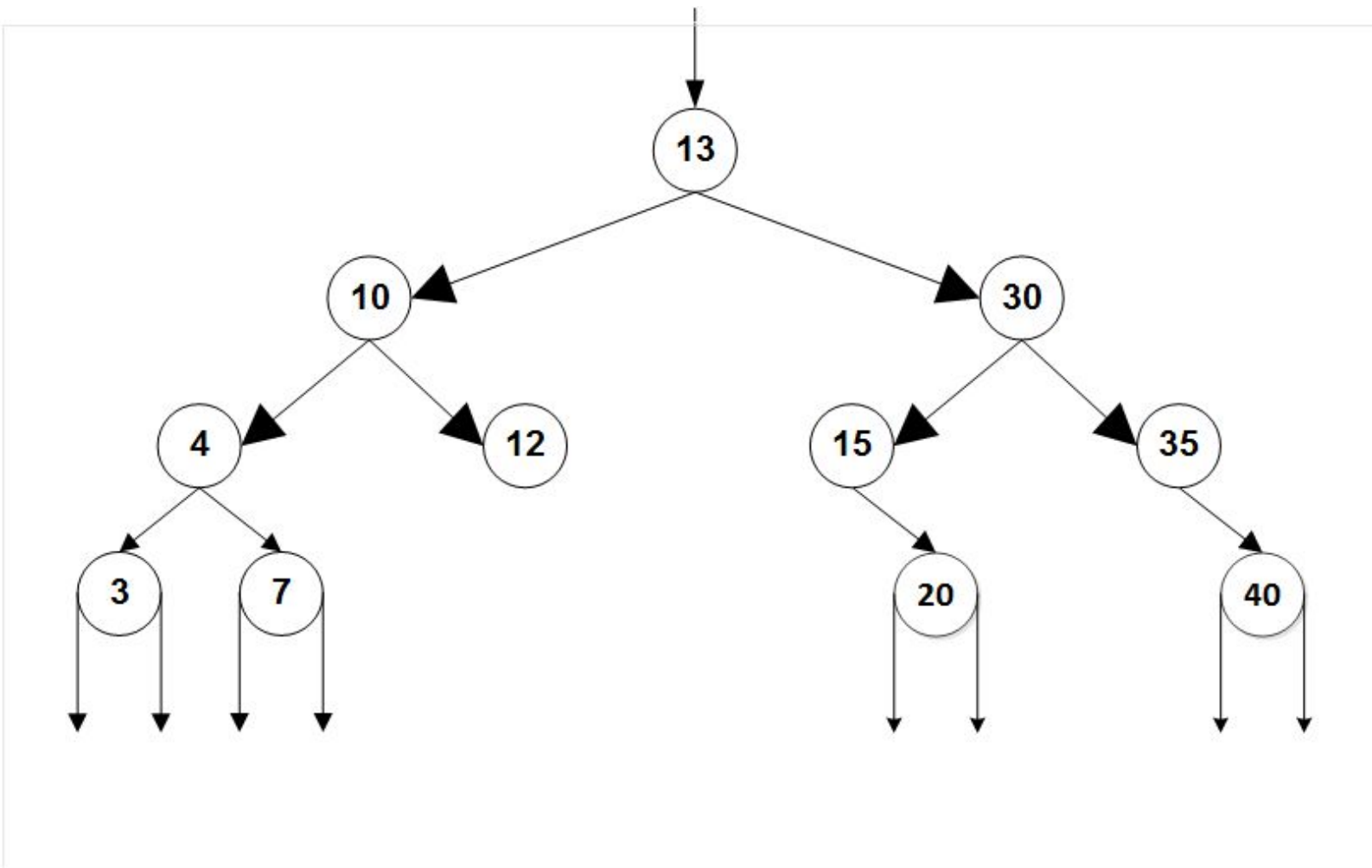
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, **15**, **12**, **7**, **40** e **20** respectivamente rotação Dir (30) Esq (10)



- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, **15**, **12**, **7**, **40** e **20** respectivamente



- Insira o 6 na AVL abaixo



Exercício

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas dos números 1 a 20, respectivamente
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas dos números 20 a 1, respectivamente
- Para cada um dos três exercícios anteriores, verifique sua resposta usando nosso código para a árvore AVL

Algoritmo em C-like

Ver código em: [fonte/08/avl/](#)