

Unidade VI:

Árvores AVL



Instituto de Ciências Exatas e Informática
Departamento de Ciência da Computação

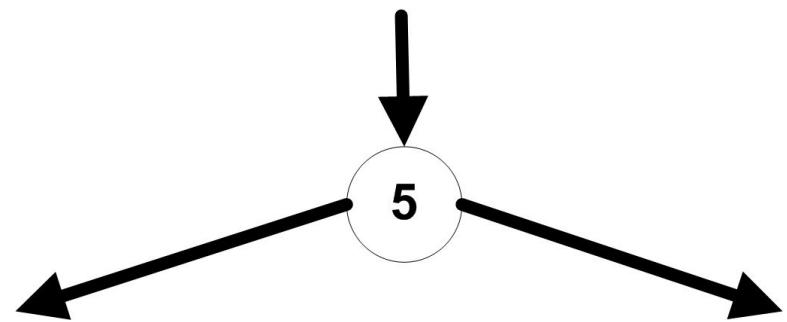
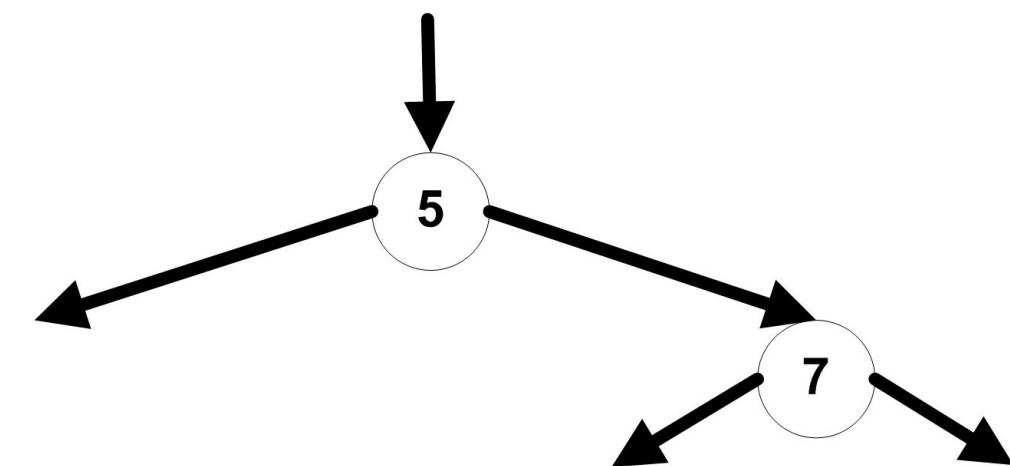
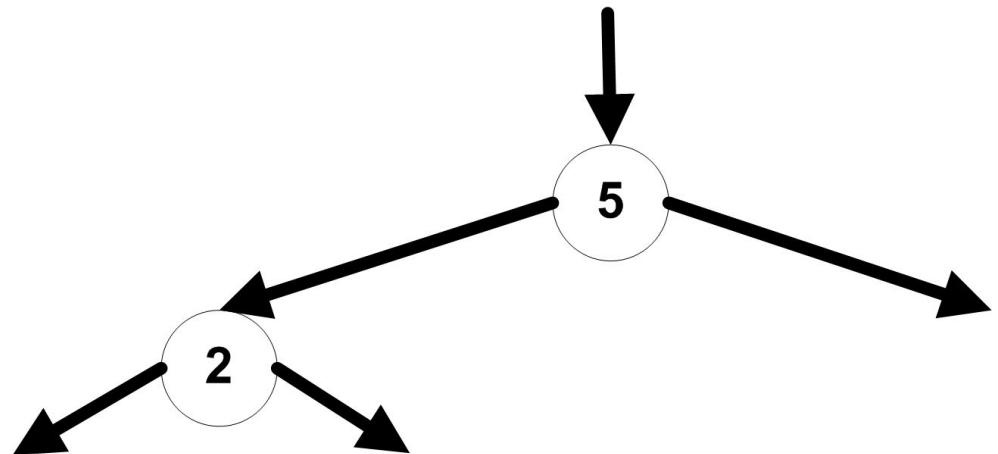
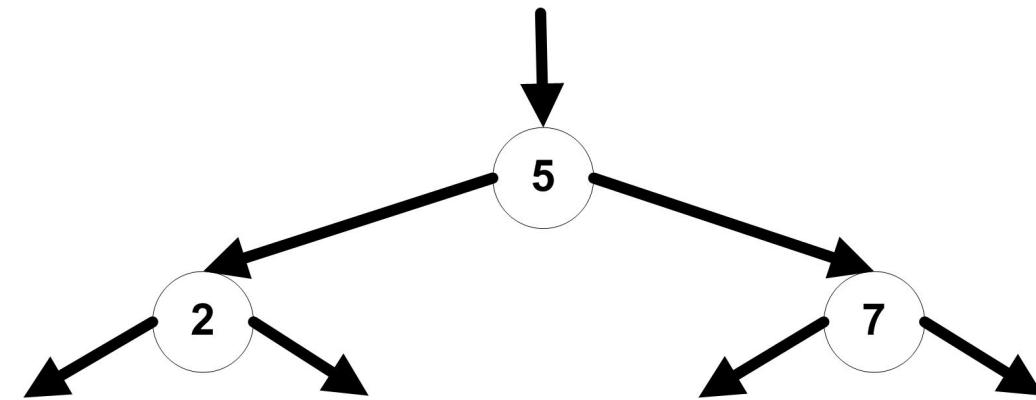
Introdução

- As árvores AVL foram propostas por Adelson-Velskii e Landis
- No pior caso, o número de comparações para se localizar um elemento em uma AVL é aproximadamente $1,44 * \lg(n) = \Theta(\lg(n))$
- Cada nó conhece seu **fator de balanceamento** que consiste na diferença entre o número de níveis de suas subárvore à esquerda e à direita

$$\text{fator}(i) = \text{alturaDir}(i) - \text{alturaEsq}(i)$$

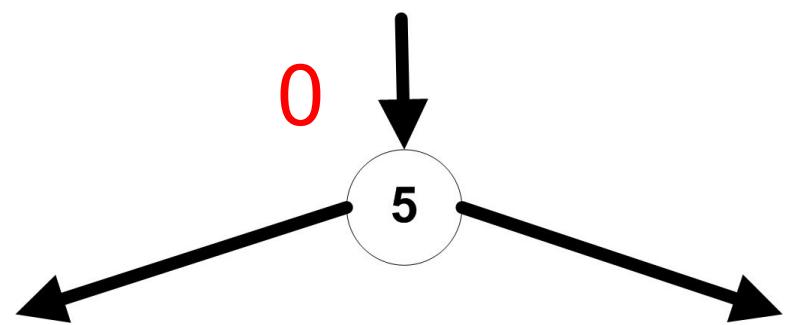
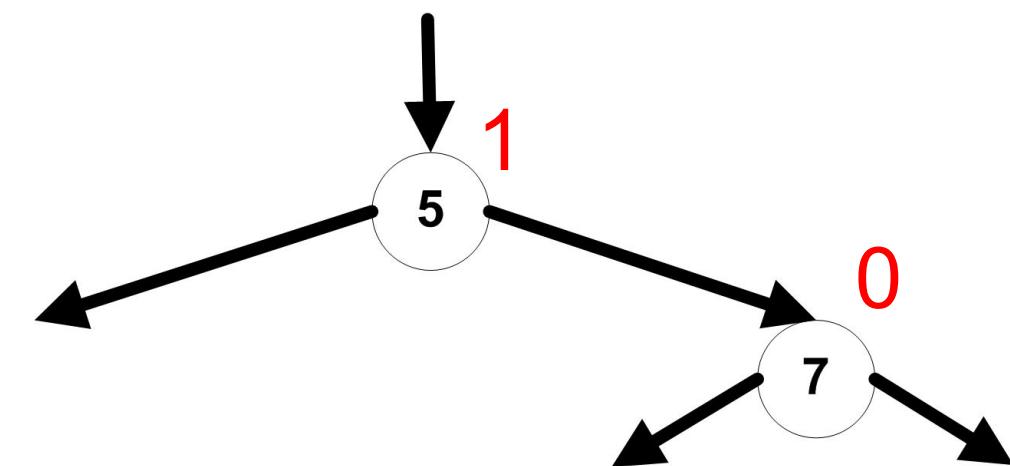
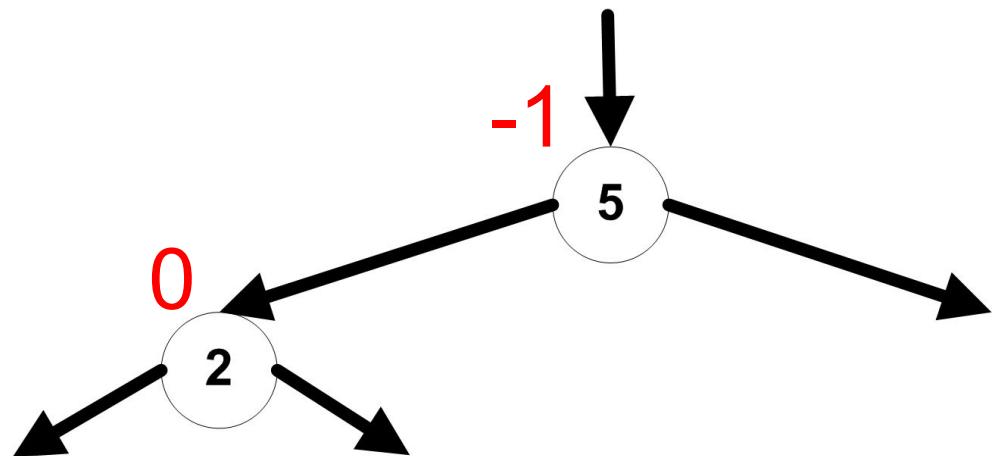
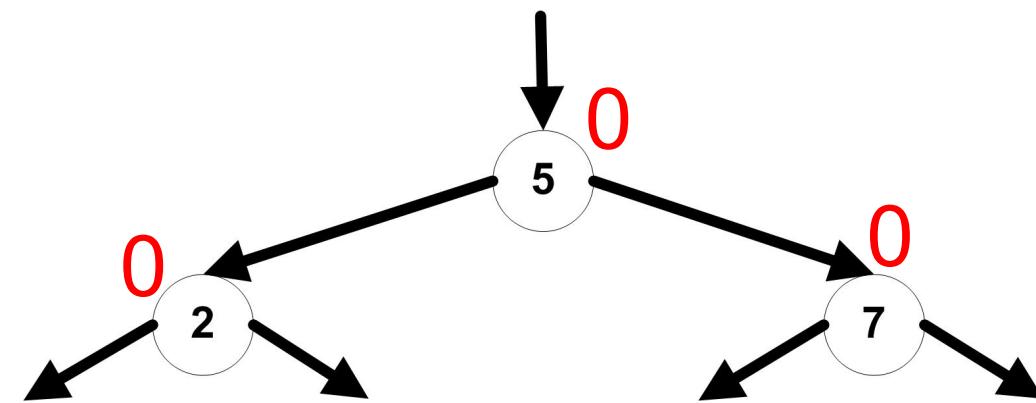
Exercício

- Sejam as árvores abaixo, mostre o fator de balanceamento de cada nó



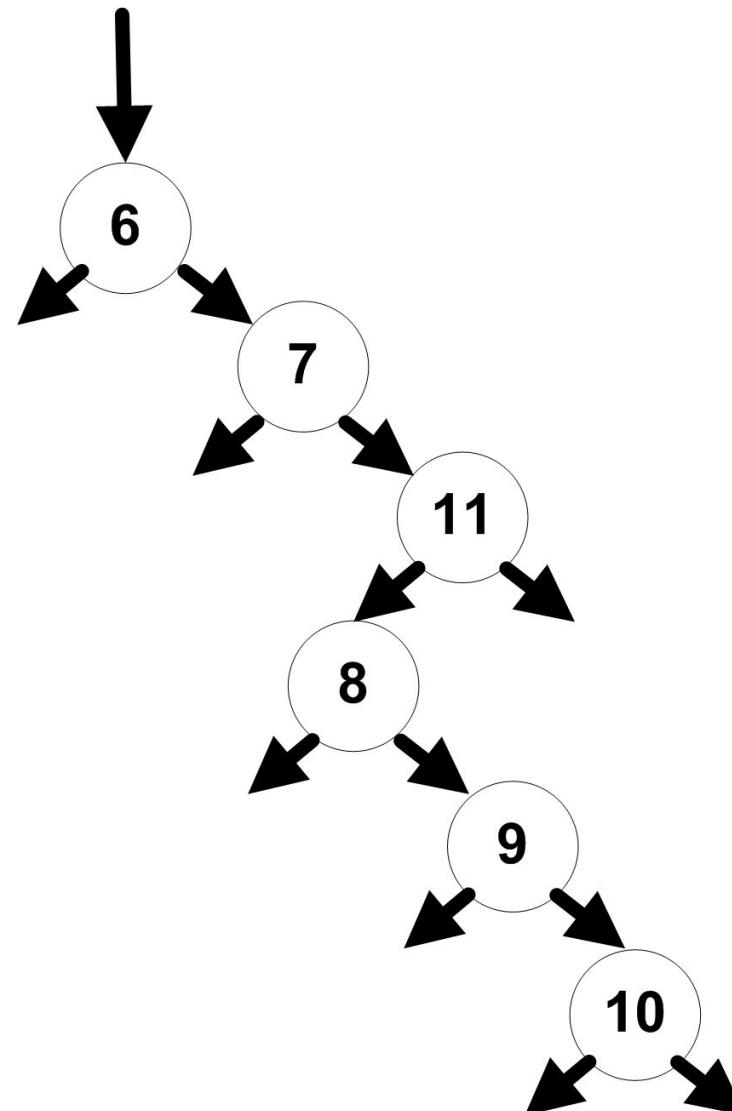
Exercício

- Sejam as árvores abaixo, mostre o fator de balanceamento de cada nó



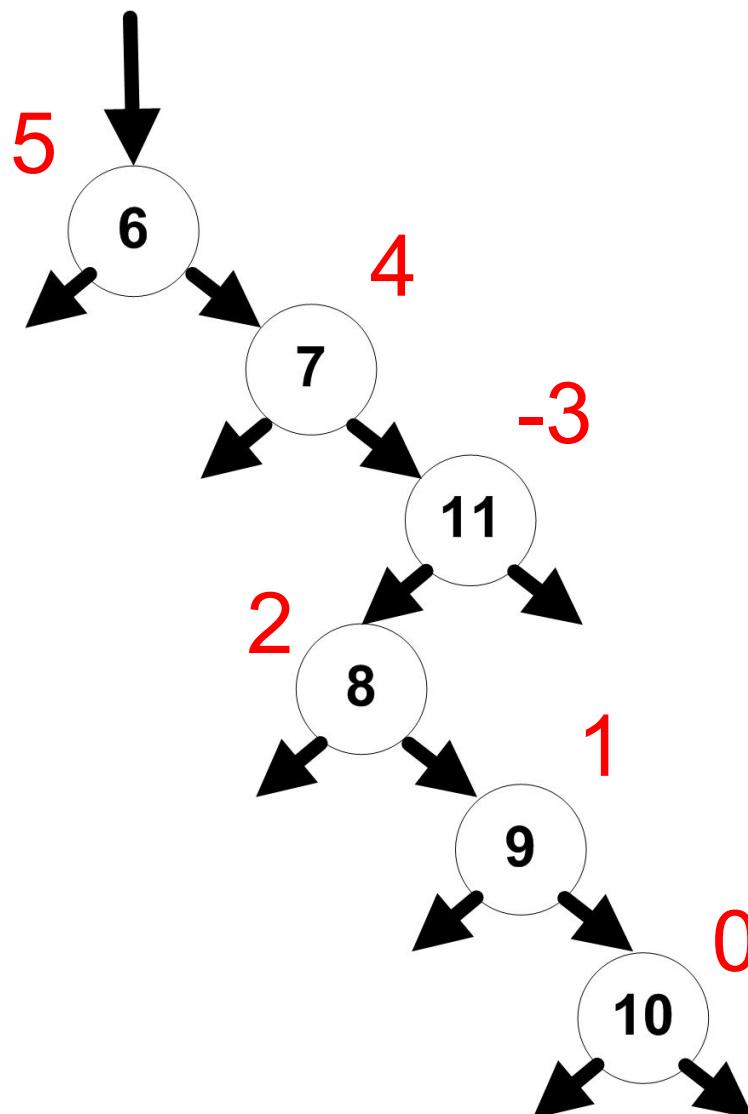
Exercício

- Seja a árvore abaixo, mostre o fator de balanceamento de cada nó



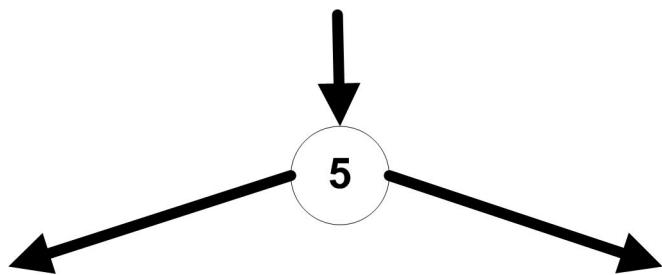
Exercício

- Seja a árvore abaixo, mostre o fator de balanceamento de cada nó



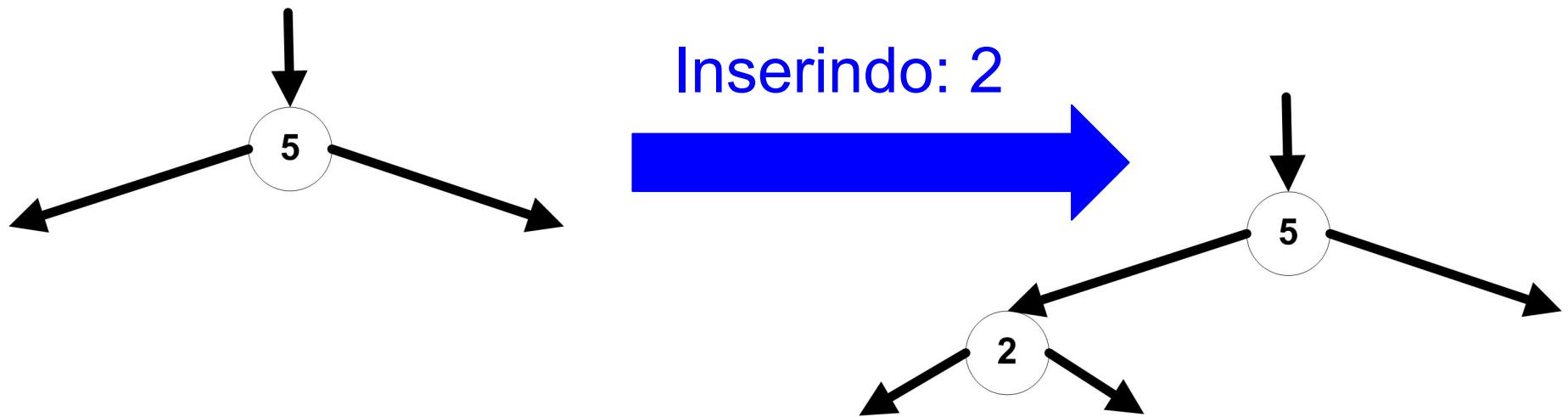
Exercício

- Seja a árvore abaixo, faça a inserção de um elemento tal que o fator de balanceamento do nó cinco seja menos um



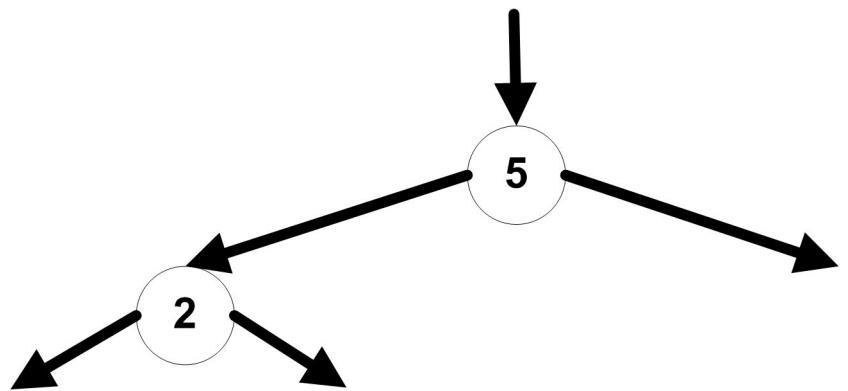
Exercício

- Seja a árvore abaixo, faça a inserção de um elemento tal que o fator de balanceamento do nó cinco seja menos um



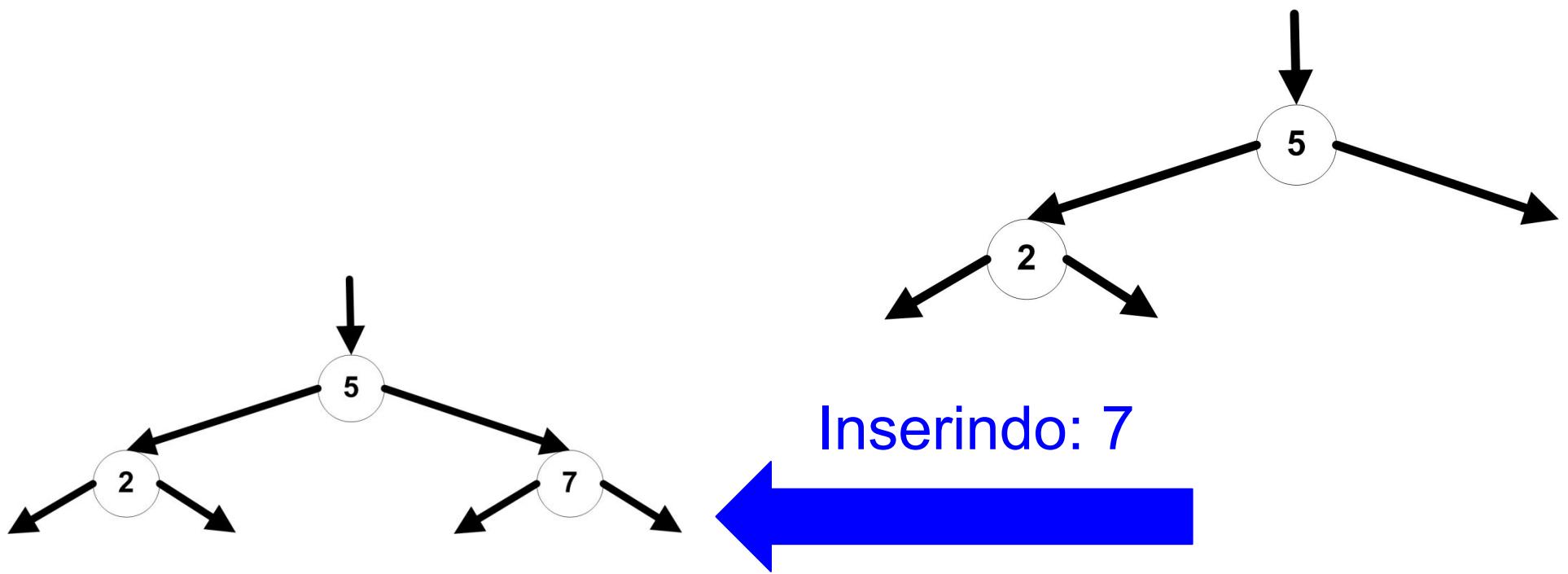
Exercício

- Agora, faça a inserção de outro elemento para que o fator de balanceamento do nó cinco volte a ser zero



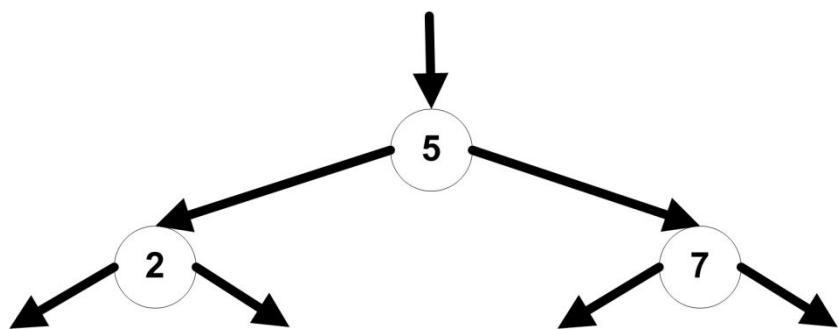
Exercício

- Faça a inserção de outro elemento para que o fator de balanceamento do nó cinco volte a ser 0



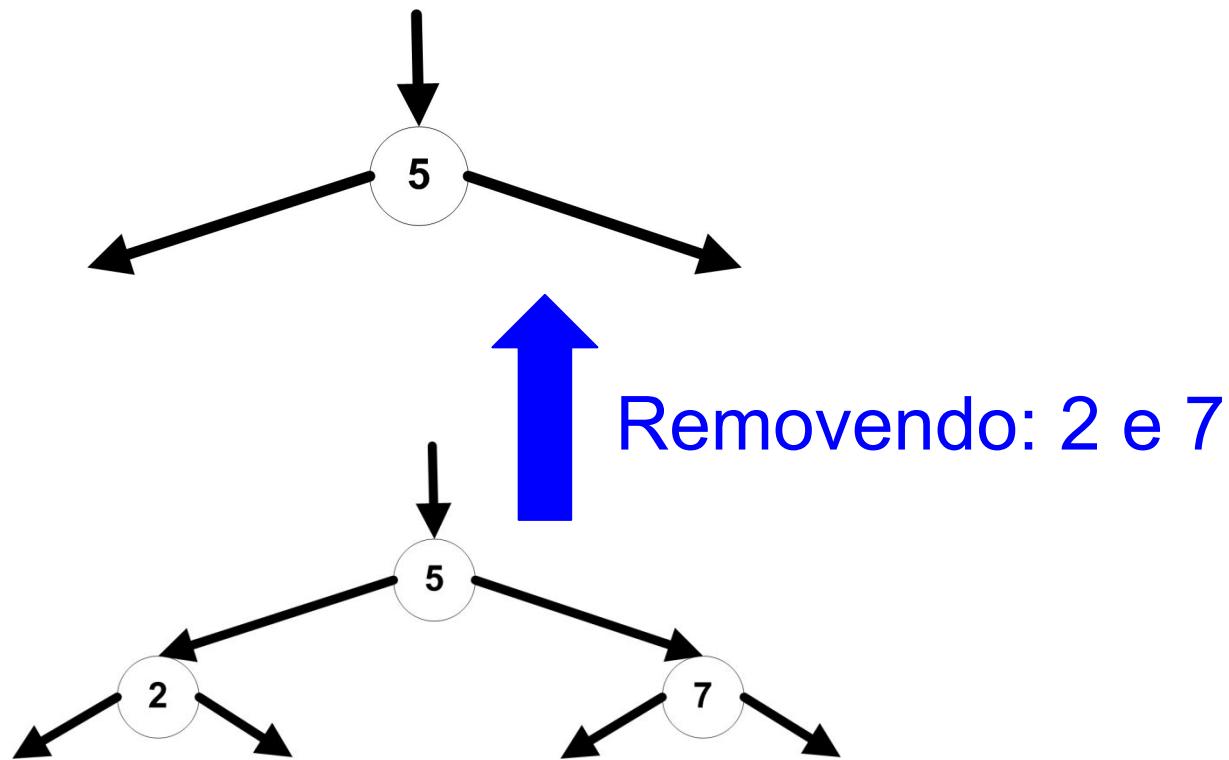
Exercício

- O que acontece se removermos o dois e, depois, o sete?



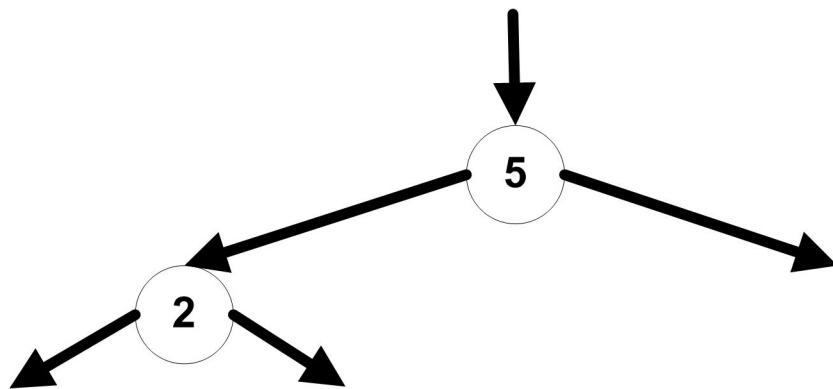
Exercício

- O que acontece se removermos o dois e, depois, o sete?



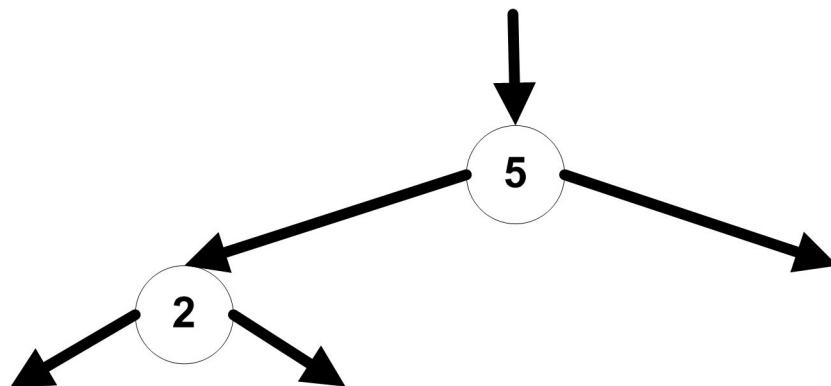
Exercício

- Seja a árvore abaixo, faça a inserção de um elemento tal que o fator de balanceamento do nó cinco seja menos dois

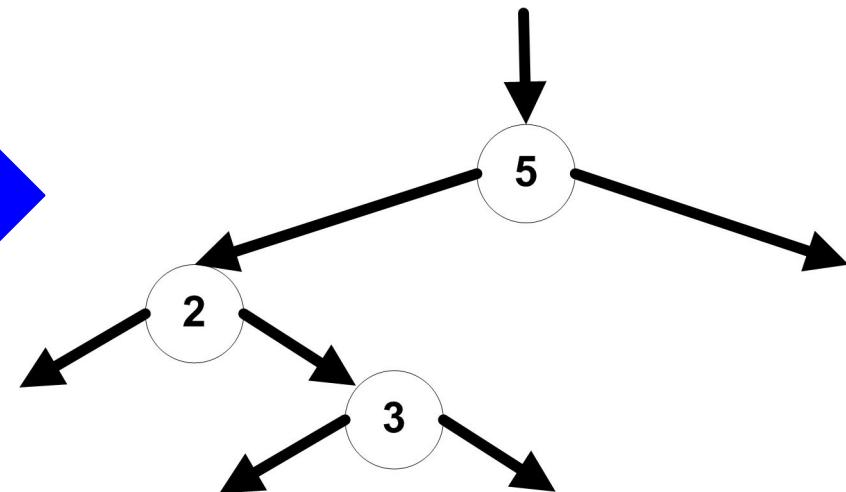


Exercício

- Seja a árvore abaixo, faça a inserção de um elemento tal que o fator de balanceamento do nó cinco seja menos dois

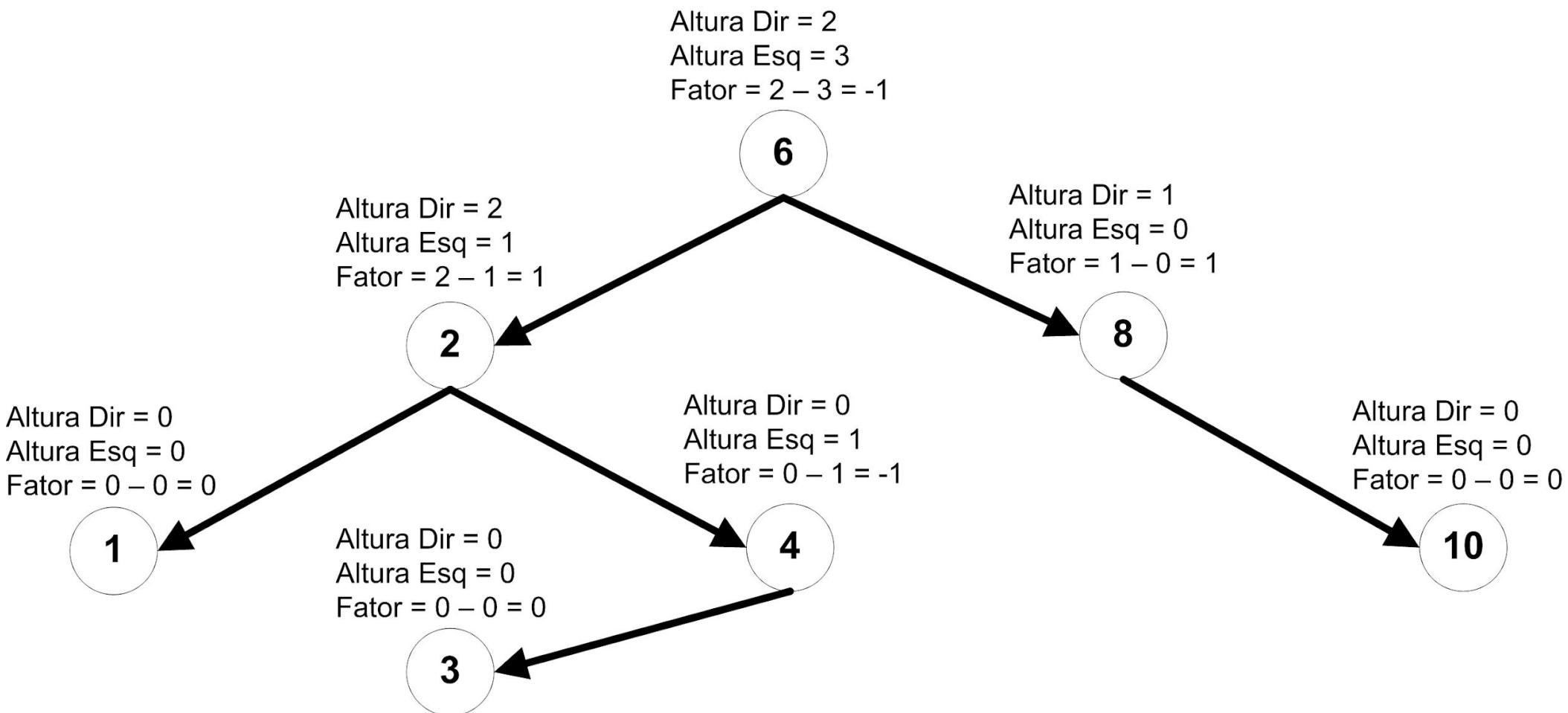


Inserindo: 3



Exemplo de uma Árvore AVL

- O fator de cada nó será -1, 0 ou 1 como no exemplo abaixo:



Ideia Básica

- Cada nó conhece seu fator de balanceamento
- Quando o fator de um nó se torna ± 2 , o algoritmo da AVL rotaciona esse nó, sabendo que existem quatro tipos de rotação (R_E , R_D , R_{DE} e R_{ED})

Ideia Básica

Fator
do nó

Tipo de
rotação

2

Rotação para a esquerda

-2

Rotação para a direita

Ideia Básica

Fator
do nó

Tipo de
rotação

2

Rotação para a esquerda

(R_E e R_{DE})

-2

Rotação para a direita

(R_D e R_{ED})

Ideia Básica

Fator
do nó

2

-2

O tipo de rotação depende do fator do
filho pertencente a maior subárvore

Ou seja, o pai...

Rotação para a esquerda

(R_E e R_{DE})

Rotação para a direita

(R_D e R_{ED})

Ideia Básica

Fator do nó	Fator do filho à direita	Fator do filho à esquerda	Tipo de rotação
2	1	-	Simples à esquerda
	0		Dupla dir-esq
-2	-	-1	Simples à direita
		0	Dupla esq-dir
		1	

Ideia Básica

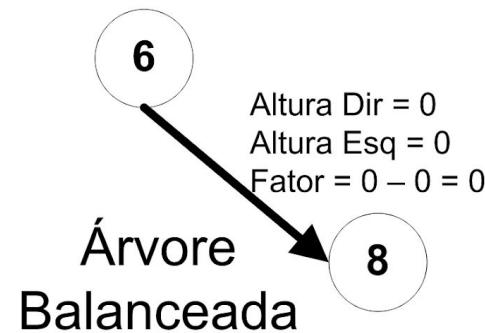
Fator do nó	Fator do filho à direita	Fator do filho à esquerda	Tipo de rotação
2	1 0 -1	-	Simples à esquerda Dupla dir-esq
-2		-1 0 1	Simples à direita Dupla esq-dir

Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à direita com fator 1

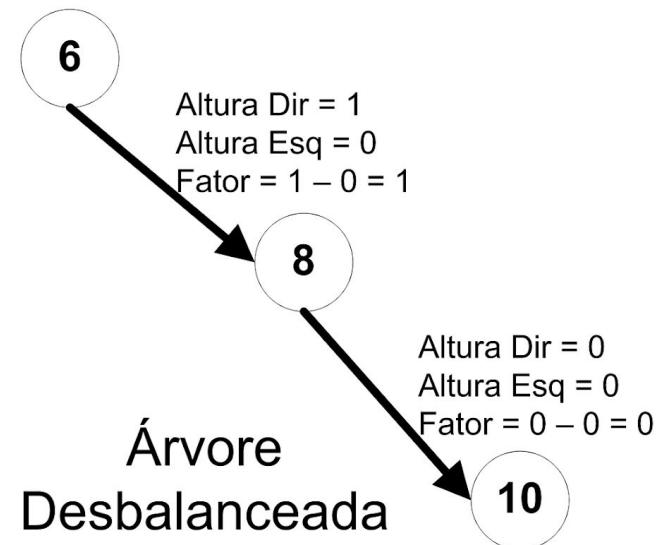
Rotação simples à esquerda no nó com fator 2

Altura Dir = 1
Altura Esq = 0
Fator = $1 - 0 = 1$



Inserindo
10

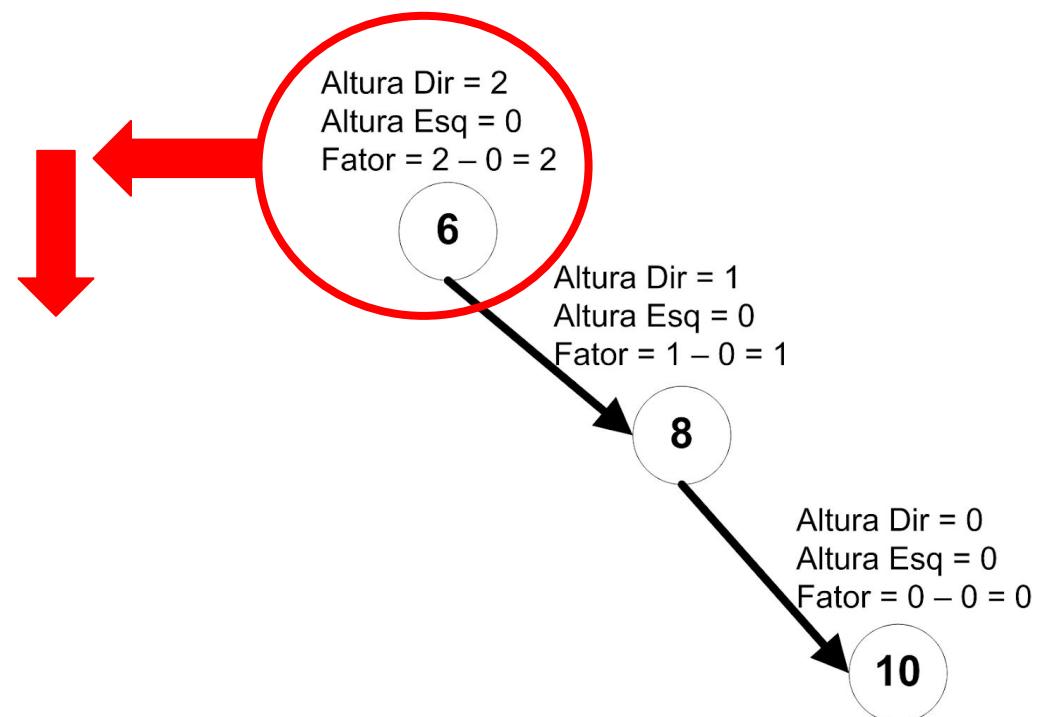
Altura Dir = 2
Altura Esq = 0
Fator = $2 - 0 = 2$



Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à direita com fator 1

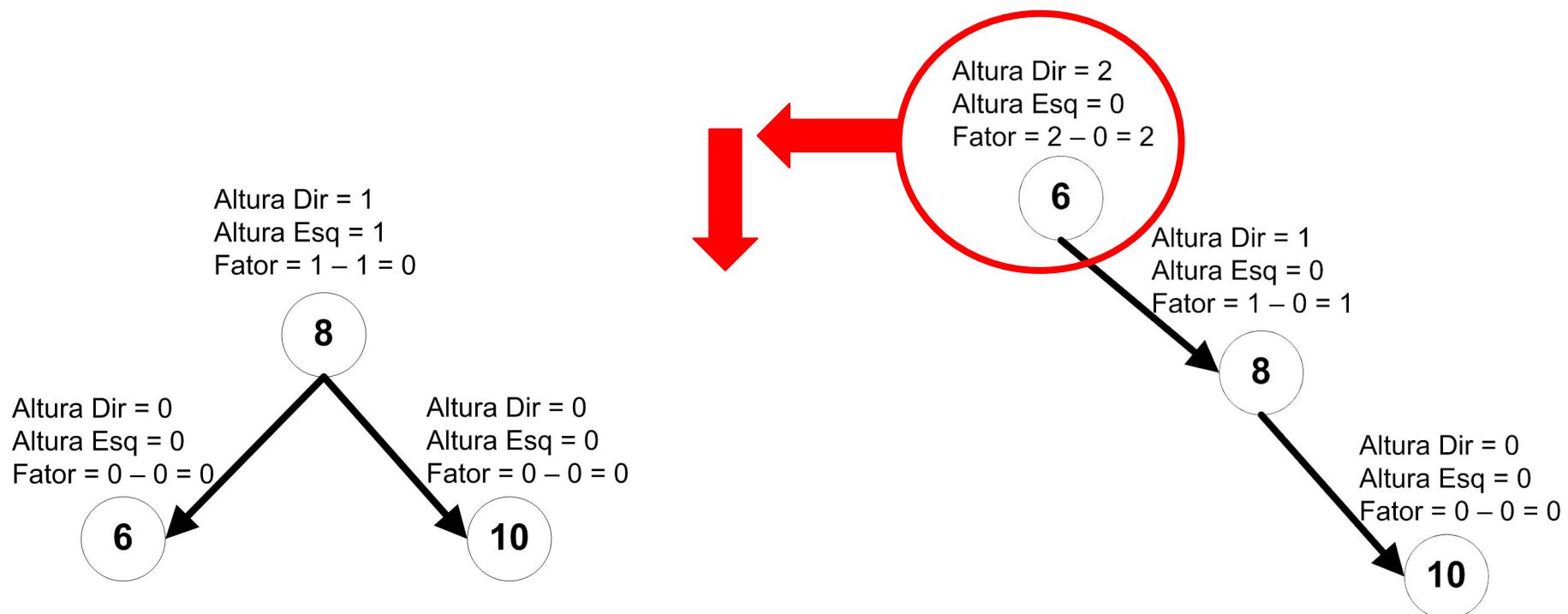
Rotação simples à esquerda no nó com fator 2



Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à direita com fator 1

Rotação simples à esquerda no nó com fator 2



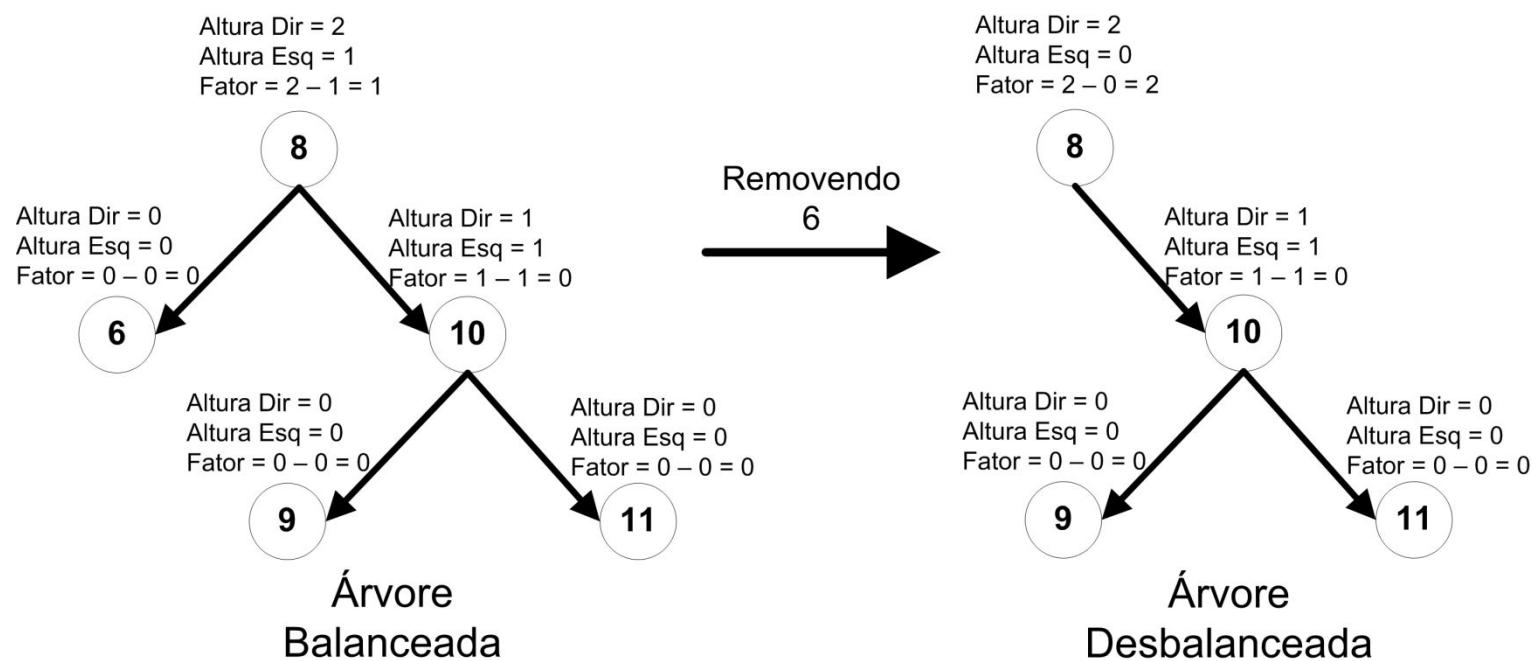
Ideia Básica

Fator do nó	Fator do filho à direita	Fator do filho à esquerda	Tipo de rotação
2	1 0 -1		Simples à esquerda
-2		-1 0 1	Dupla dir-esq Simples à direita Dupla esq-dir

Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à direita com fator 0

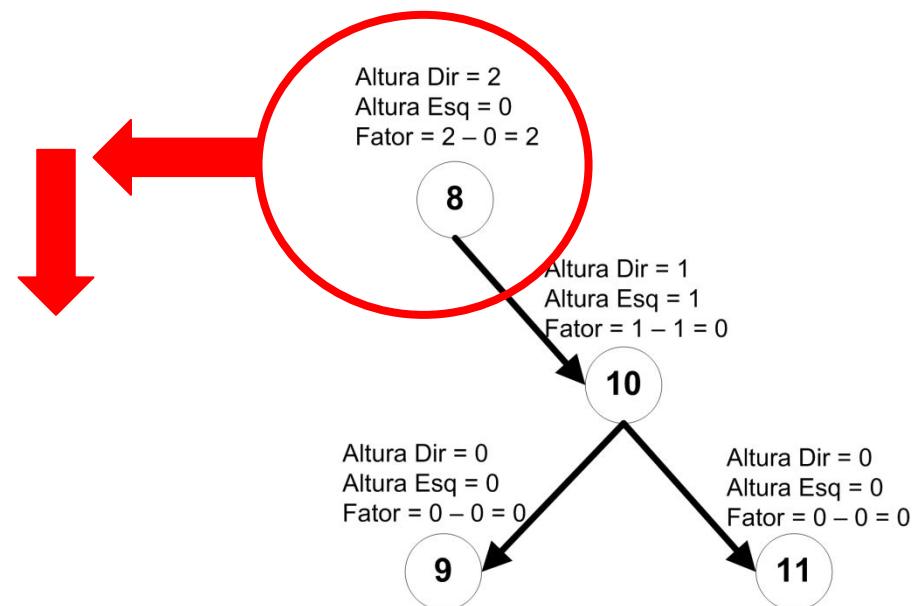
Rotação simples à esquerda no nó com fator 2



Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à direita com fator 0

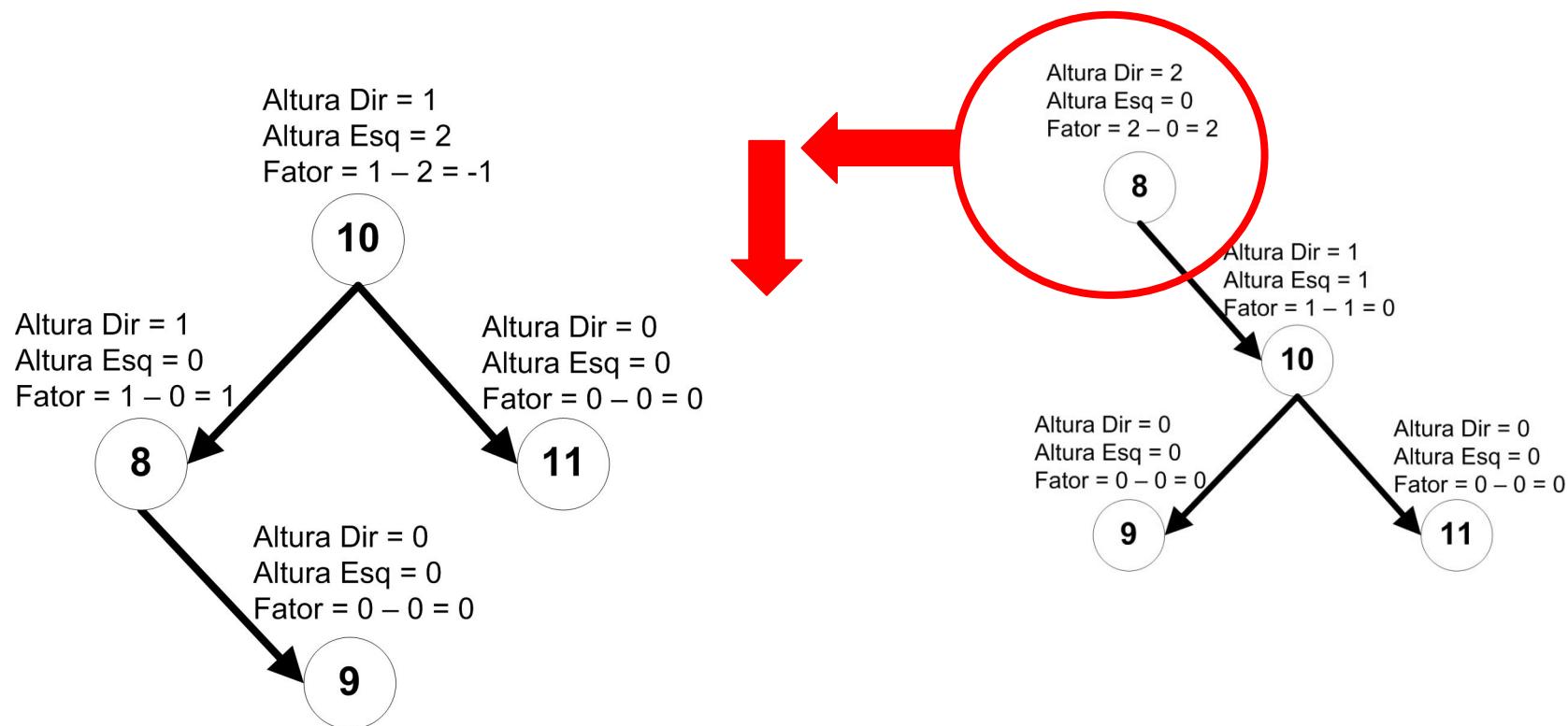
Rotação simples à esquerda no nó com fator 2



Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à direita com fator 0

Rotação simples à esquerda no nó com fator 2



Ideia Básica

Fator do nó	Fator do filho à direita	Fator do filho à esquerda	Tipo de rotação
2	1 0 -1		Simples à esquerda Dupla dir-esq
-2		-1 0 1	Simples à direita Dupla esq-dir

Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à esquerda com fator -1

Rotação simples à direita no nó com fator -2

Altura Dir = 0

Altura Esq = 2

Fator = $0 - 2 = -2$

Altura Dir = 0

Altura Esq = 1

Fator = $0 - 1 = -1$

6

5

3

Altura Dir = 0

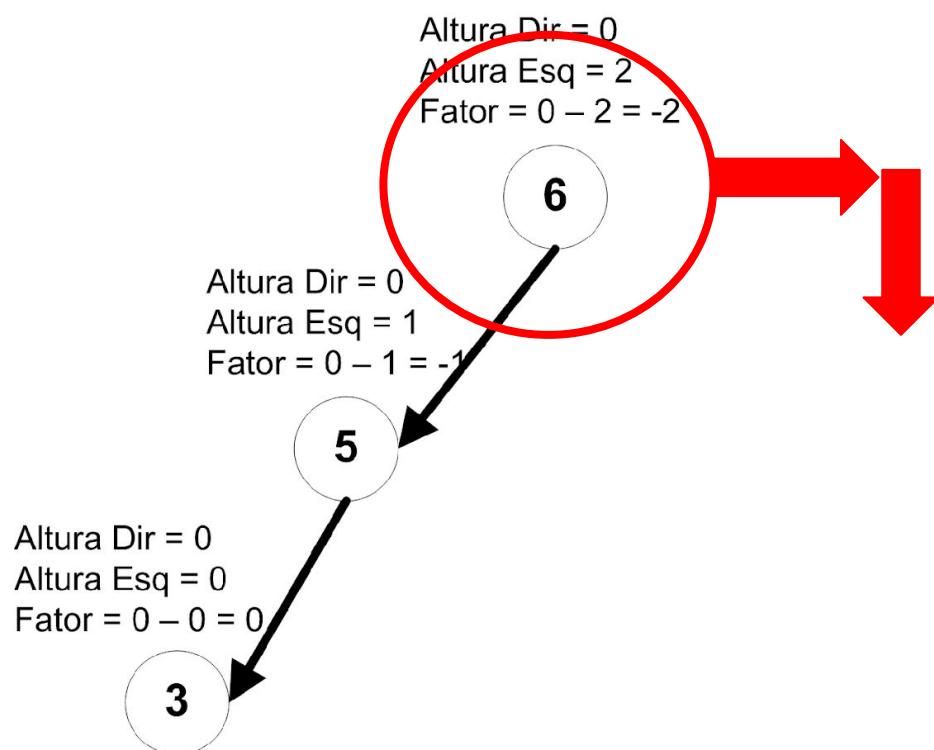
Altura Esq = 0

Fator = $0 - 0 = 0$

Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à esquerda com fator -1

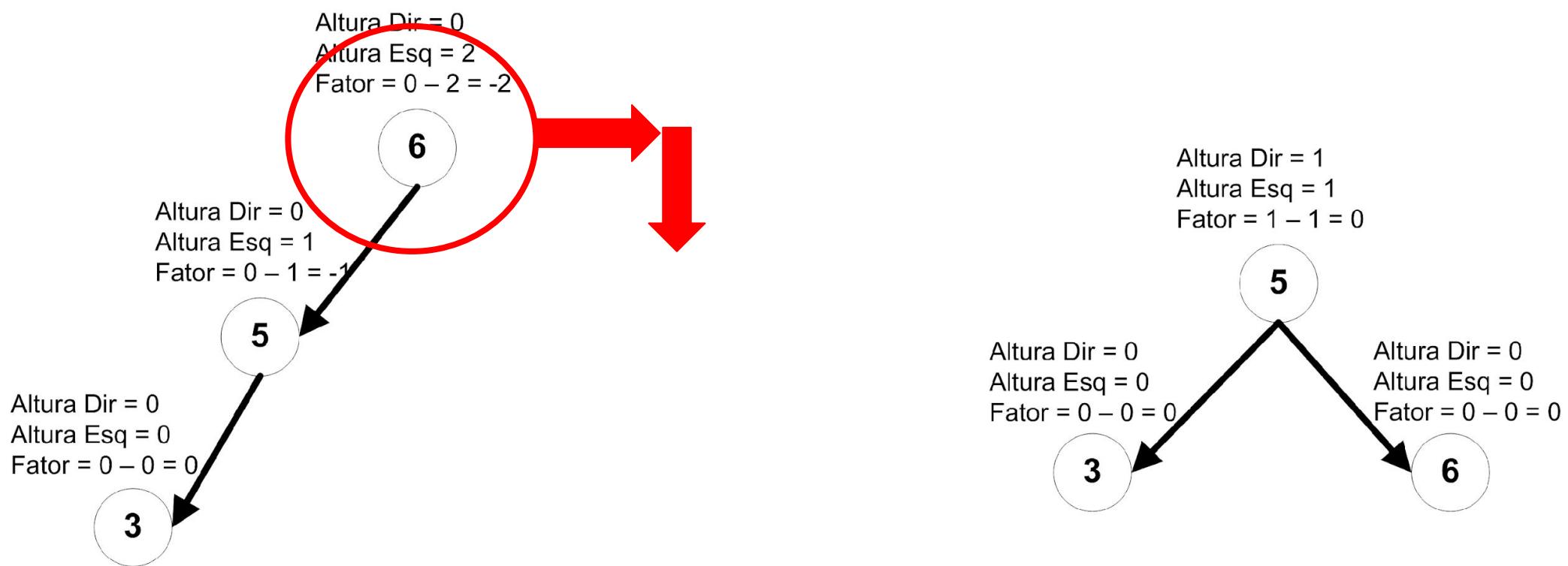
Rotação simples à direita no nó com fator -2



Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à esquerda com fator -1

Rotação simples à direita no nó com fator -2



Ideia Básica

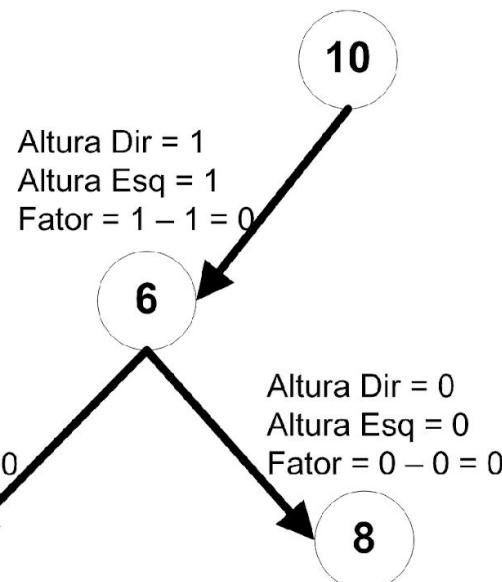
Fator do nó	Fator do filho à direita	Fator do filho à esquerda	Tipo de rotação
2	1 0 -1		Simples à esquerda Dupla dir-esq
-2		-1 0 1	Simples à direita Dupla esq-dir

Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à esquerda com fator -1

Rotação simples à direita no nó com fator -2

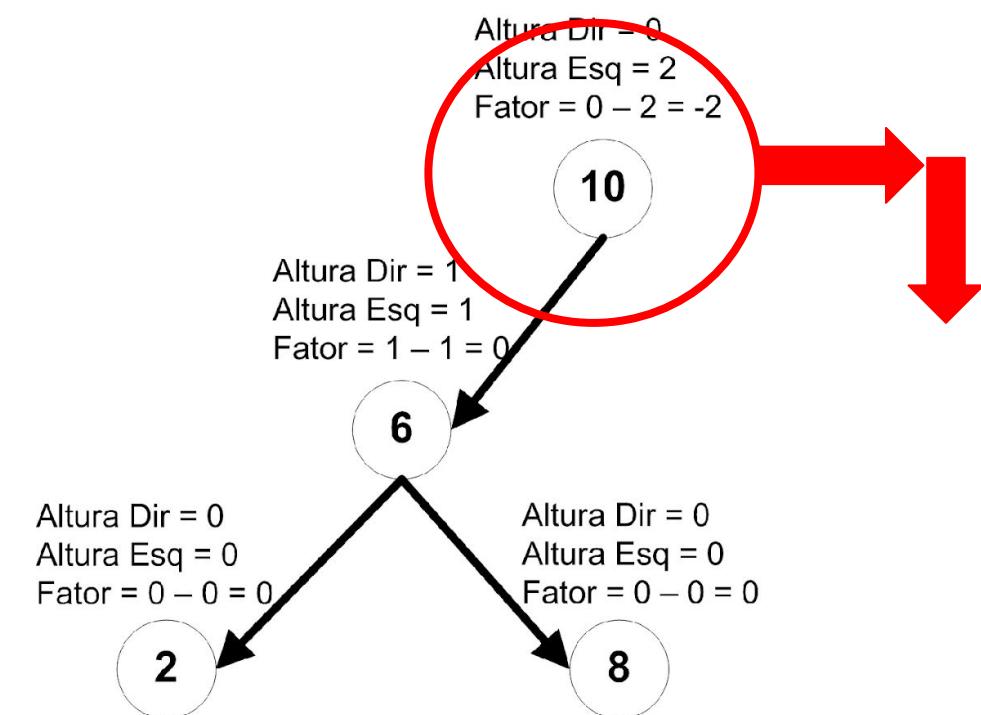
Altura Dir = 0
Altura Esq = 2
Fator = $0 - 2 = -2$



Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à esquerda com fator -1

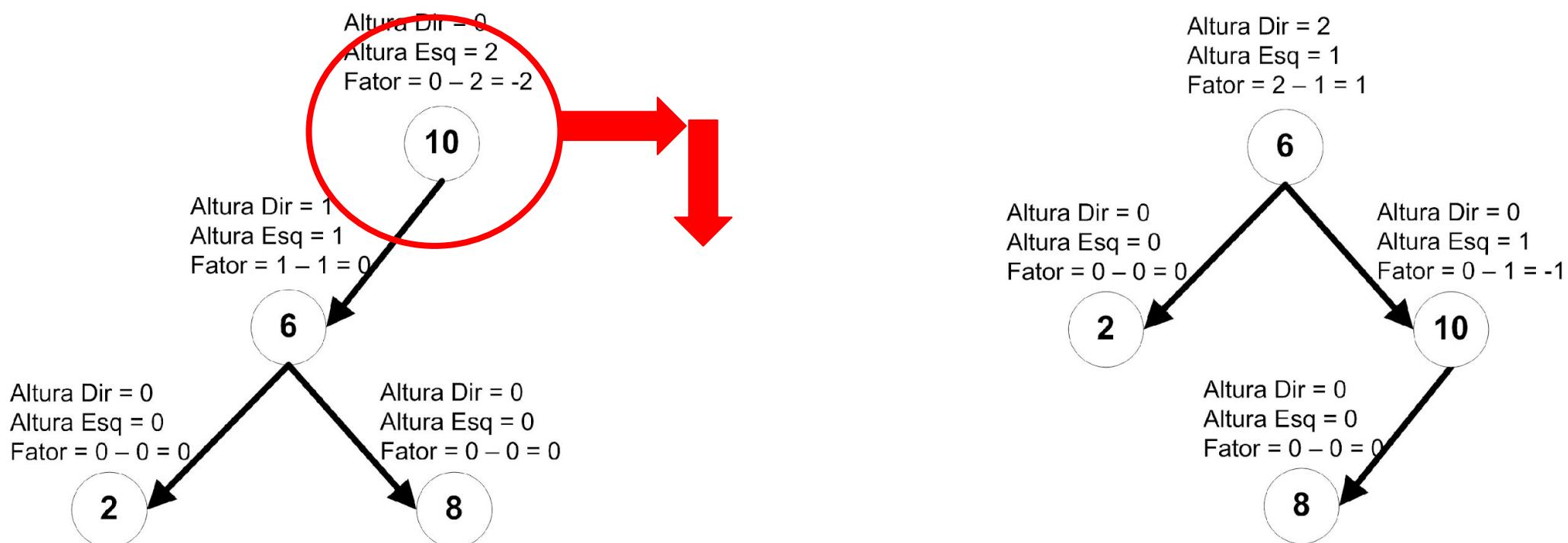
Rotação simples à direita no nó com fator -2



Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à esquerda com fator -1

Rotação simples à direita no nó com fator -2



Ideia Básica

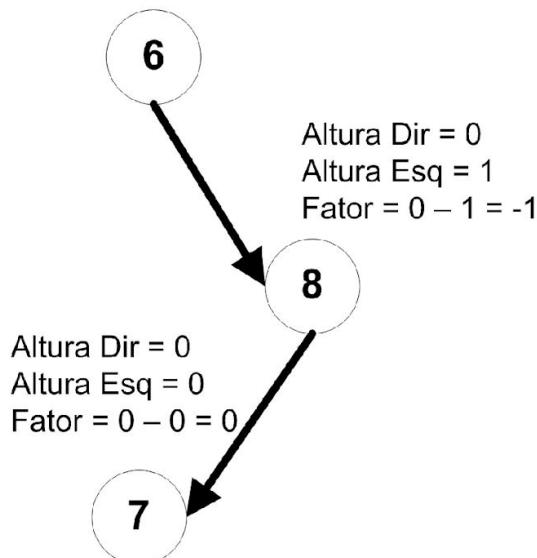
Fator do nó	Fator do filho à direita	Fator do filho à esquerda	Tipo de rotação
2	1 0		Simples à esquerda Dupla dir-esq
-2		-1 0 1	Simples à direita Dupla esq-dir

Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à esquerda com fator -1

Rotação à direita no nó com fator -1 e à esquerda no com 2

Altura Dir = 2
Altura Esq = 0
Fator = 2 – 0 = 2

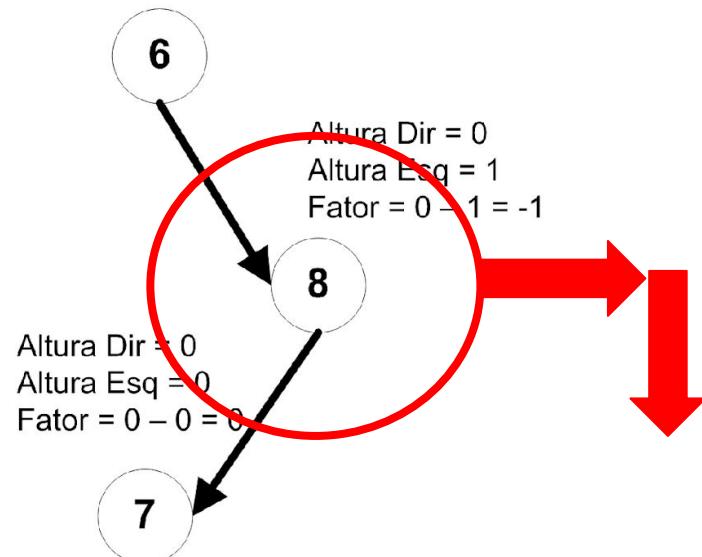


Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à esquerda com fator -1

Rotação à direita no nó com fator -1 e à esquerda no com 2

Altura Dir = 2
Altura Esq = 0
Fator = 2 – 0 = 2



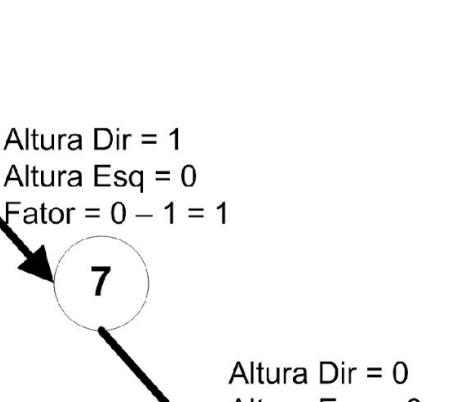
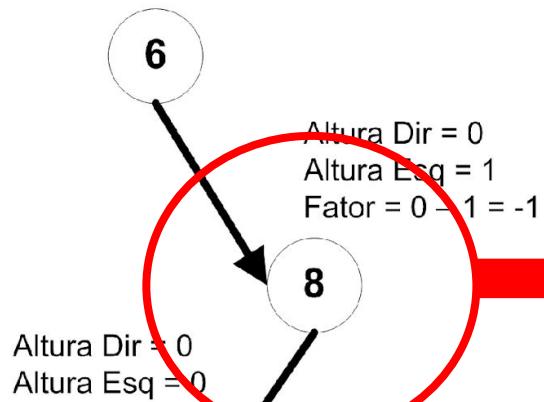
Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à esquerda com fator -1

Rotação à direita no nó com fator -1 e à esquerda no com 2

Altura Dir = 2
Altura Esq = 0
Fator = $2 - 0 = 2$

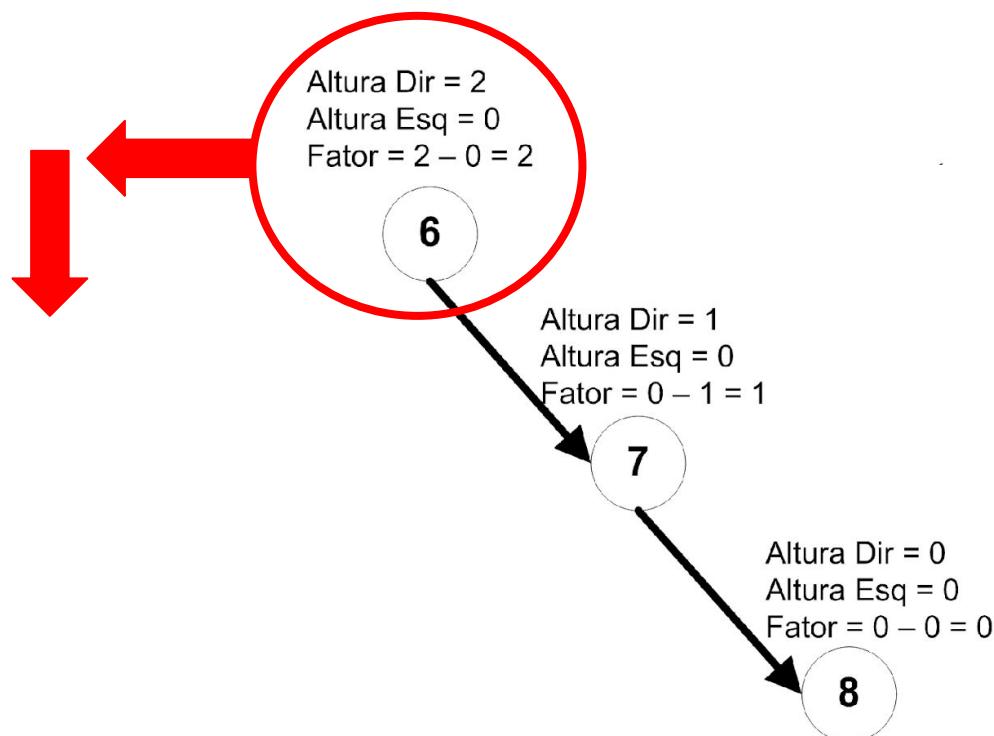
Altura Dir = 2
Altura Esq = 0
Fator = $2 - 0 = 2$



Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à esquerda com fator -1

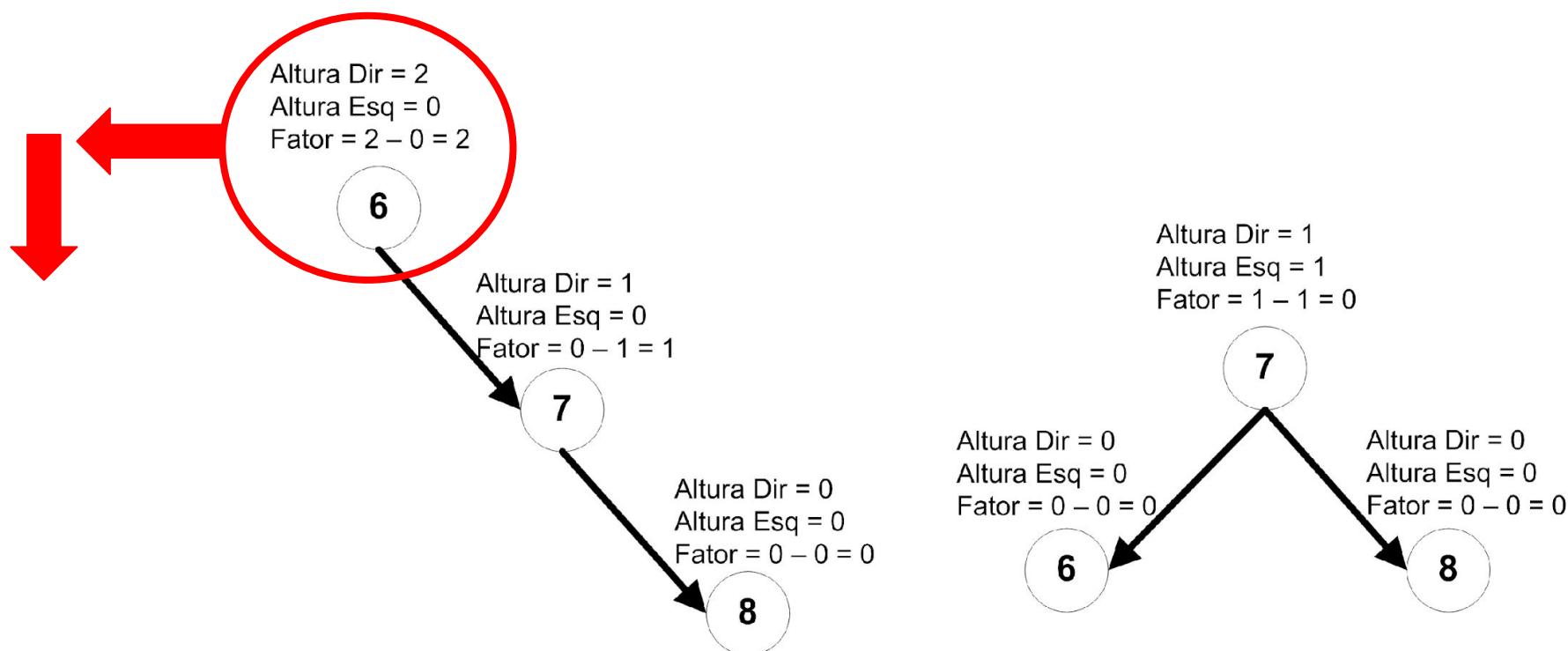
Rotação à direita no nó com fator -1 e à esquerda no com 2



Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à esquerda com fator -1

Rotação à direita no nó com fator -1 e à esquerda no com 2



Ideia Básica

Fator do nó	Fator do filho à direita	Fator do filho à esquerda	Tipo de rotação
2	1 0		Simples à esquerda
-2	-1	-1 0	Dupla dir-esq
		1	Simples à direita
			Dupla esq-dir

Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à direita com fator 1

1
Rotação à esquerda no nó com fator 1 e à direita no com -2

Altura Dir = 0
Altura Esq = 2
Fator = $0 - 2 = -2$

Altura Dir = 1
Altura Esq = 0
Fator = $1 - 0 = 1$



Altura Dir = 0
Altura Esq = 0
Fator = $0 - 0 = 0$

5

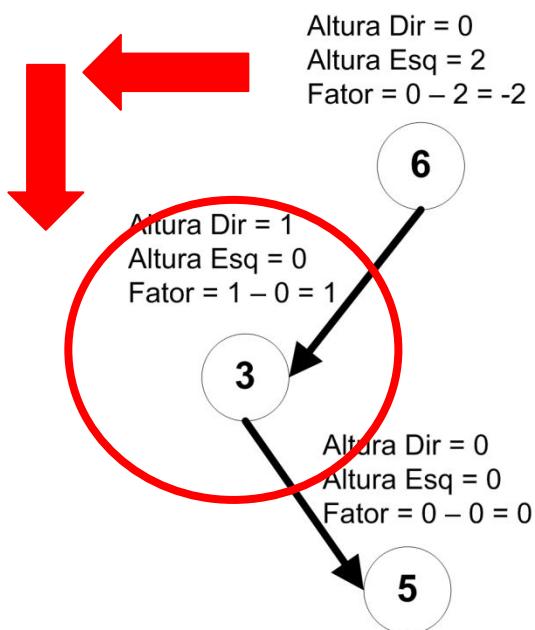
3



Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à direita com fator 1

1
Rotação à esquerda no nó com fator 1 e à direita no com -2

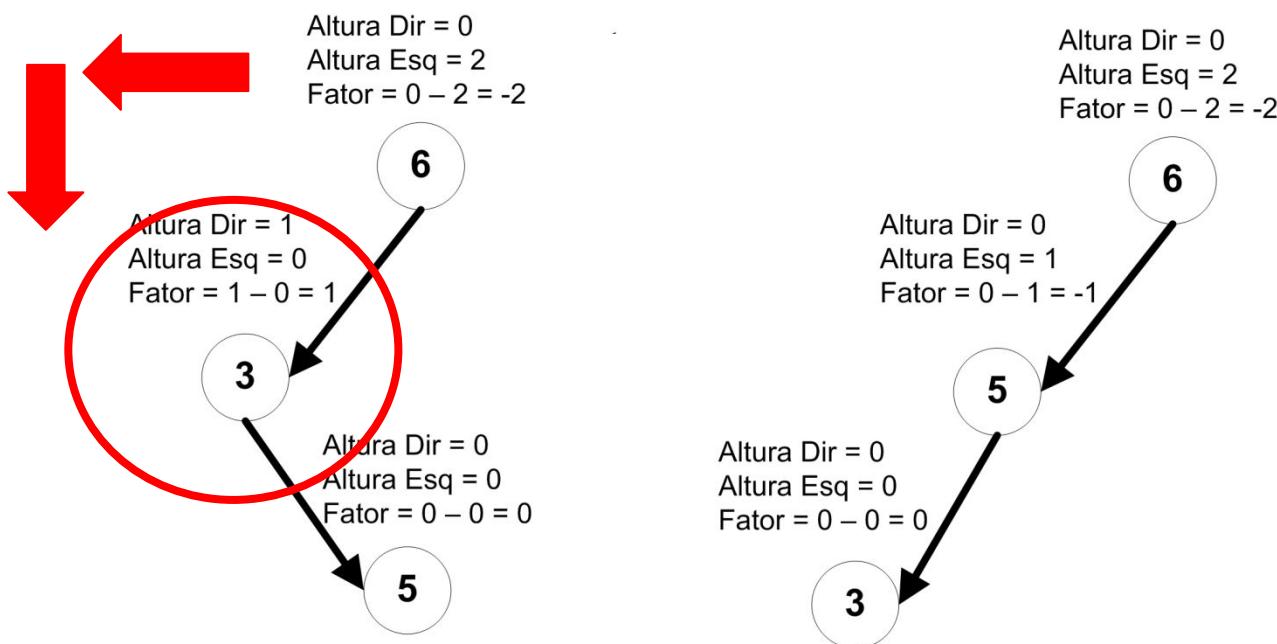


Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à direita com fator 1

1

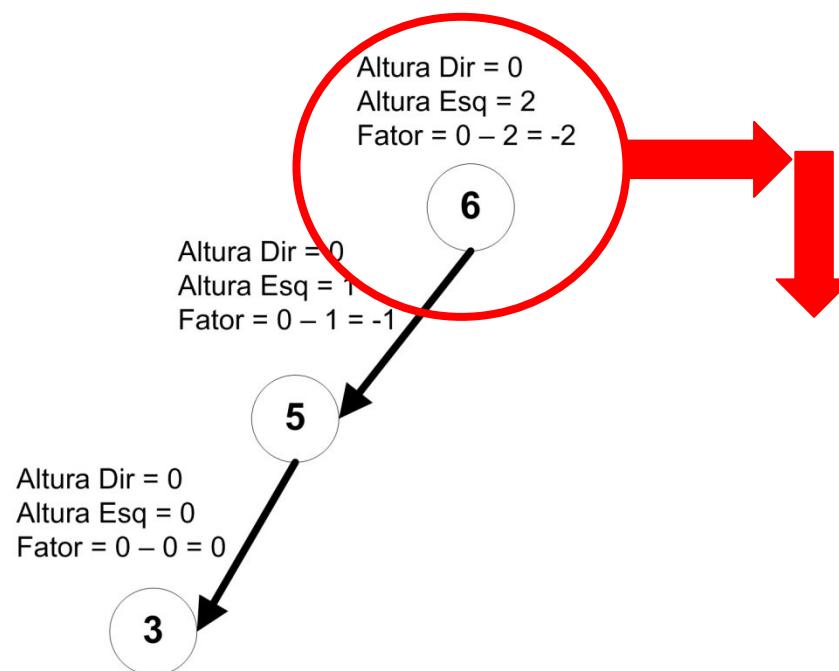
Rotação à esquerda no nó com fator 1 e à direita no com -2



Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à direita com fator 1

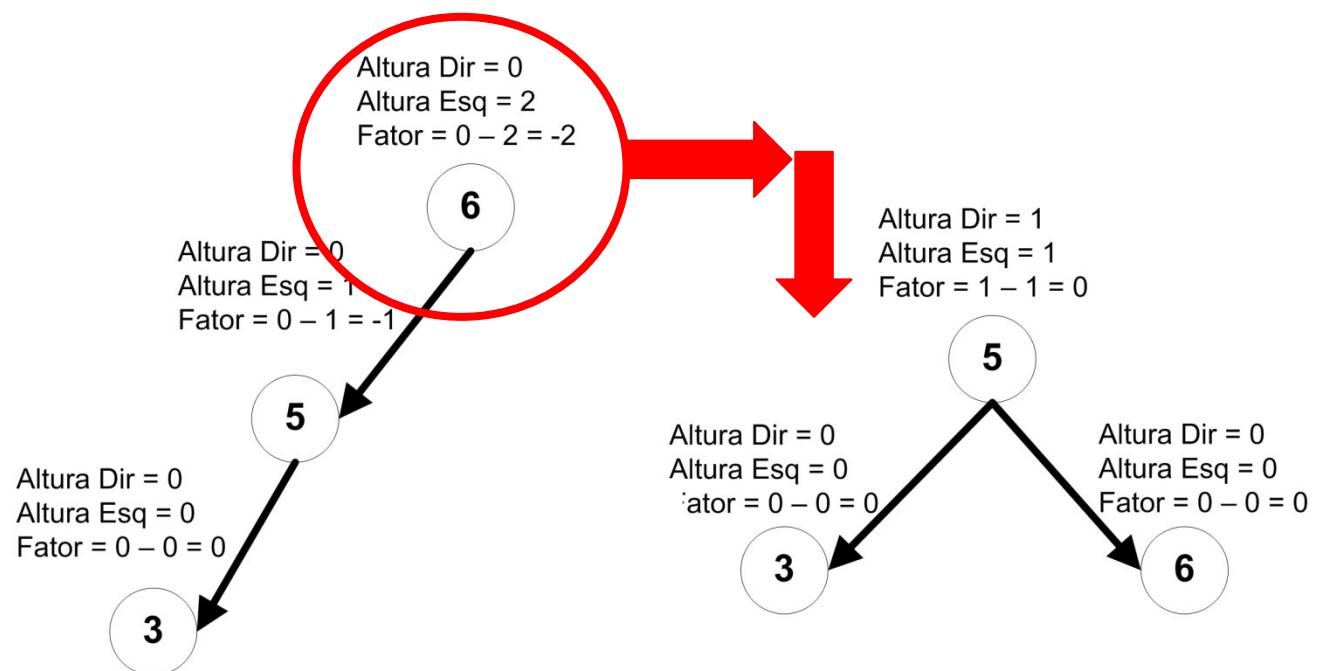
1
Rotação à esquerda no nó com fator 1 e à direita no com -2



Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à direita com fator 1

Rotação à esquerda no nó com fator 1 e à direita no com -2

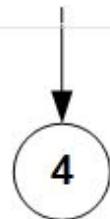


Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente.

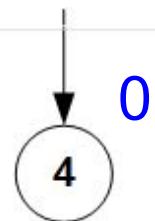
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente.



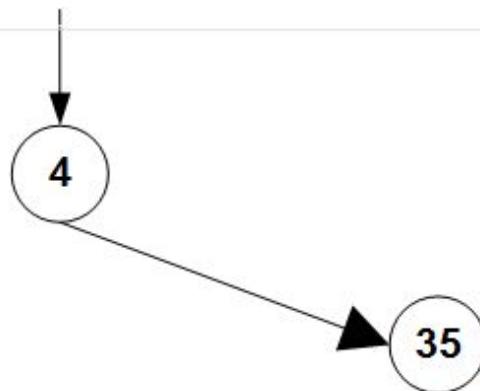
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



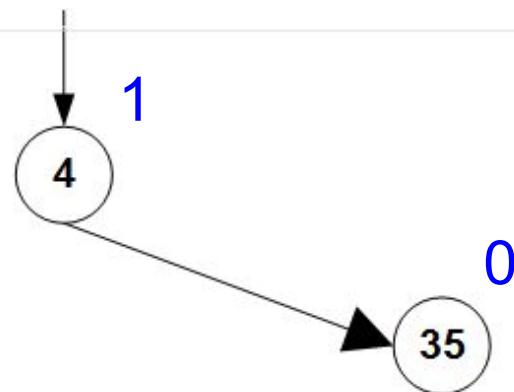
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



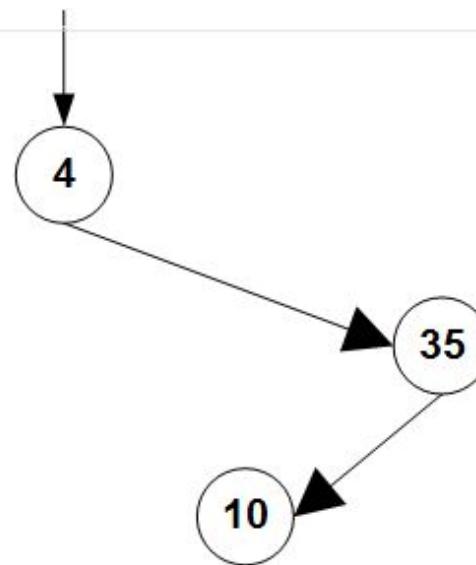
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



Exemplo

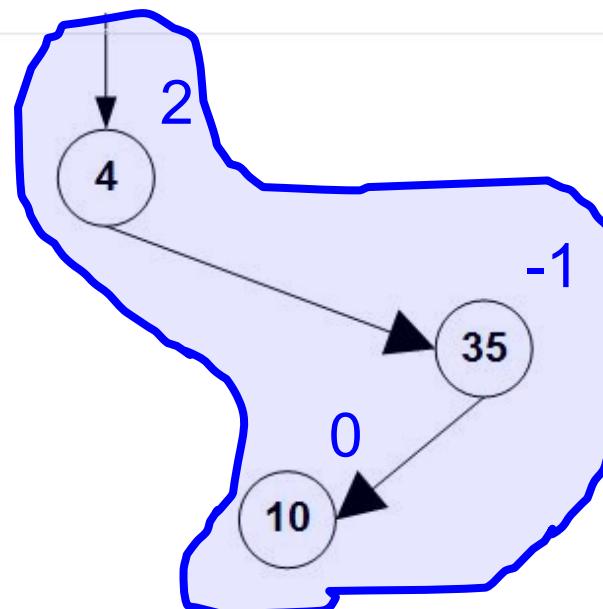
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20** respectivamente



Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20** respectivamente

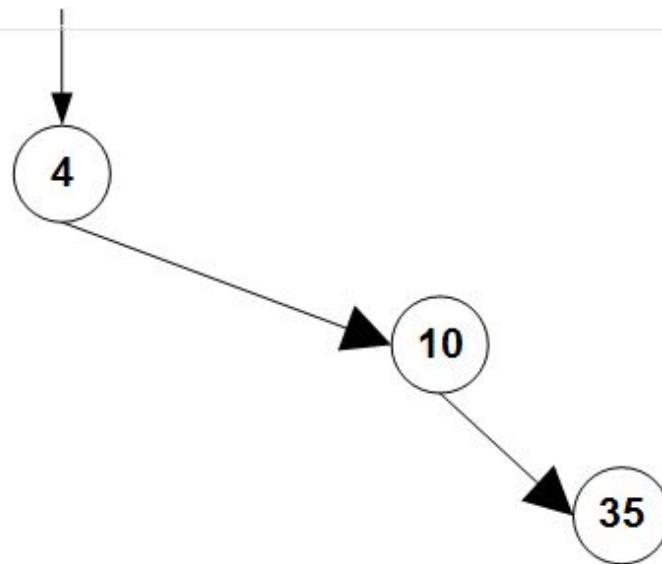
rotação Dir (35) Esq (4)



Como o fator(4) = 2 e seu filho à direita -1, faremos uma rotação DirEsq

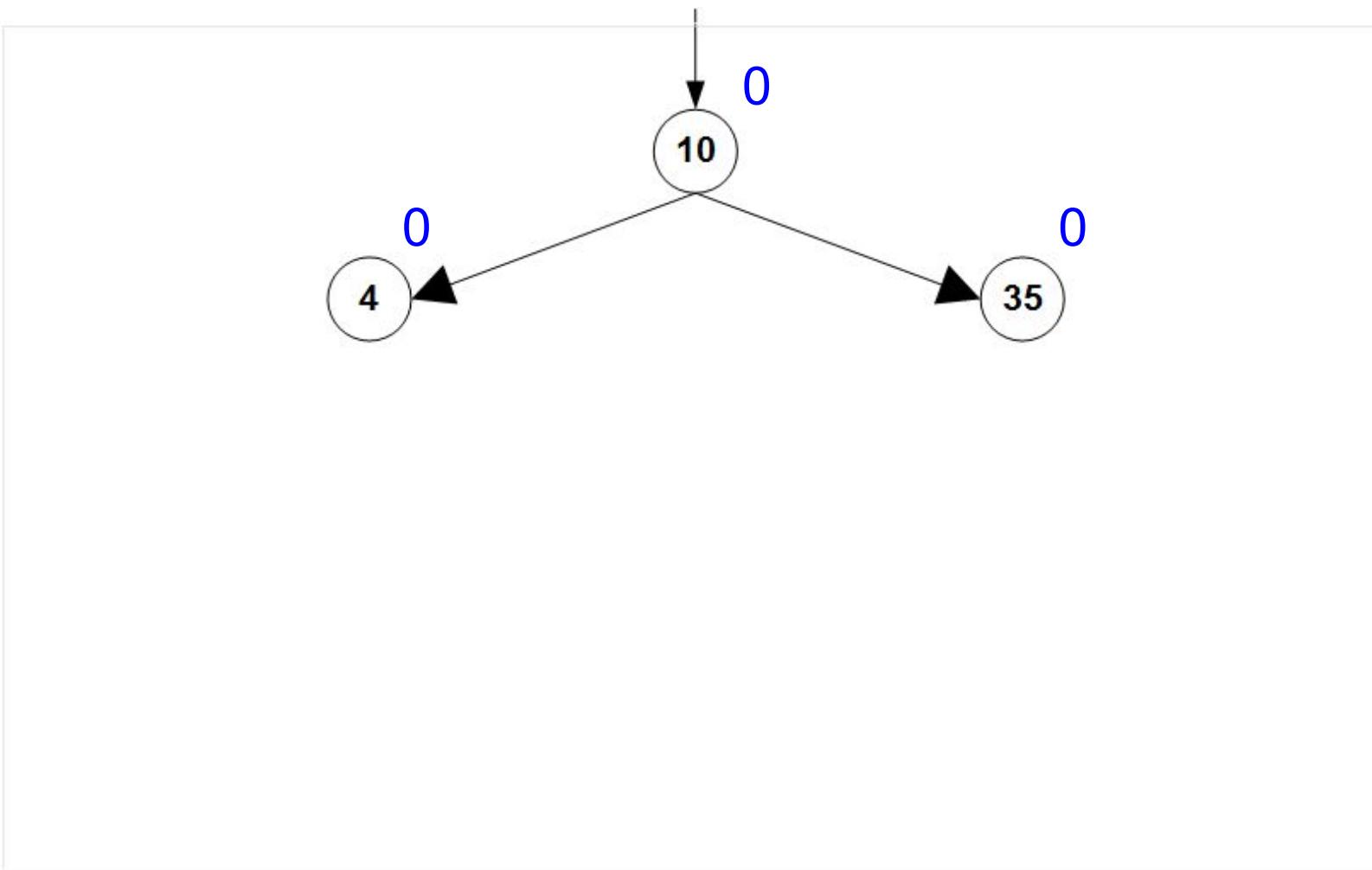
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20** respectivamente rotação Dir (35) Esq (4)



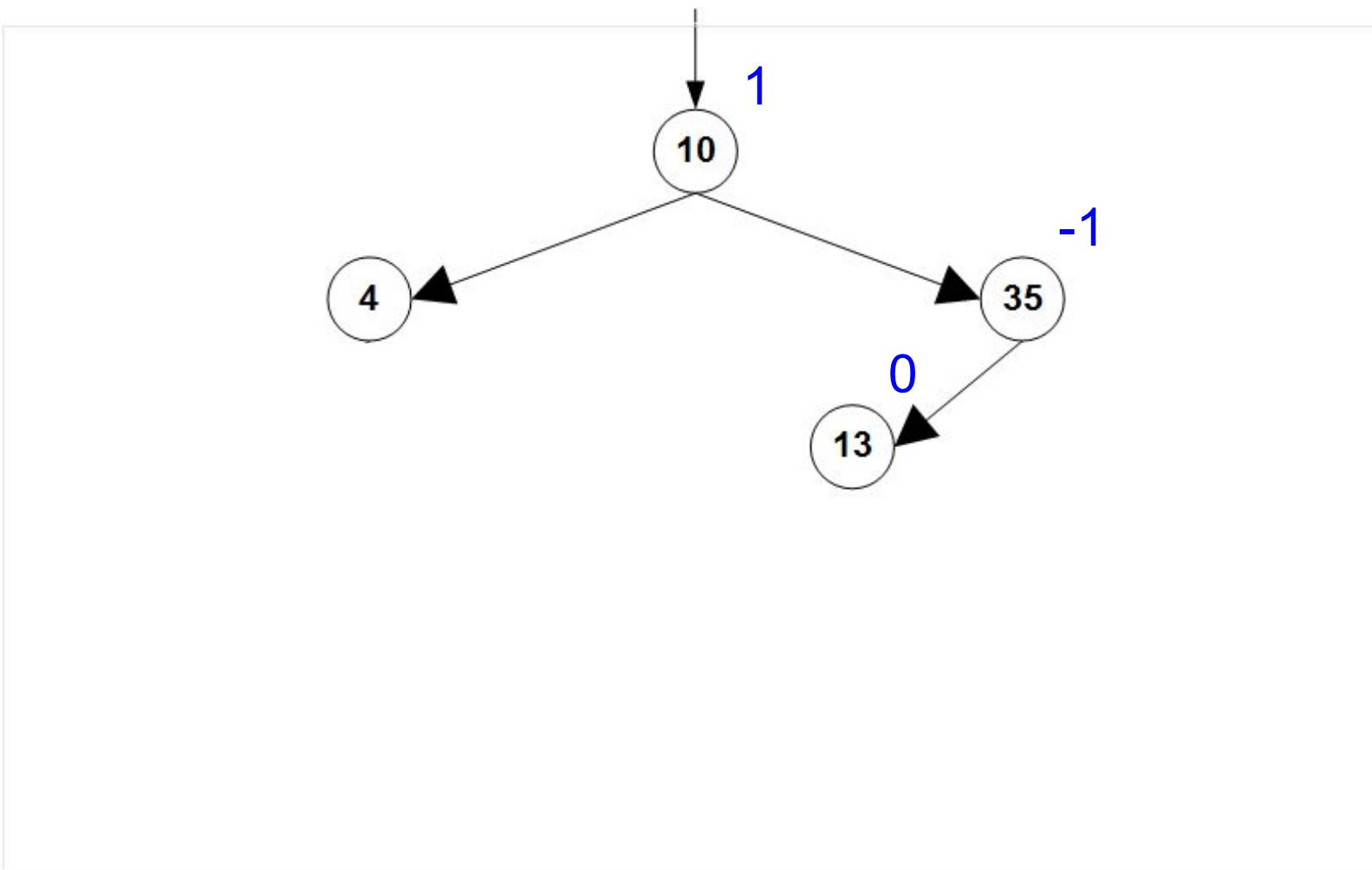
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20** respectivamente rotação Dir (35) Esq (4)



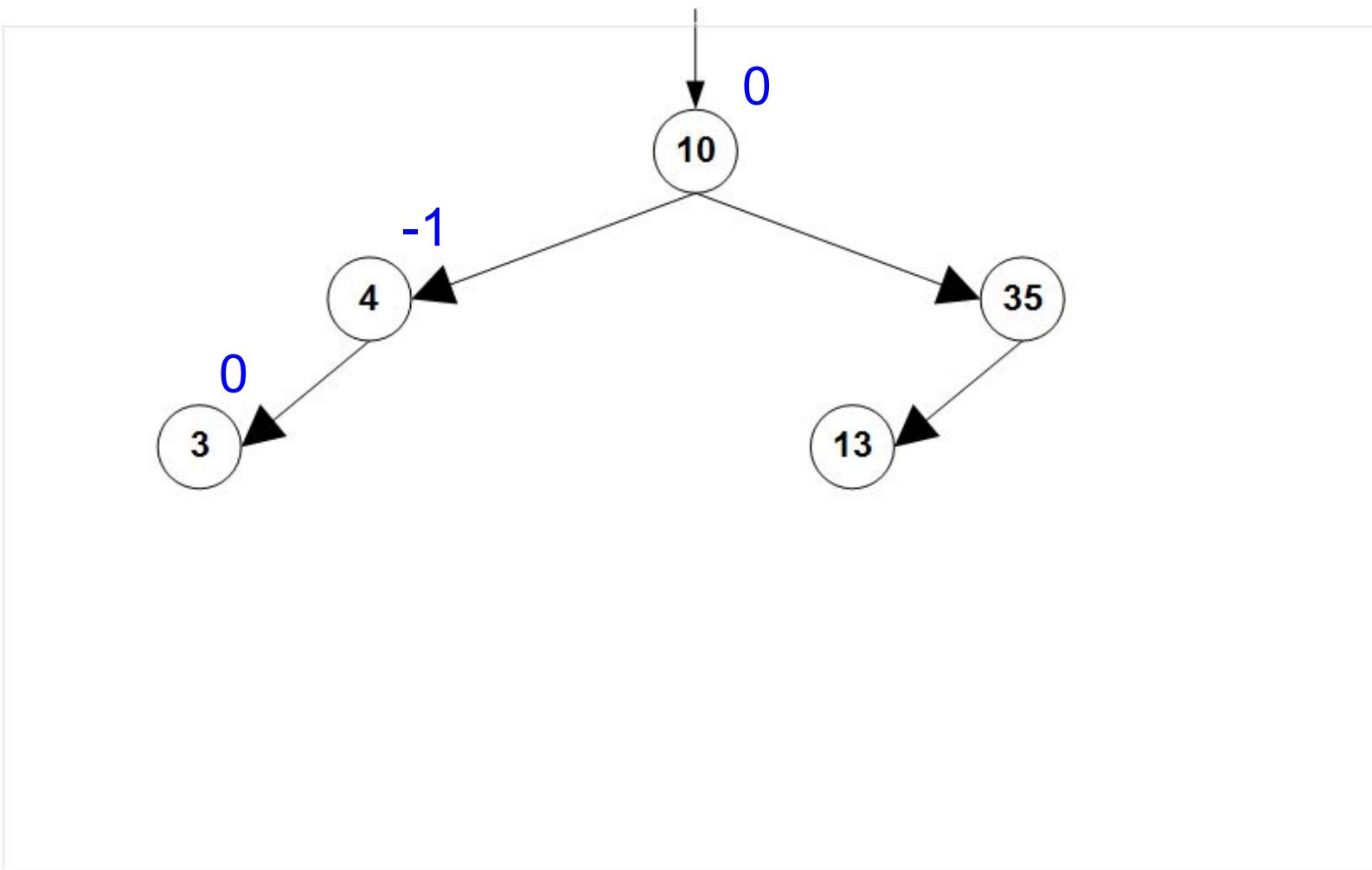
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20** respectivamente



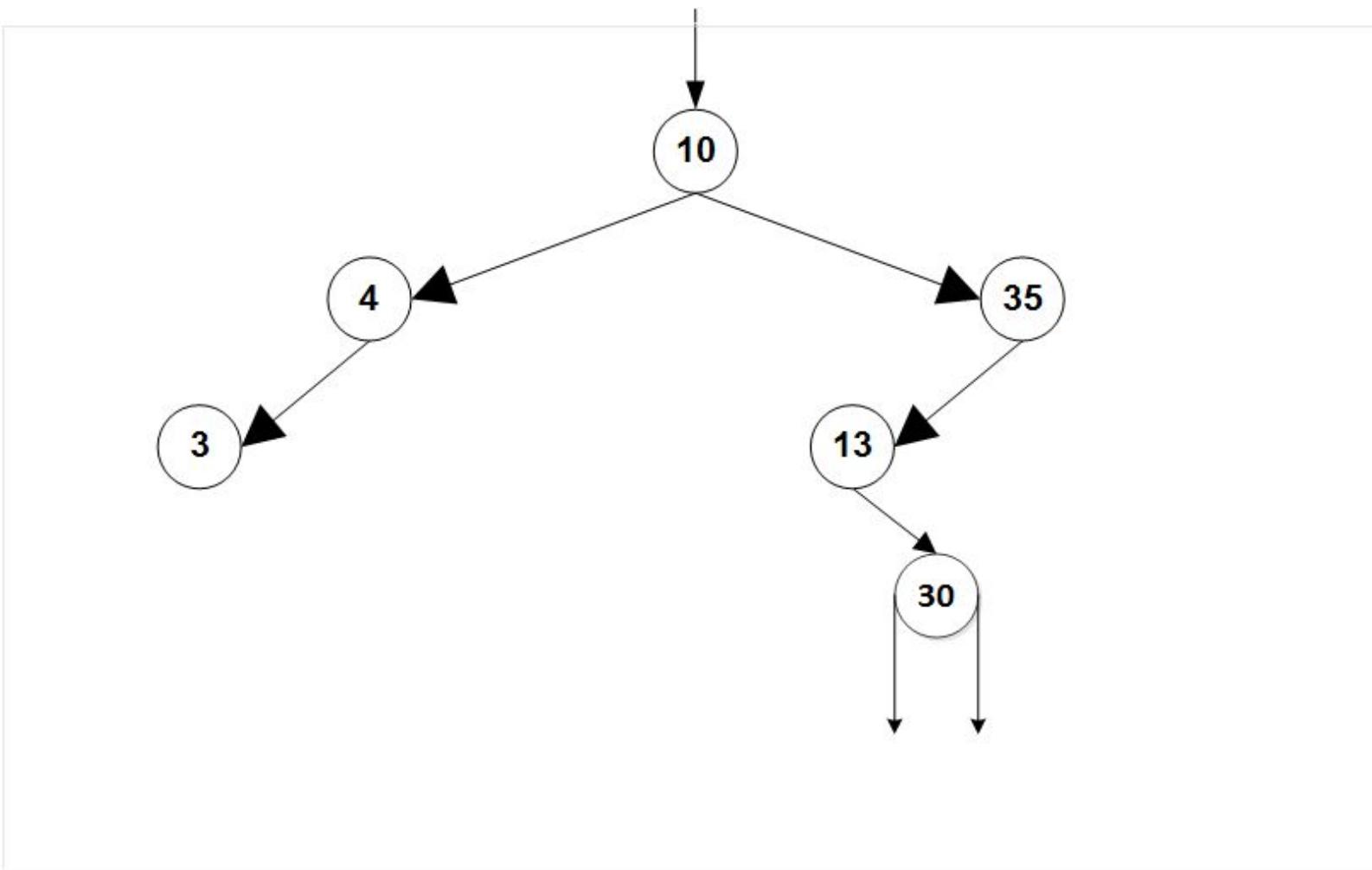
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20** respectivamente



Exemplo

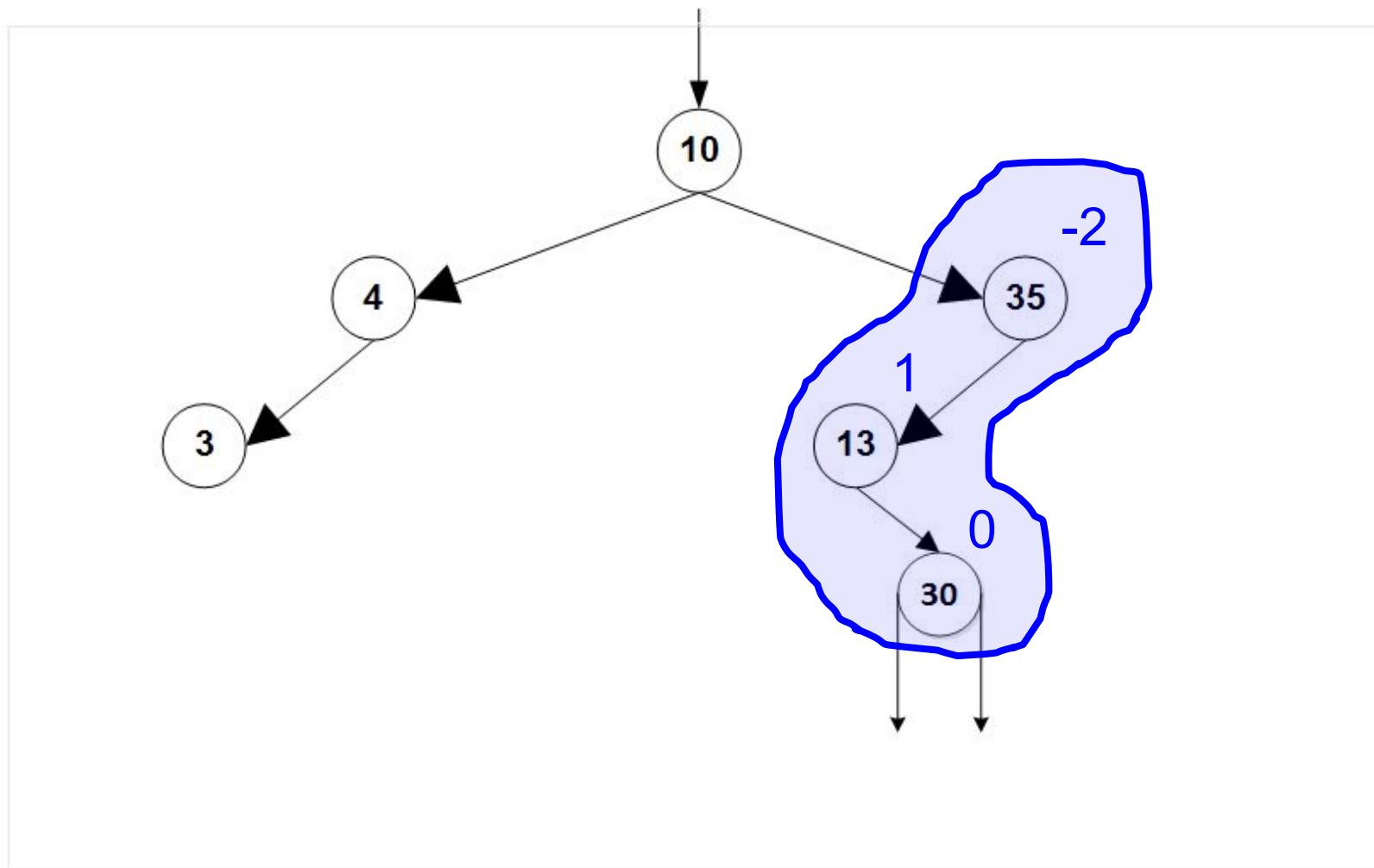
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20** respectivamente



Exemplo

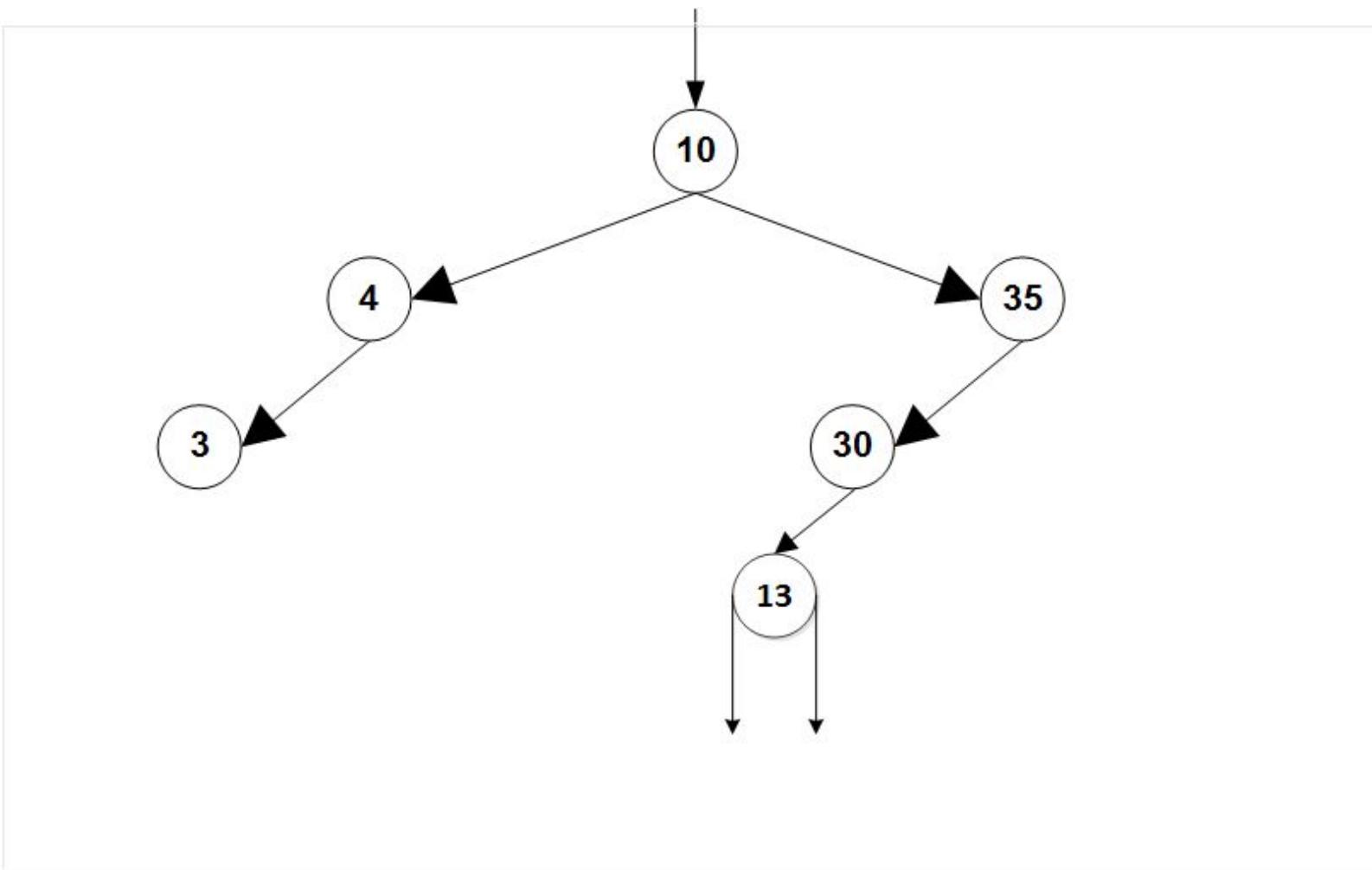
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20** respectivamente

rotação Esq (13) Dir (35)



Exemplo

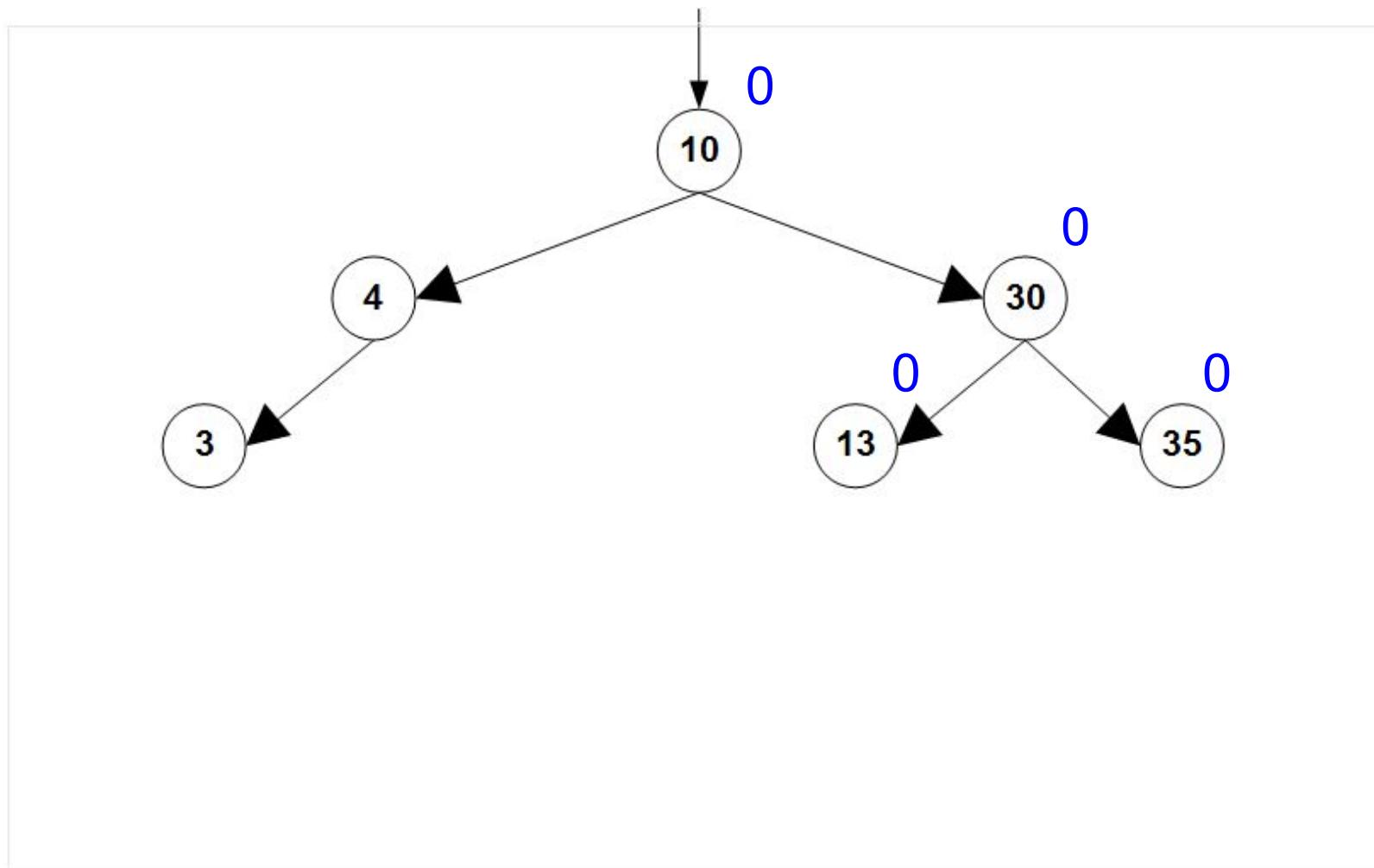
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20** respectivamente rotação Esq (13) Dir (35)



Exemplo

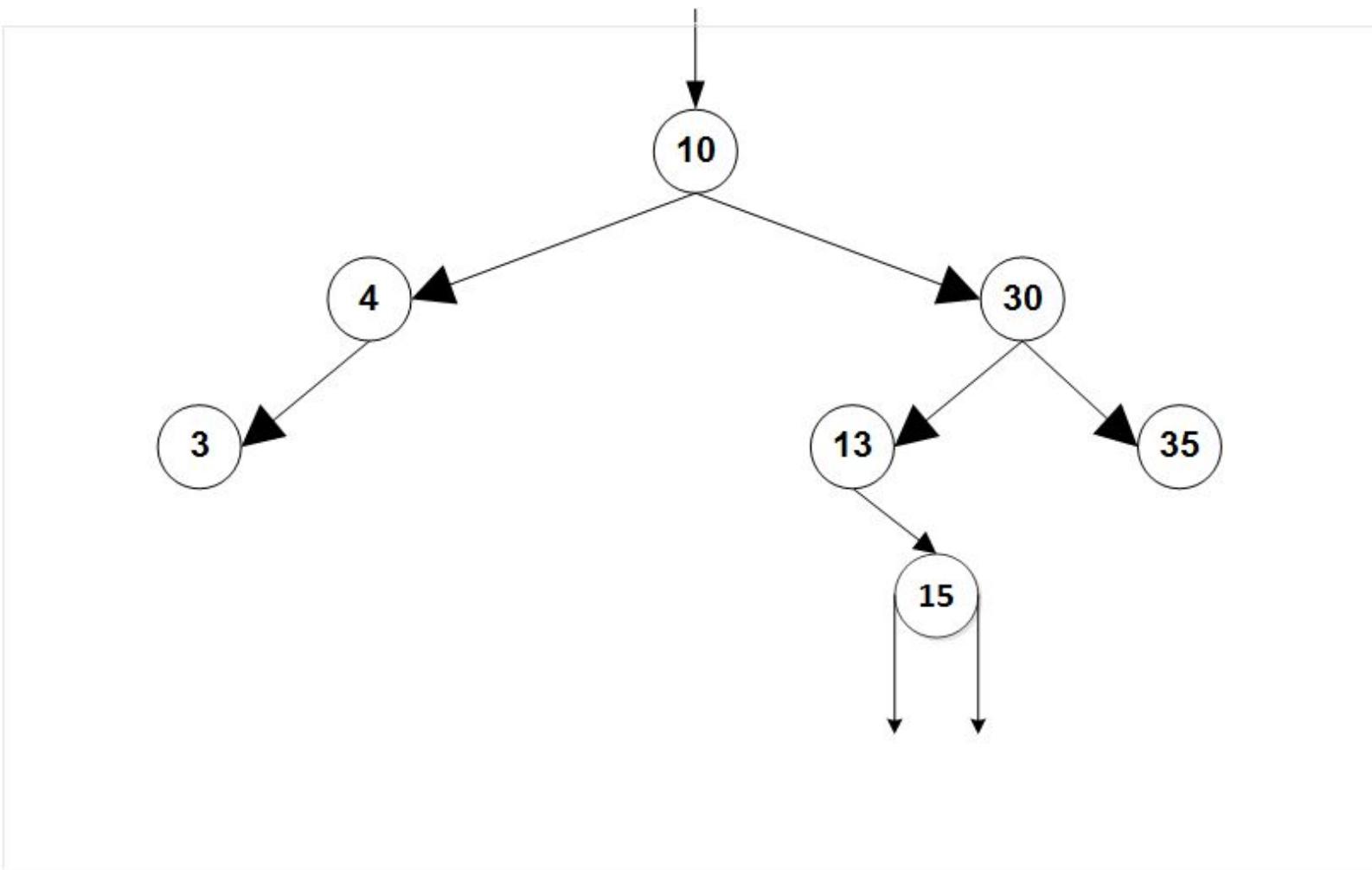
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20** respectivamente

rotação Esq (13) Dir (35)



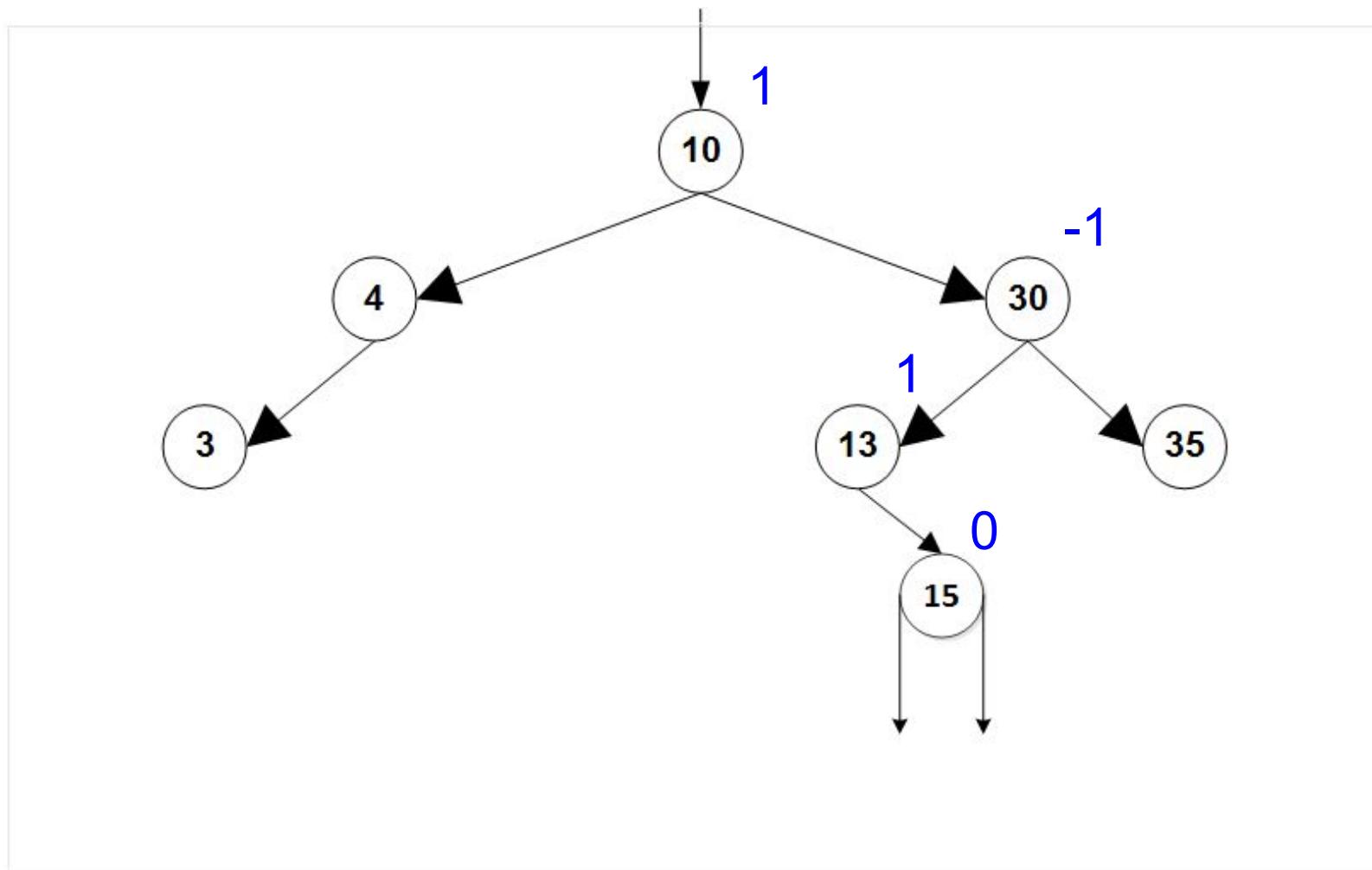
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4, 35, 10, 13, 3, 30, 15**, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



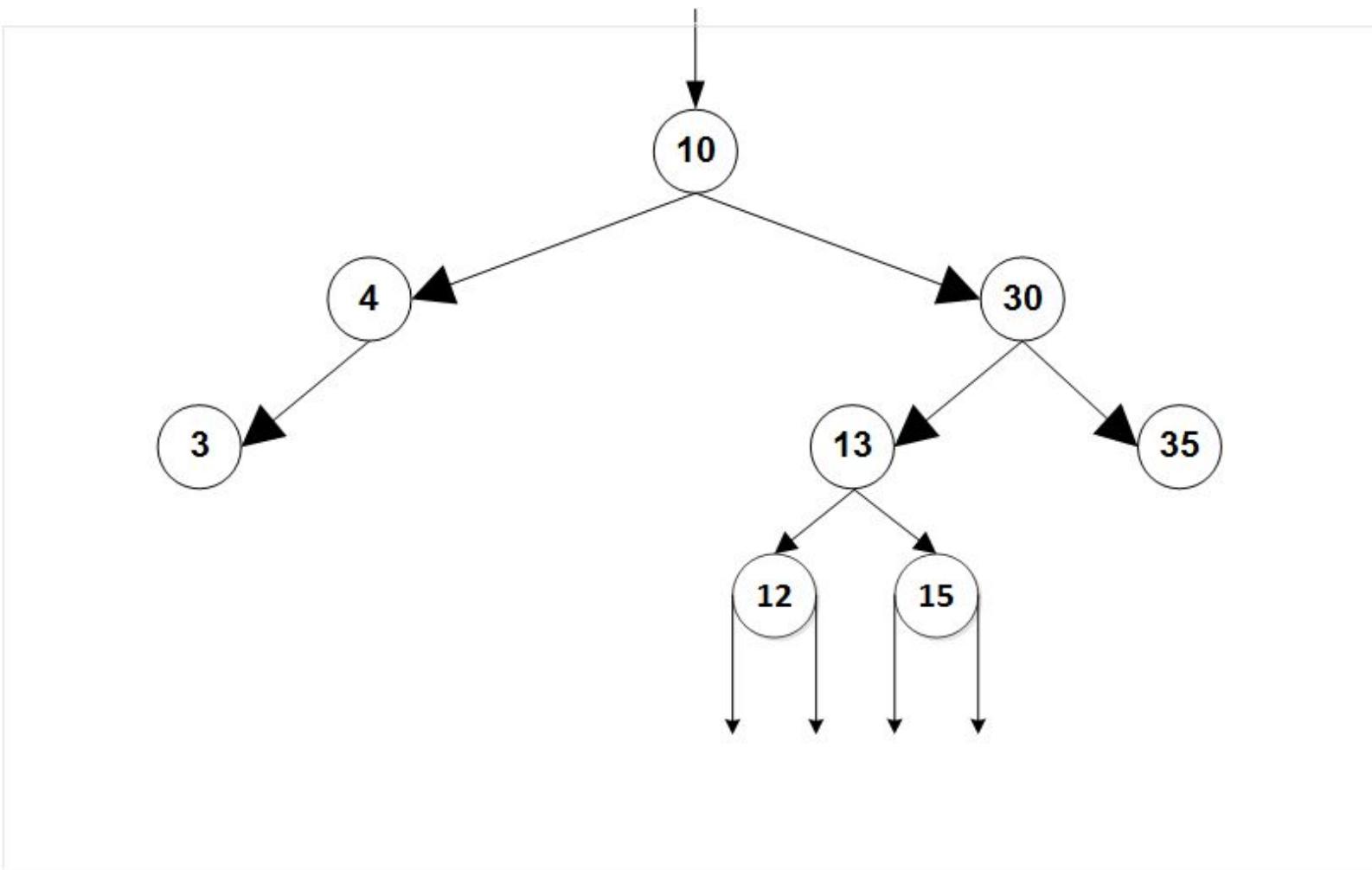
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40** e 20 respectivamente



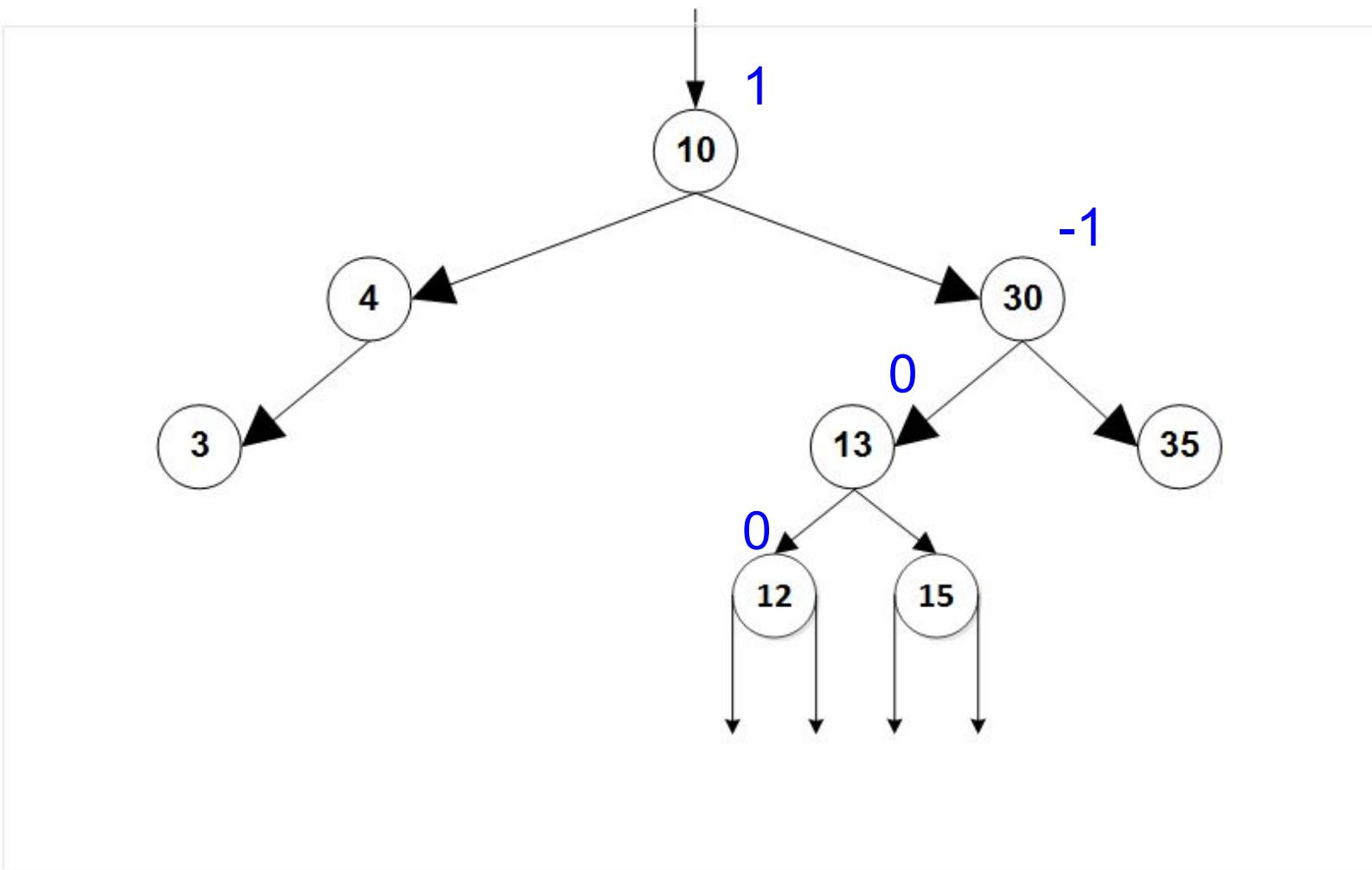
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40** e 20 respectivamente



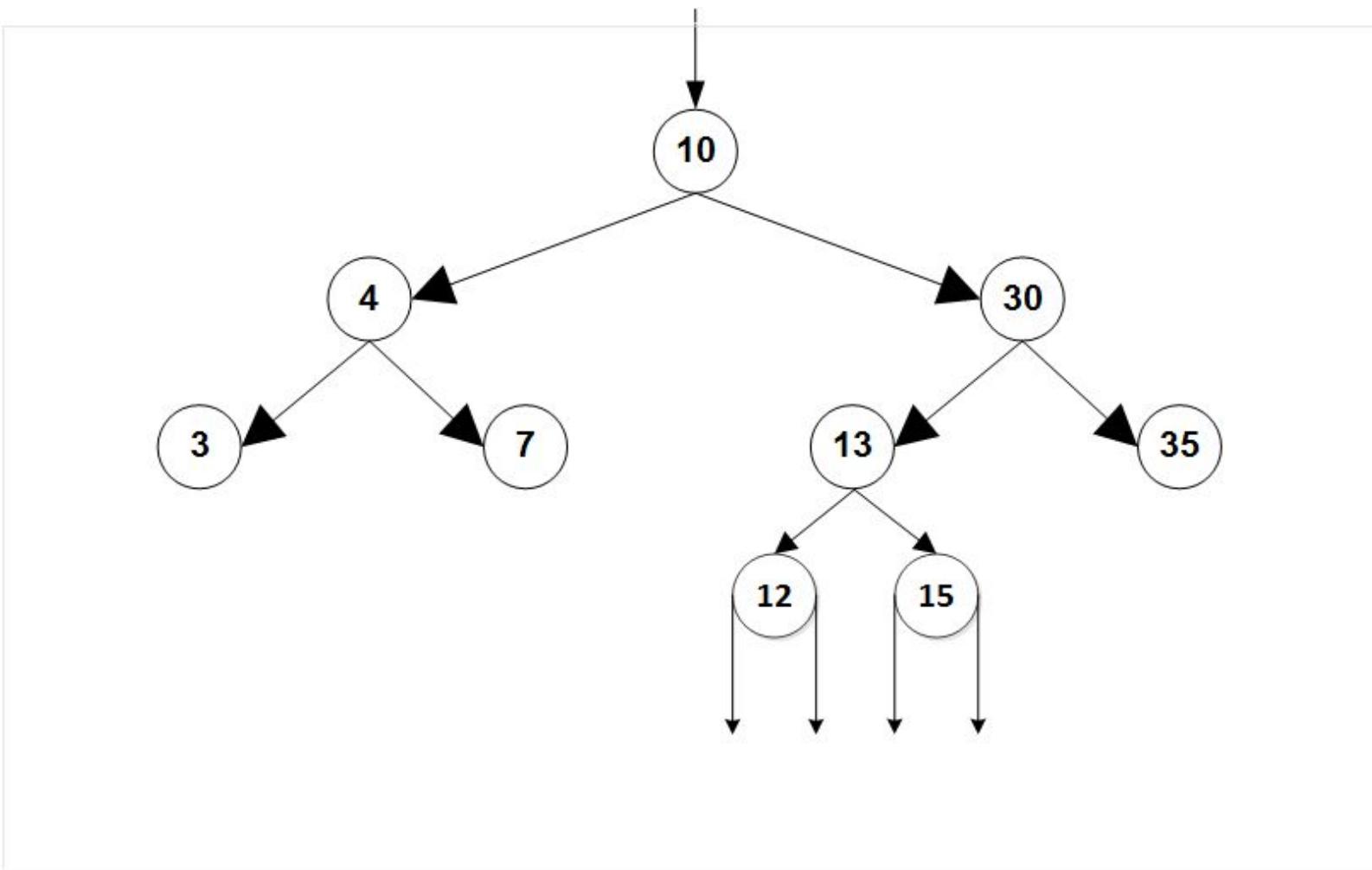
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40** e 20 respectivamente



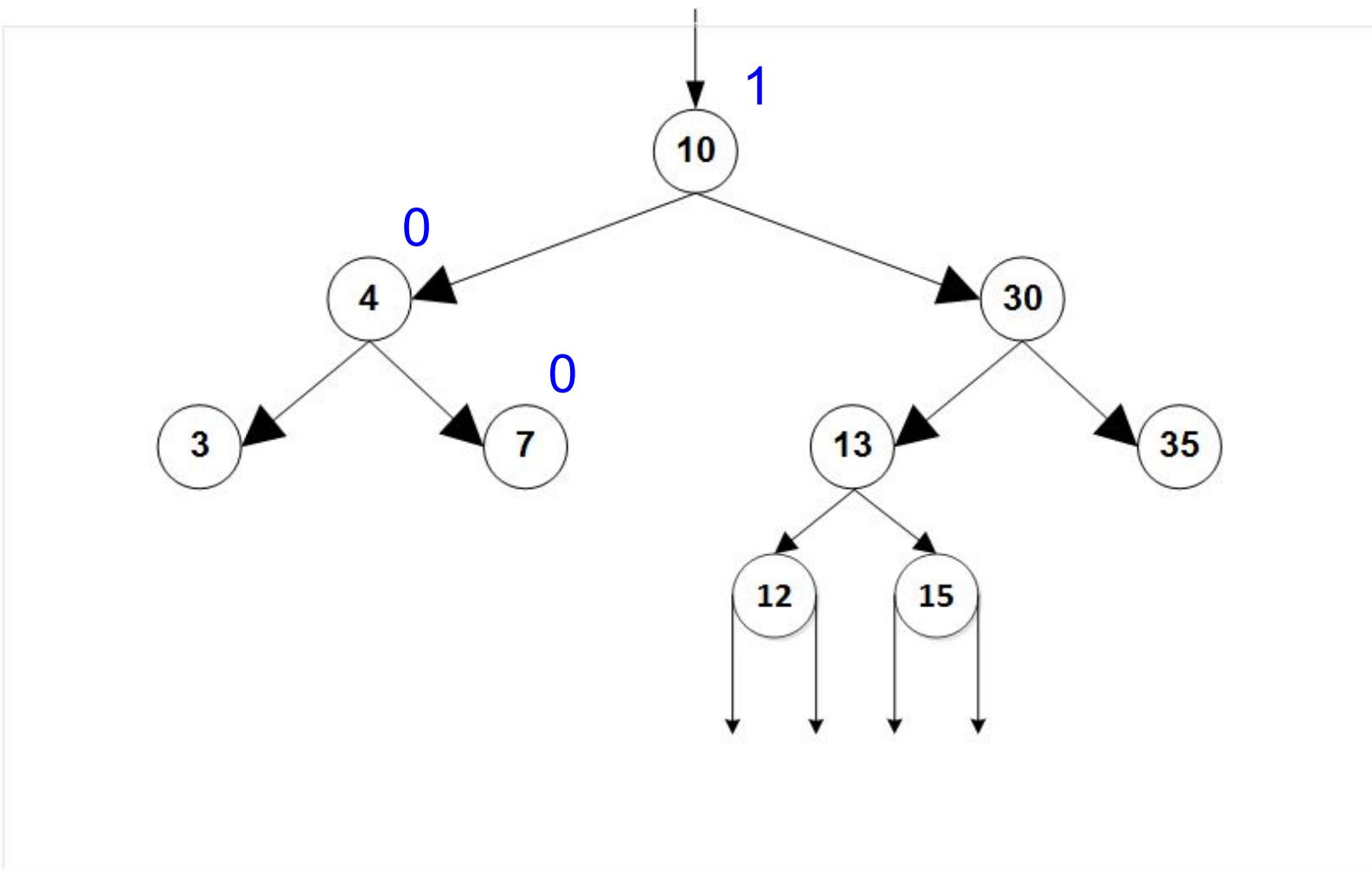
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40** e 20 respectivamente



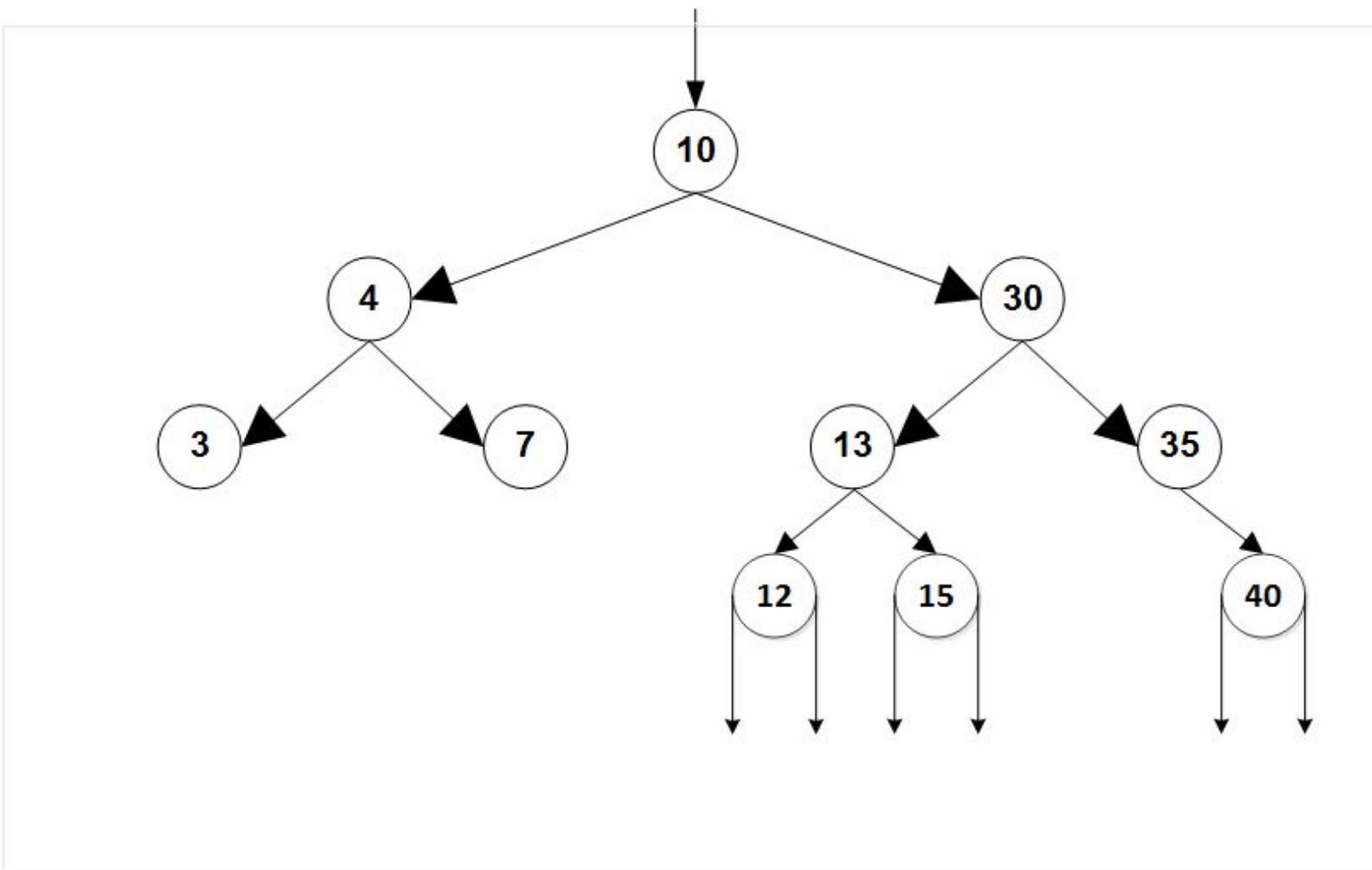
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40** e 20 respectivamente



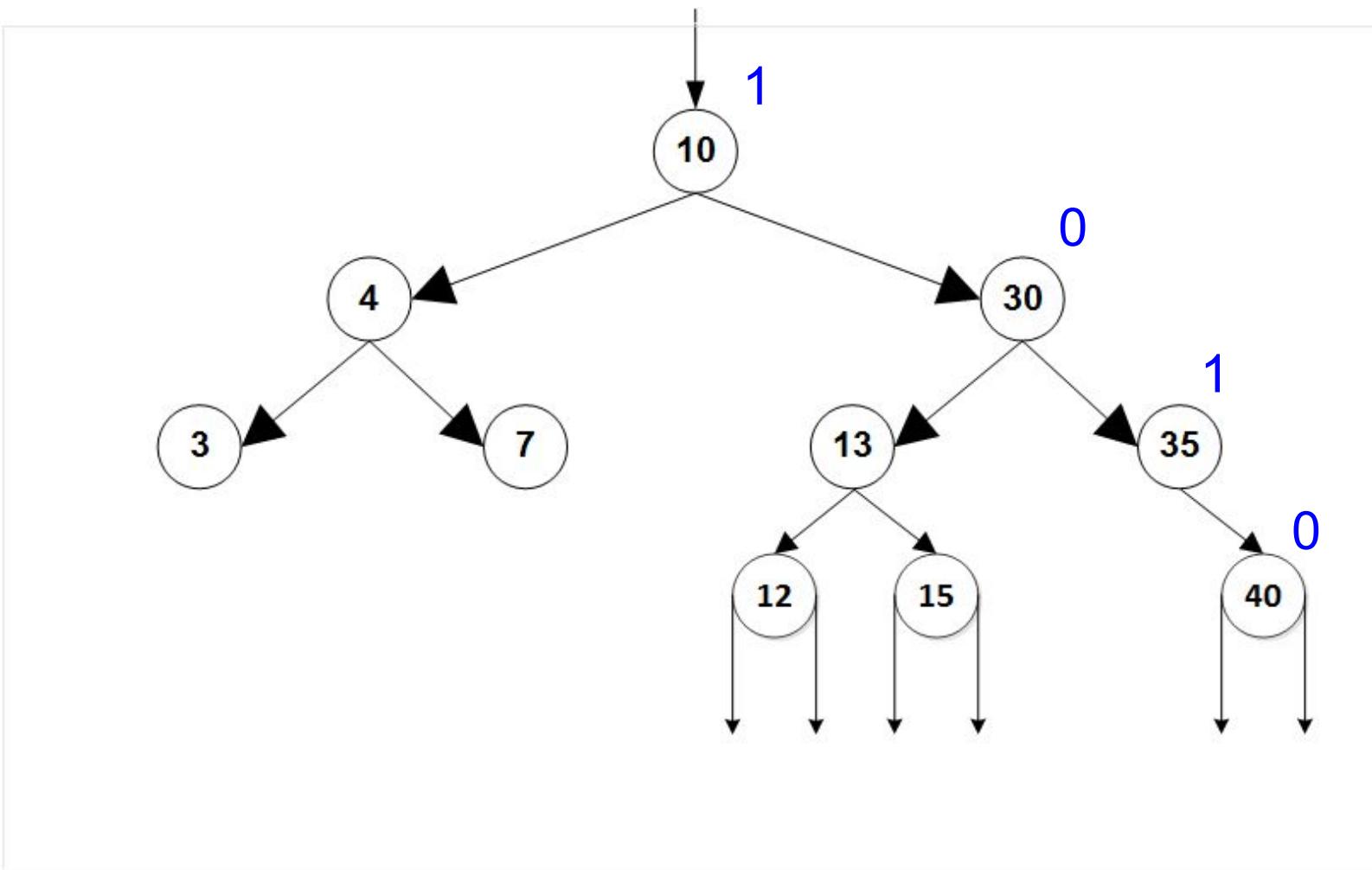
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40** e 20 respectivamente



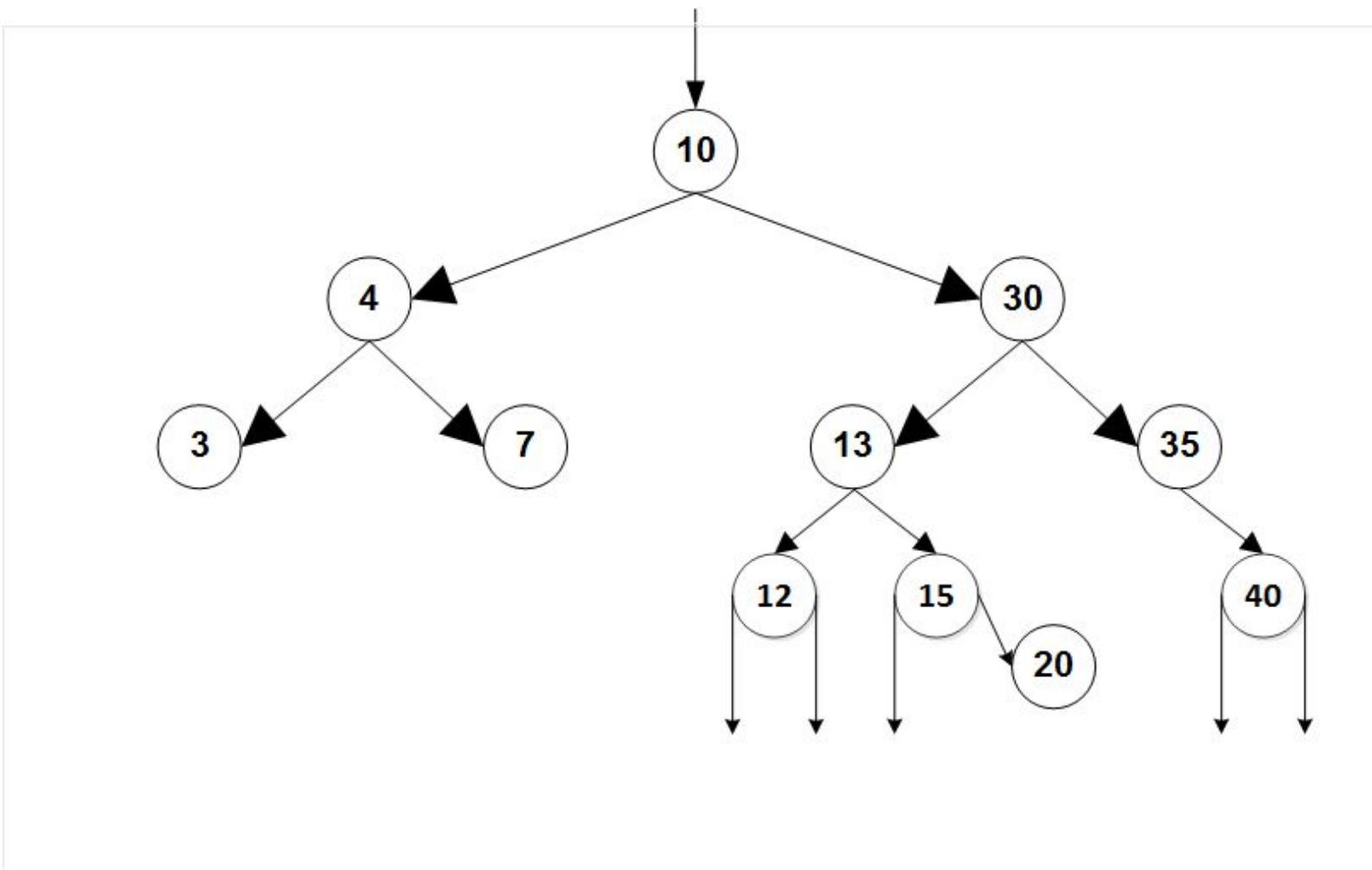
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40** e 20 respectivamente



Exemplo

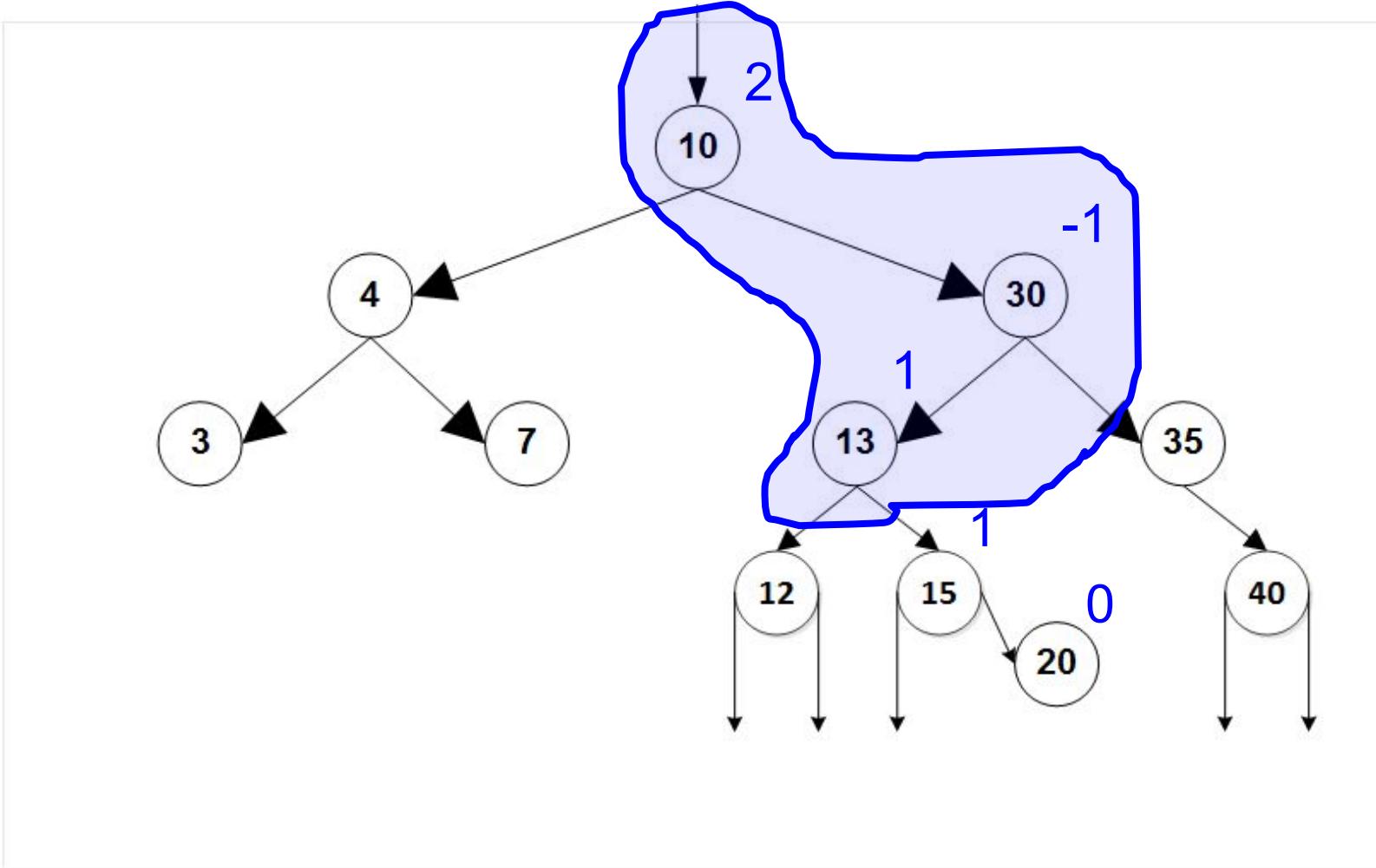
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40** e **20** respectivamente



Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40** e **20** respectivamente

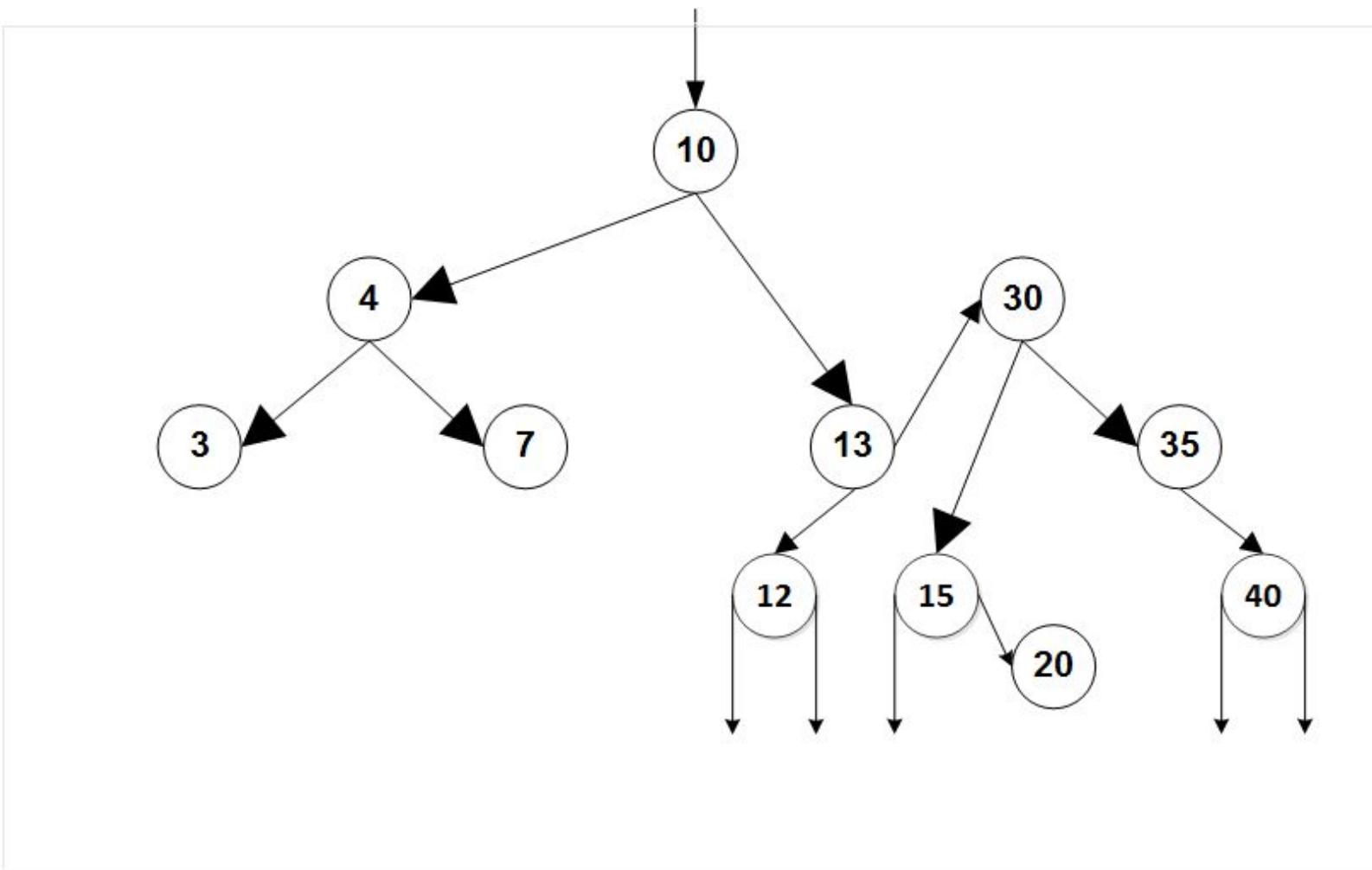
rotação Dir (30) Esq (10)



Exemplo

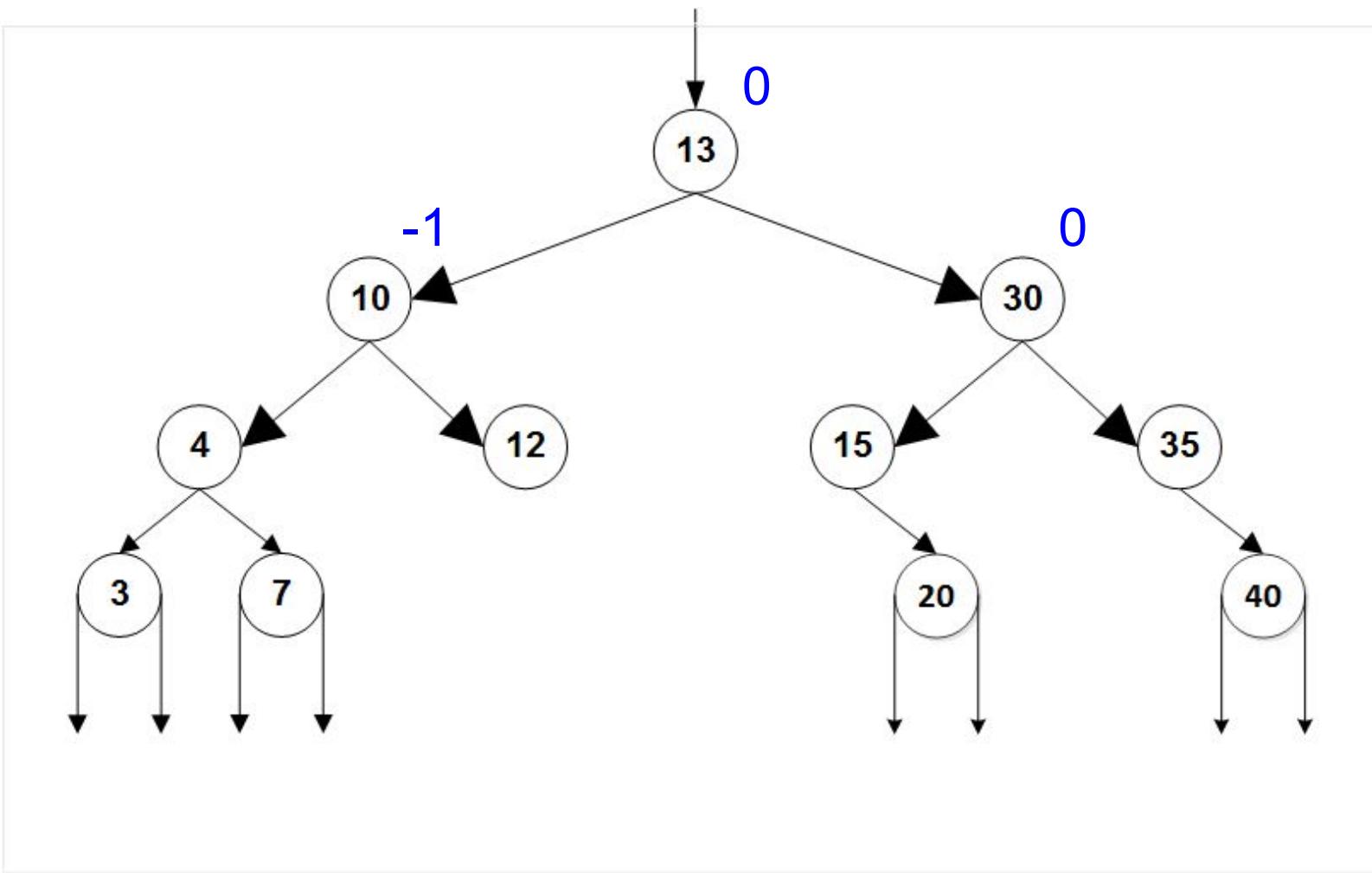
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20** respectivamente

rotação Dir (30) Esq (10)



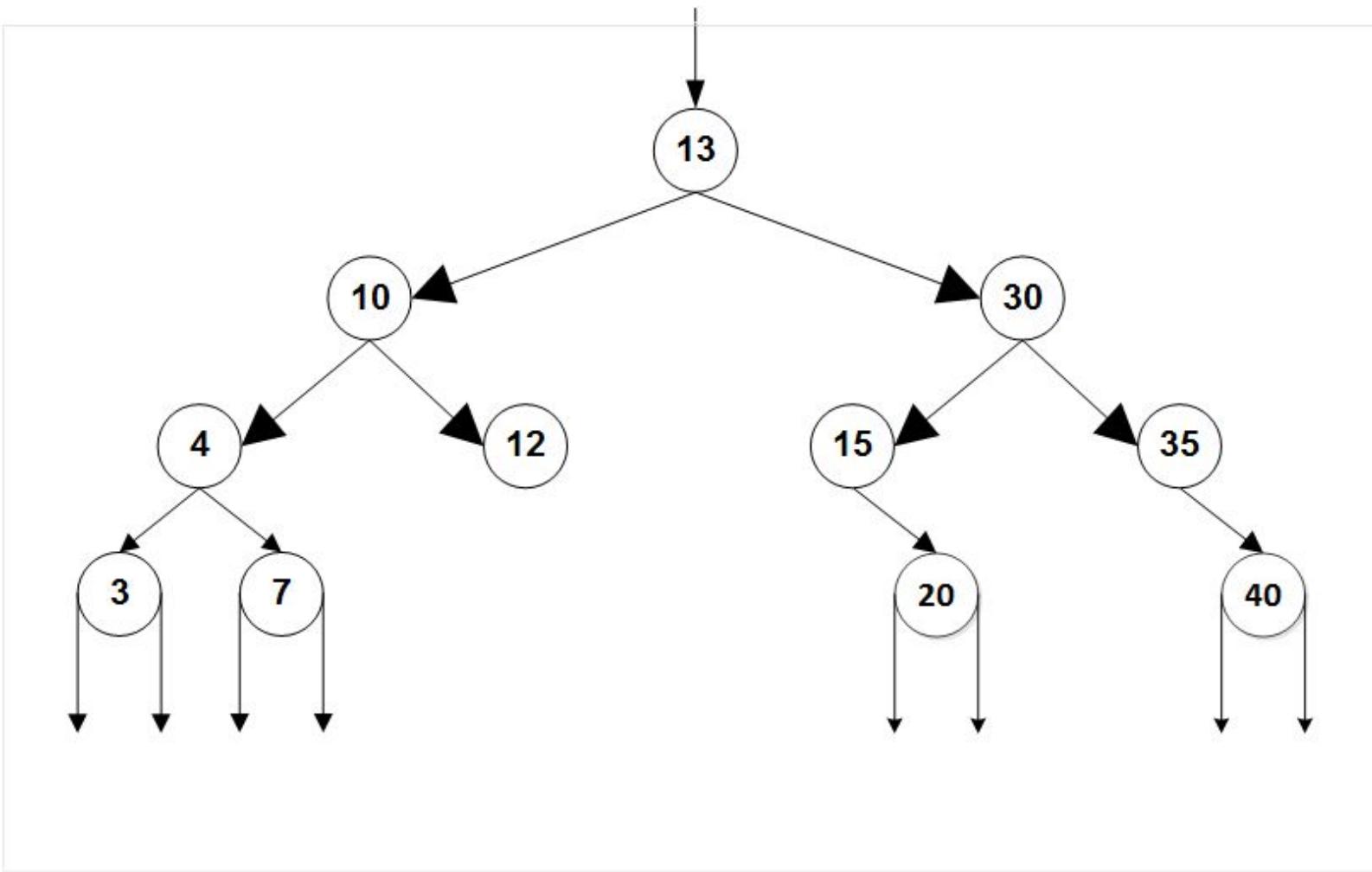
Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40** e **20** respectivamente



Exercício

- Insira o 6 na AVL abaixo



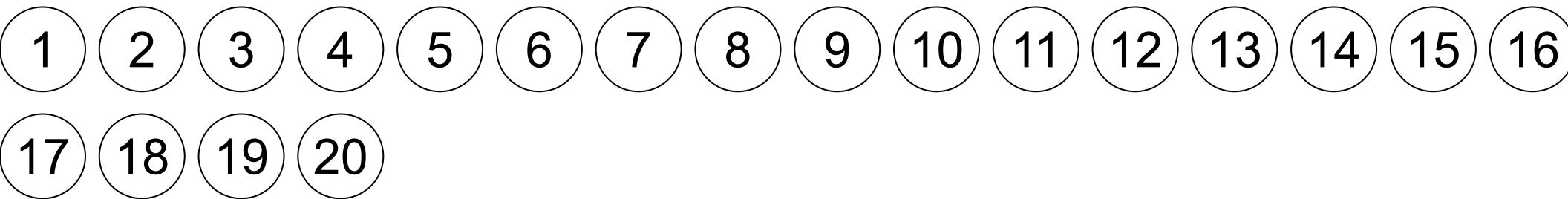
Exercício

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas dos números 1 a 20, respectivamente
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas dos números 20 a 1, respectivamente
- Para cada um dos dois exercícios anteriores, verifique sua resposta usando nosso código para a árvore AVL

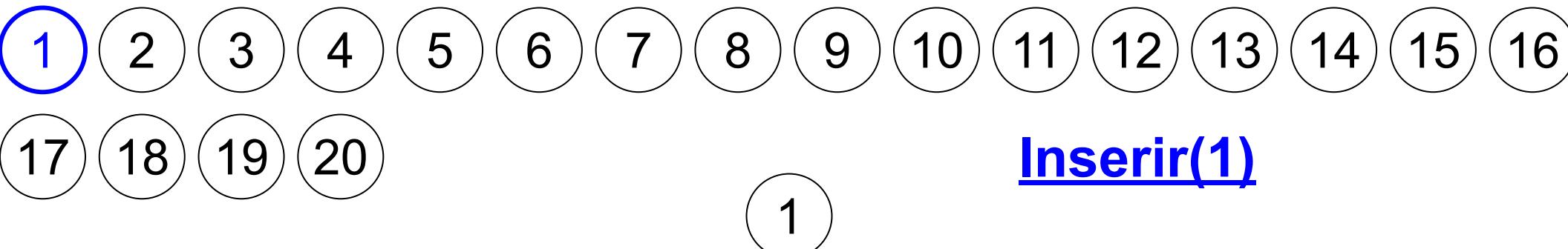
Algoritmo em C-like

Ver código em: [fonte/08/avl/](#)

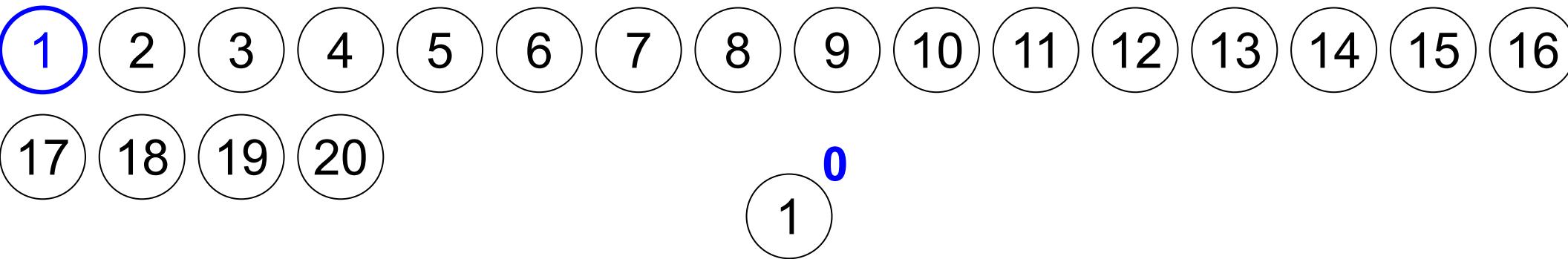
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



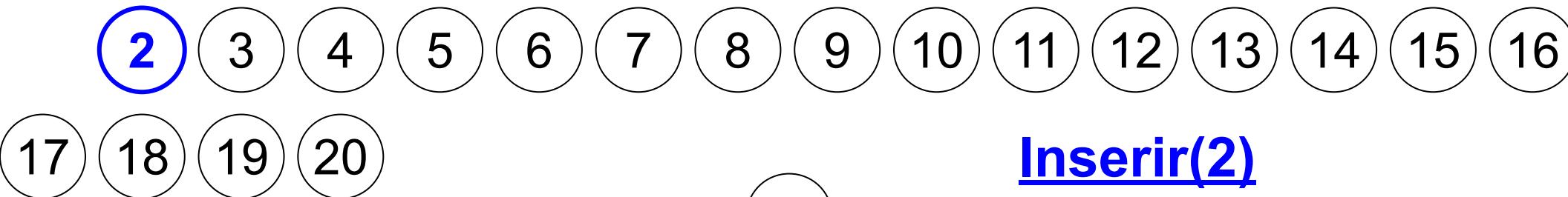
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



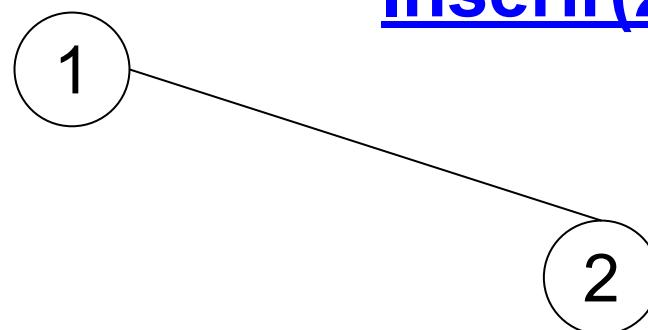
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



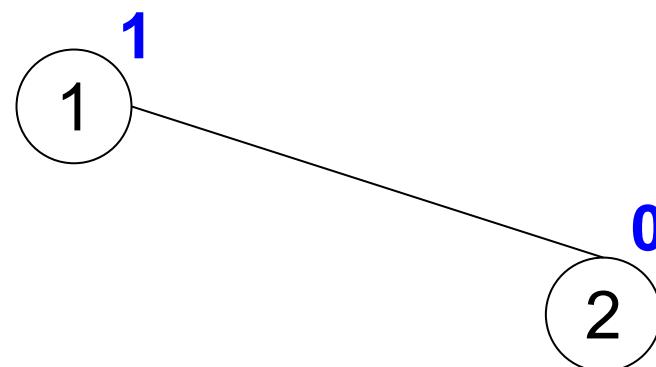
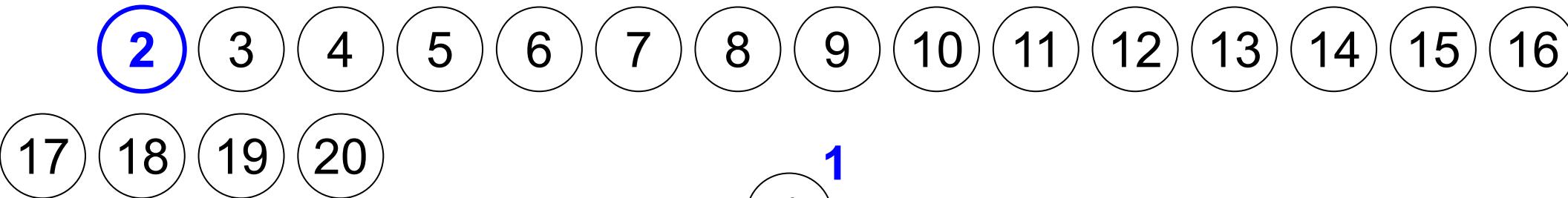
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



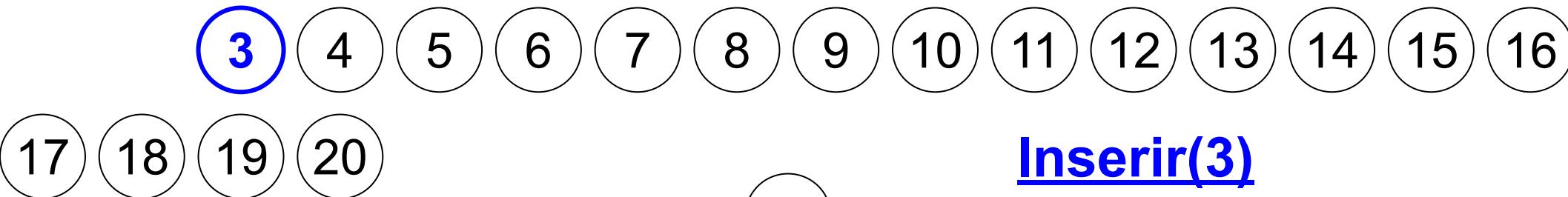
Inserir(2)



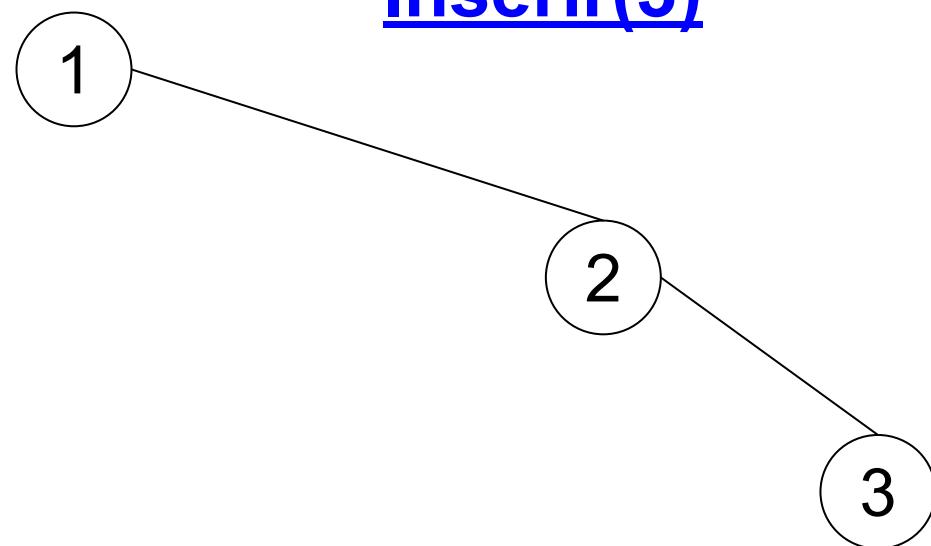
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



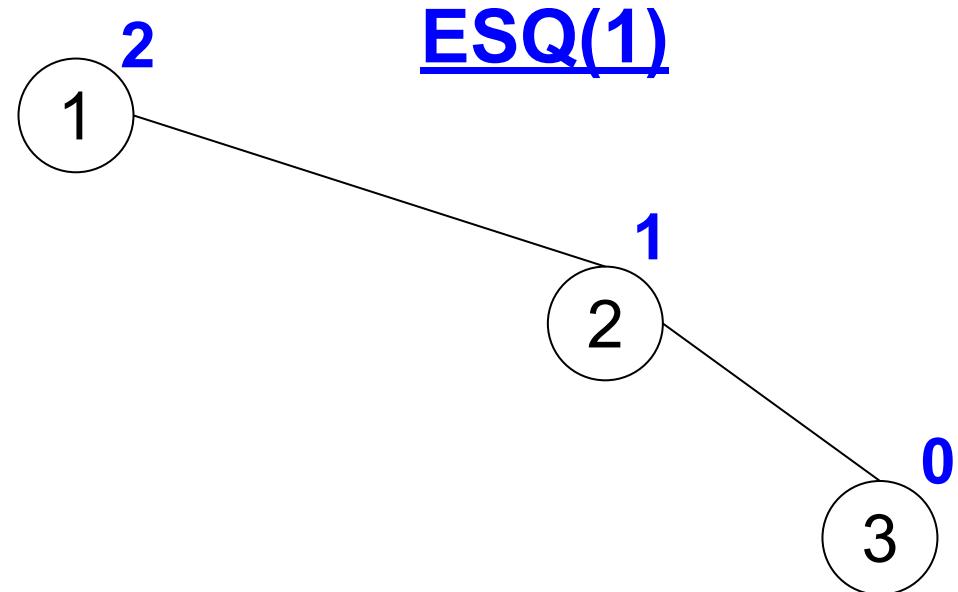
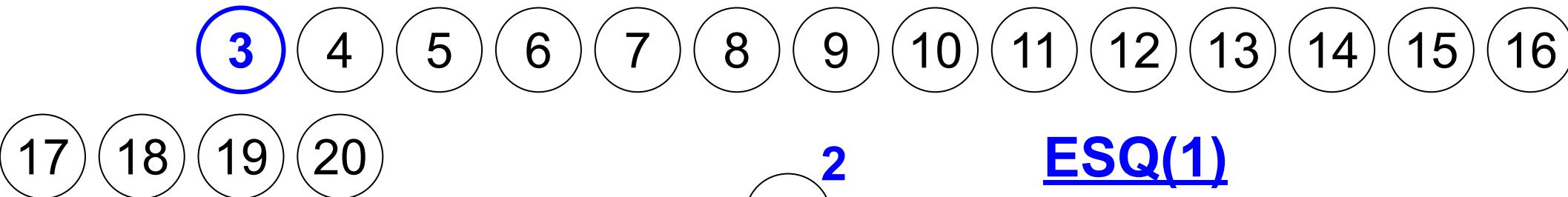
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



Inserir(3)

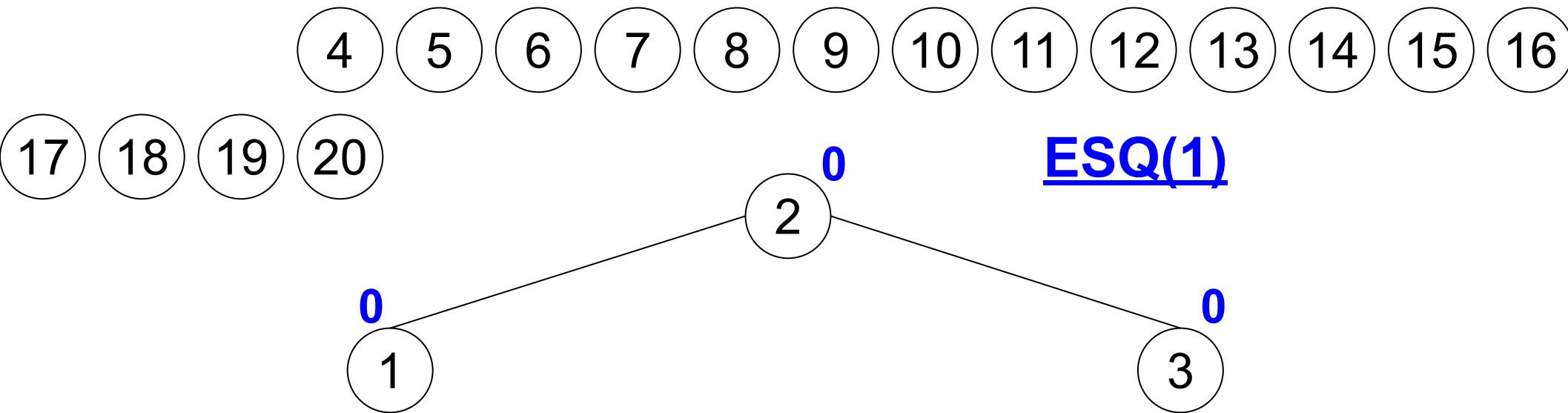


Inserir os Números 1 à 20 na AVL

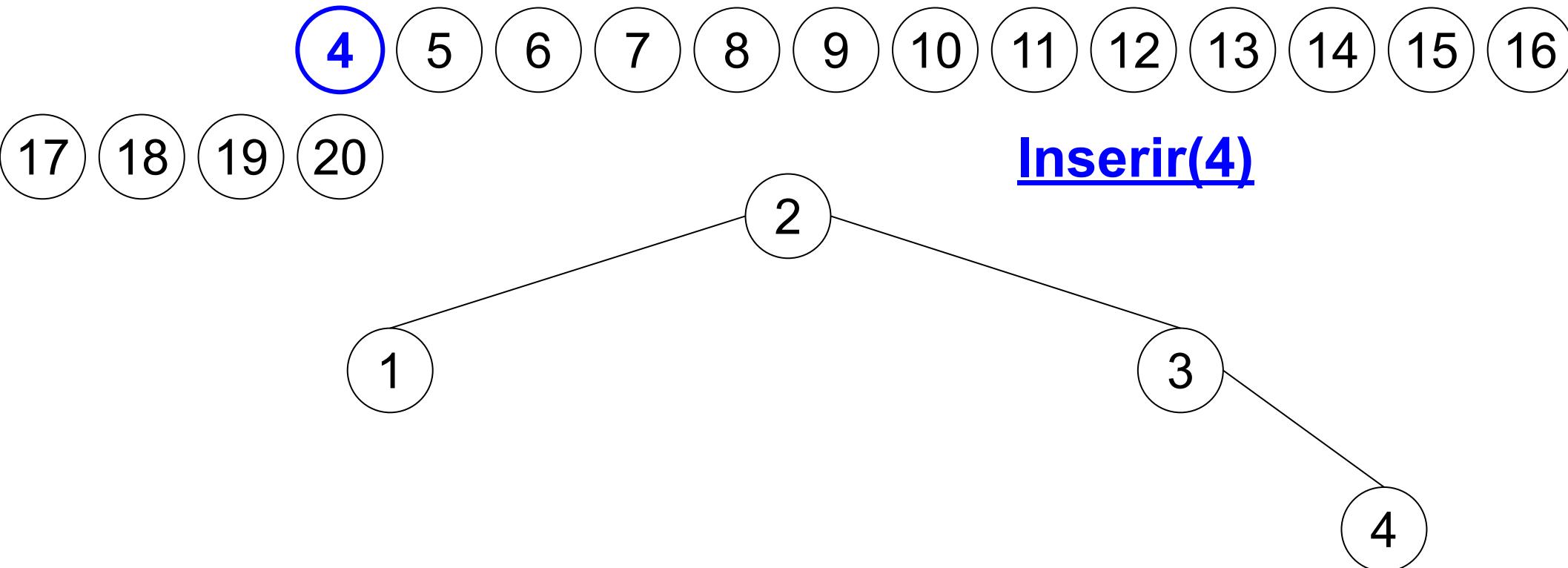


ESQ(1)

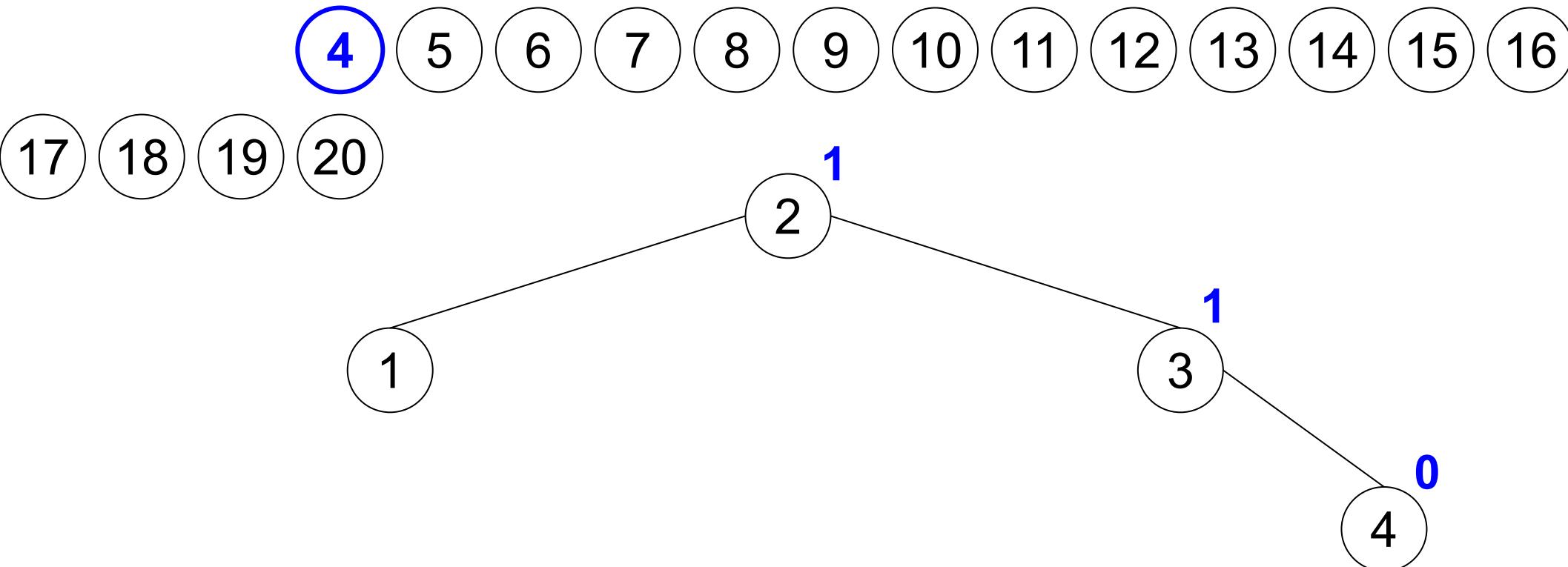
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



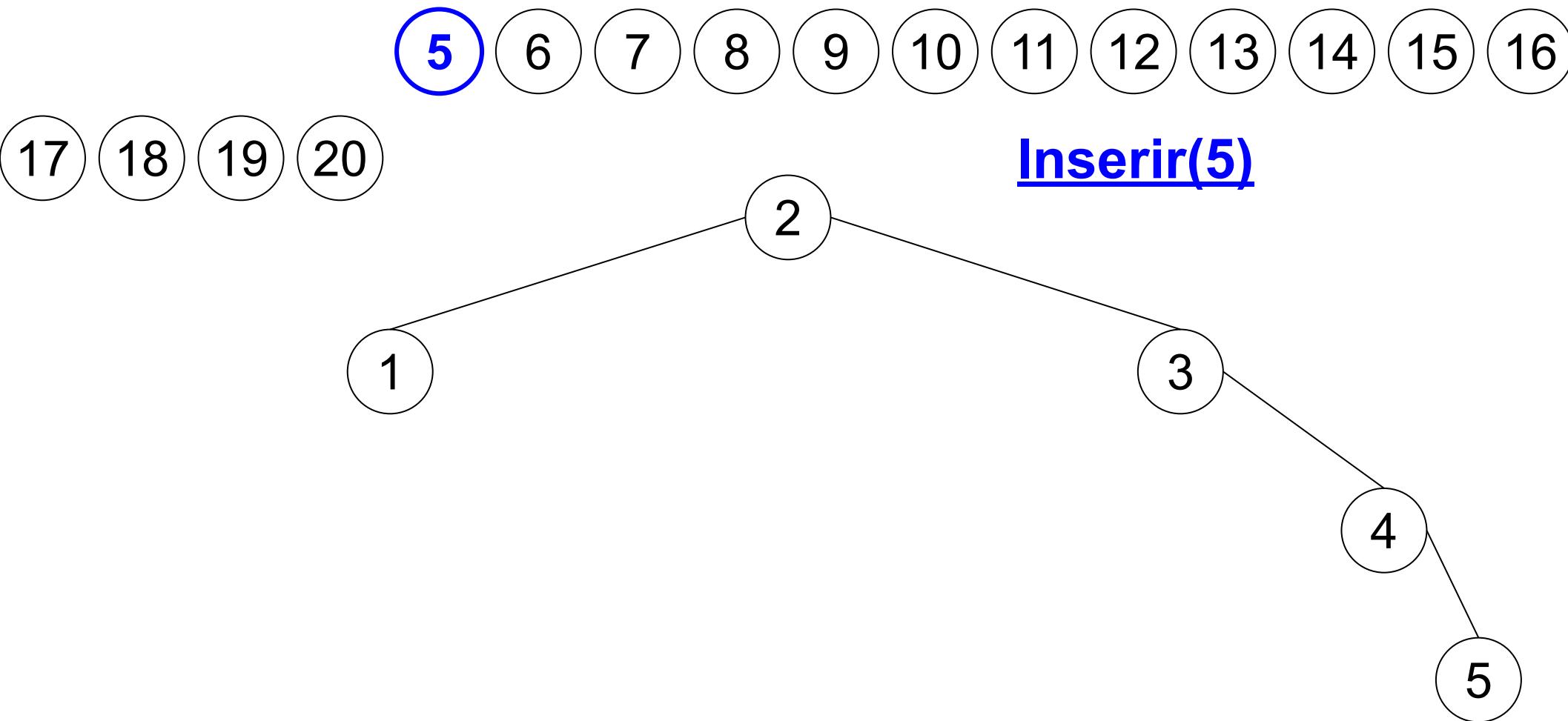
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



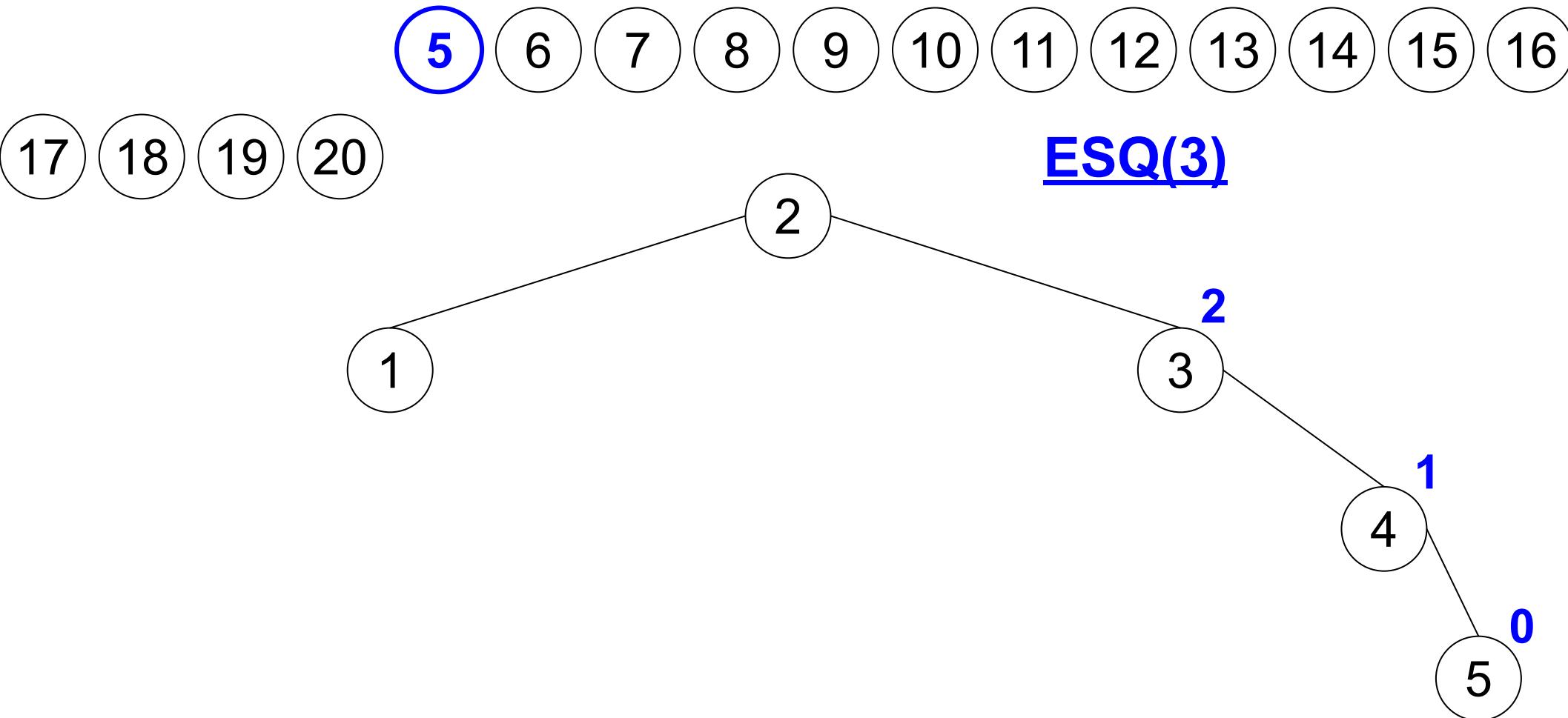
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



Inserir os Números 1 à 20 na AVL

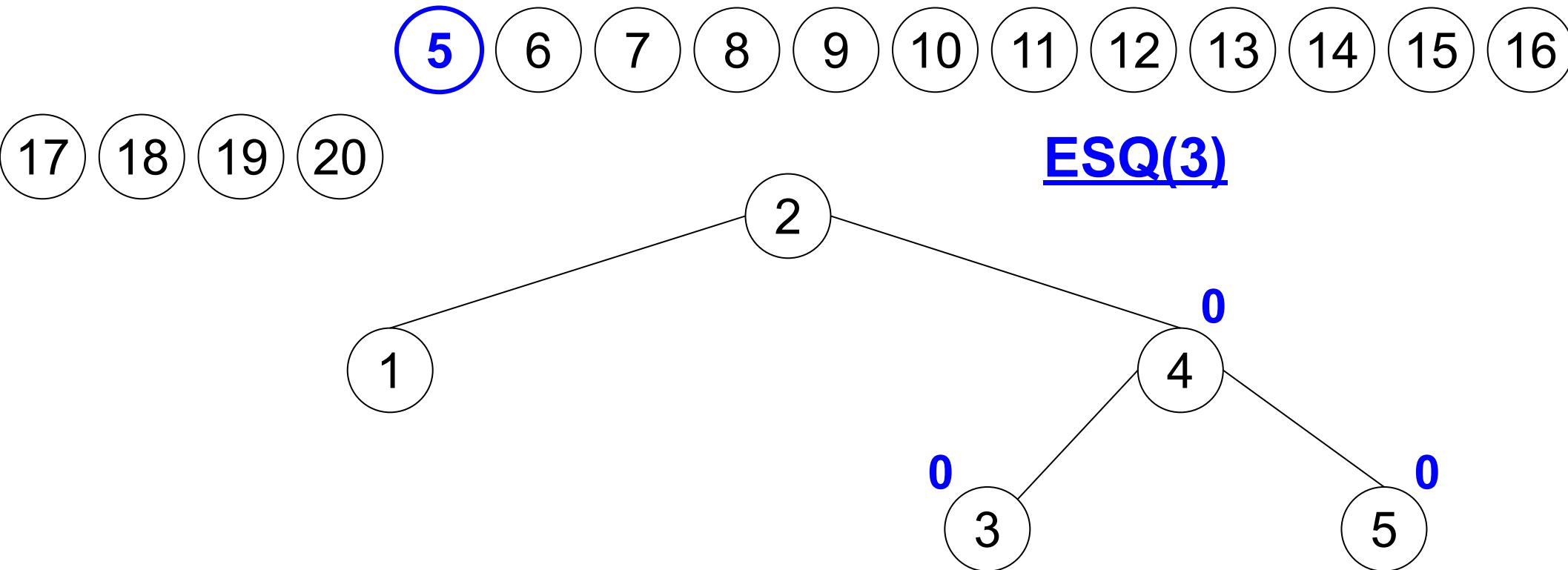


Inserir os Números 1 à 20 na AVL

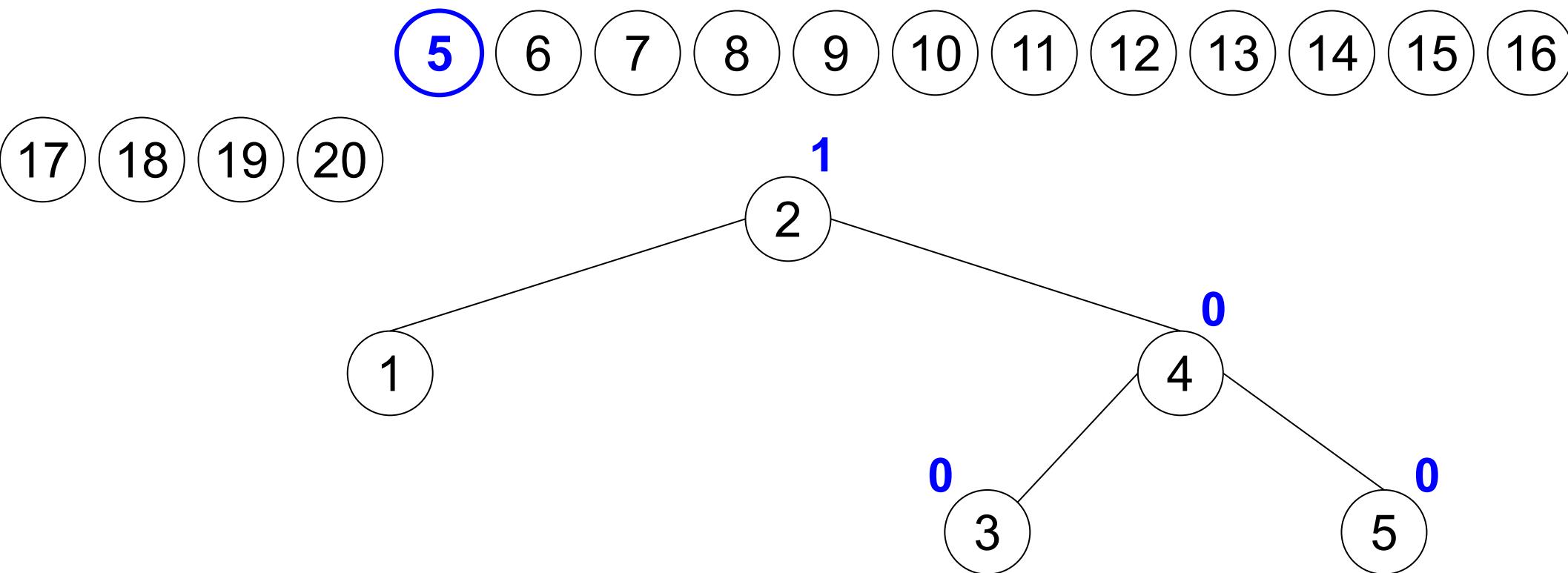


ESQ(3)

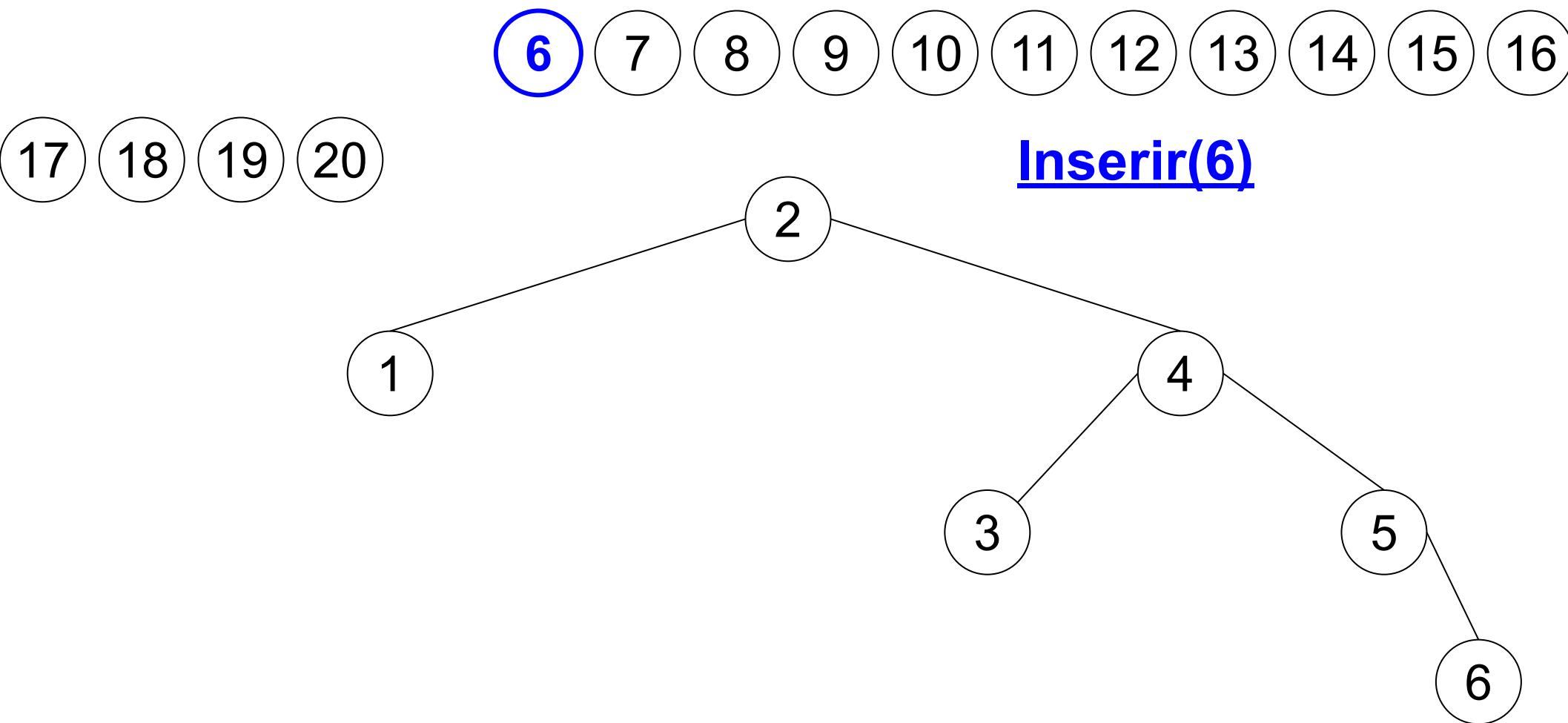
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



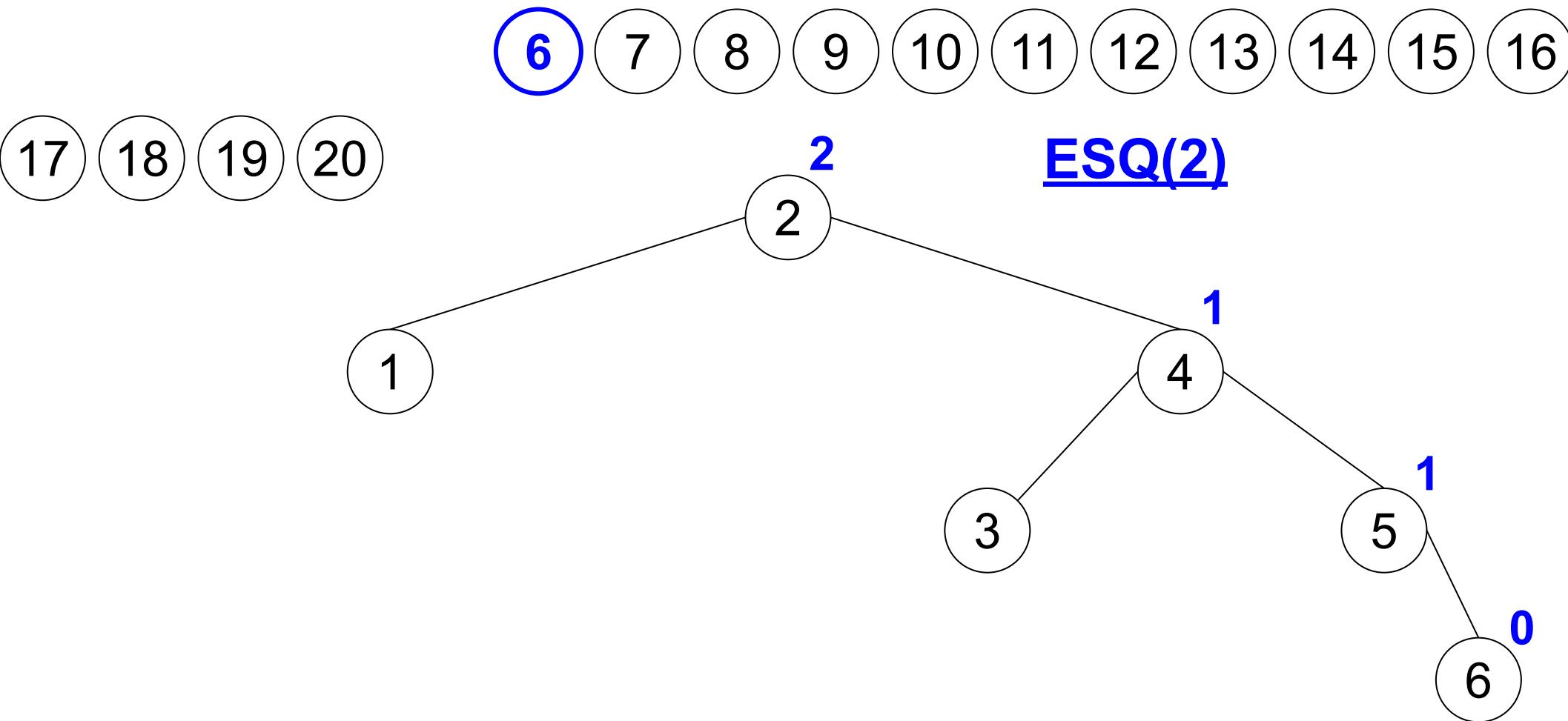
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



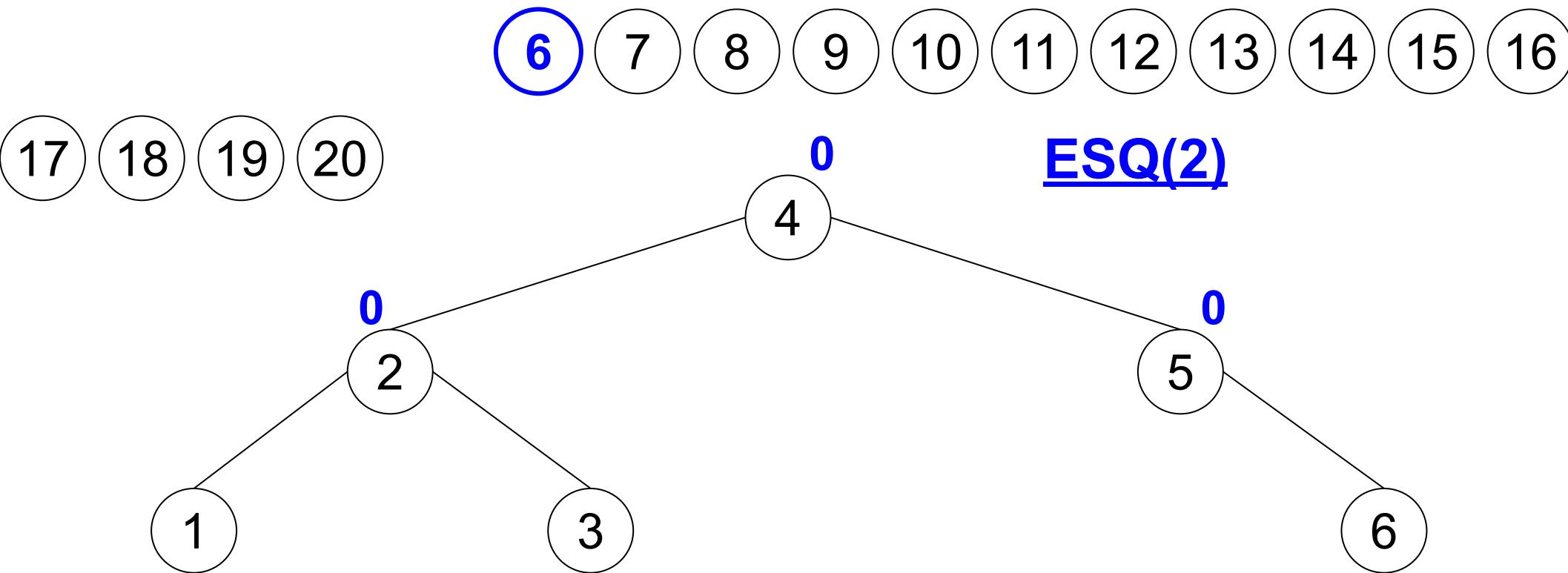
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



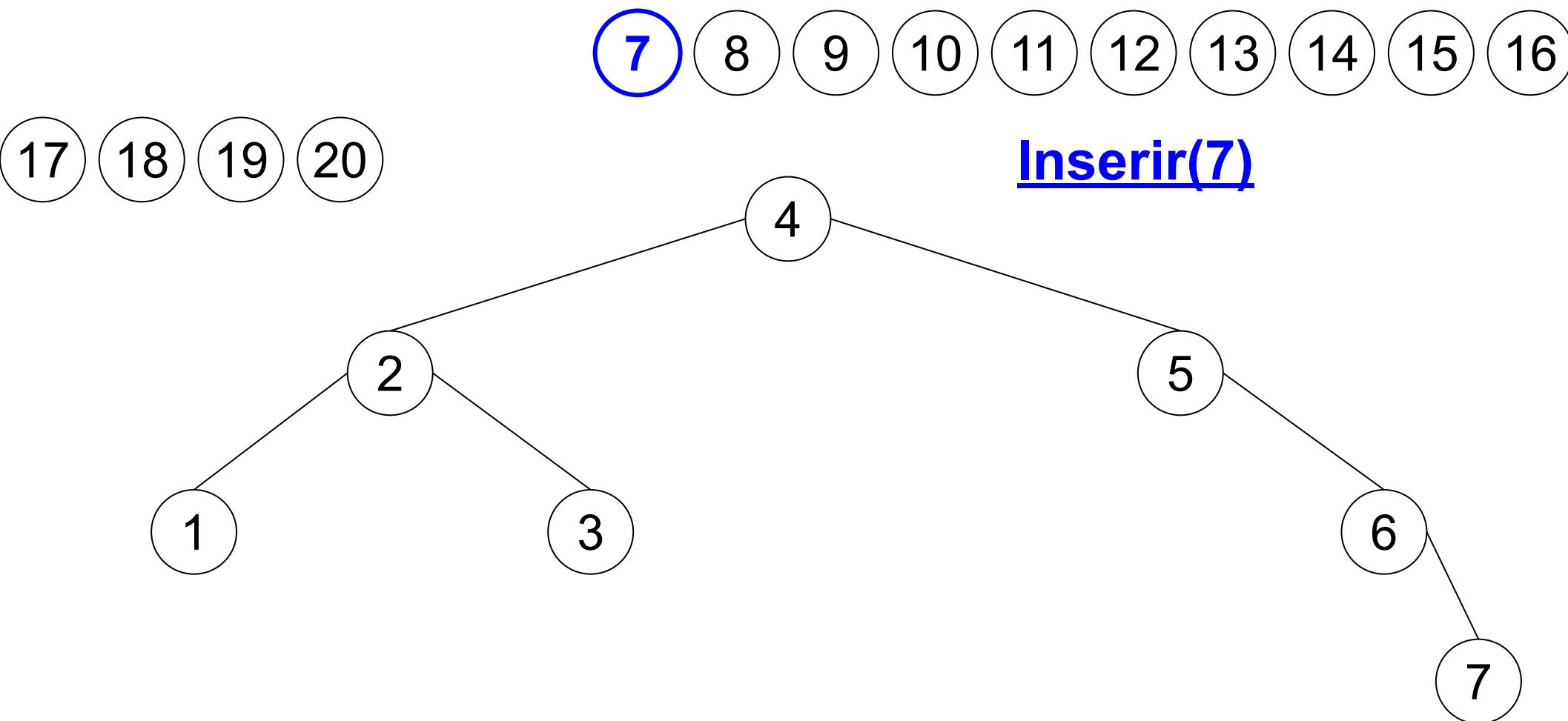
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



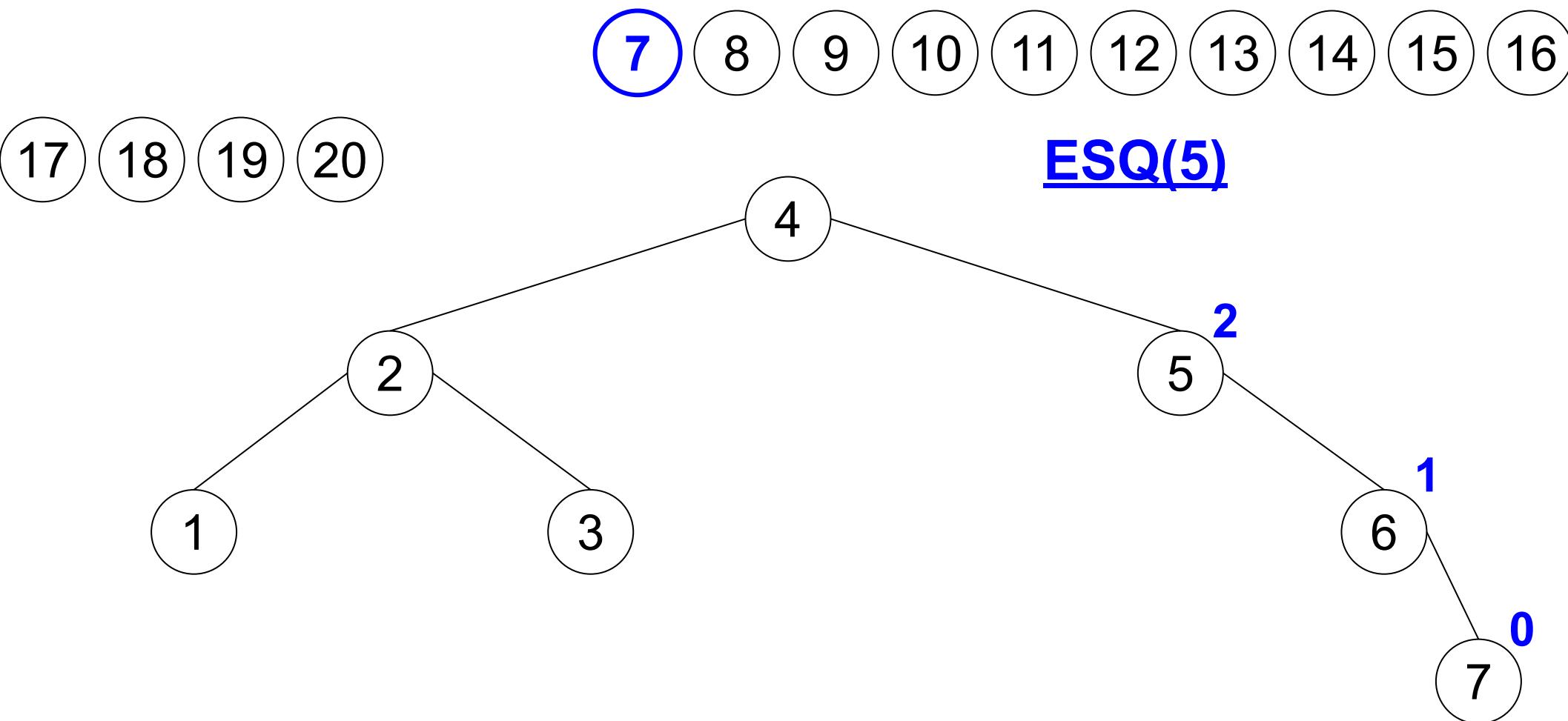
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



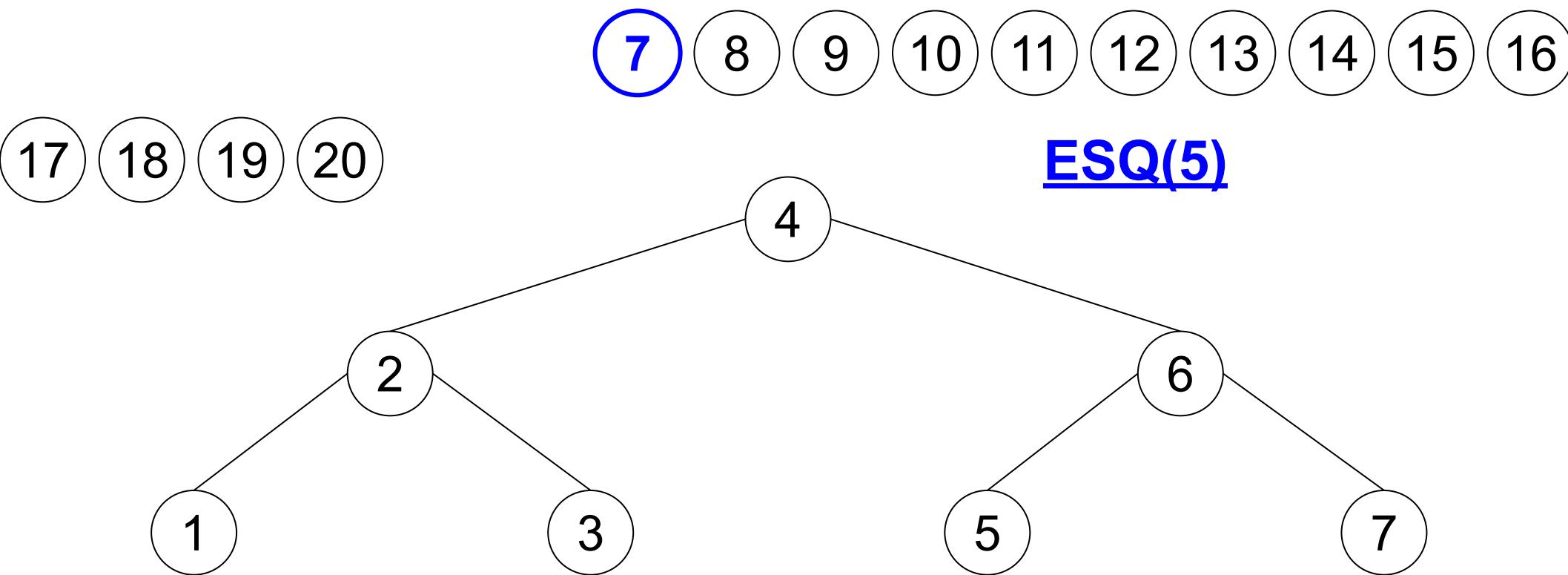
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



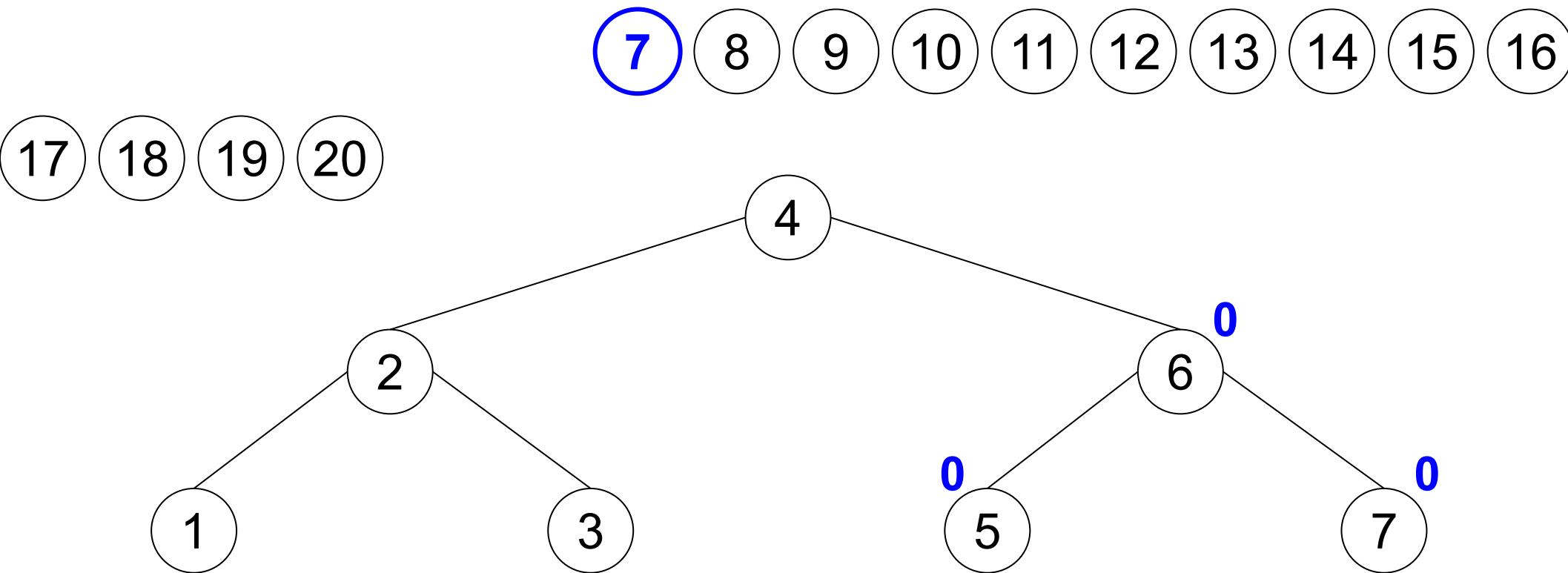
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



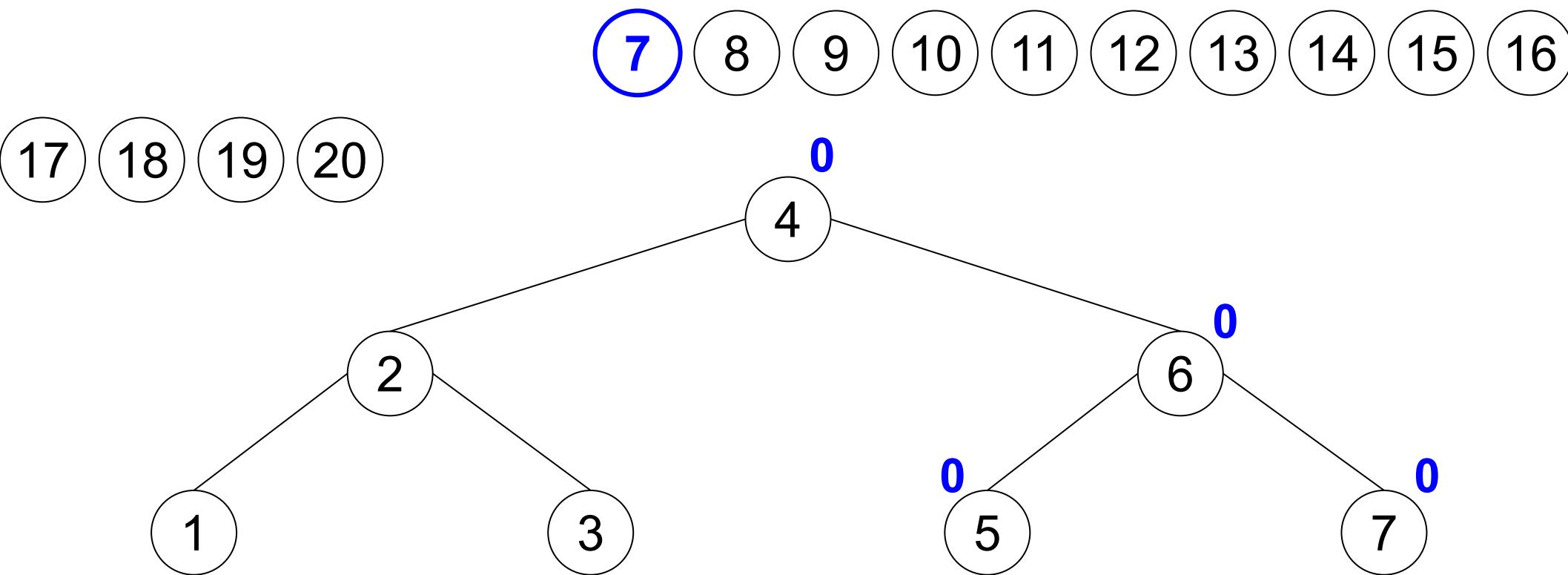
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



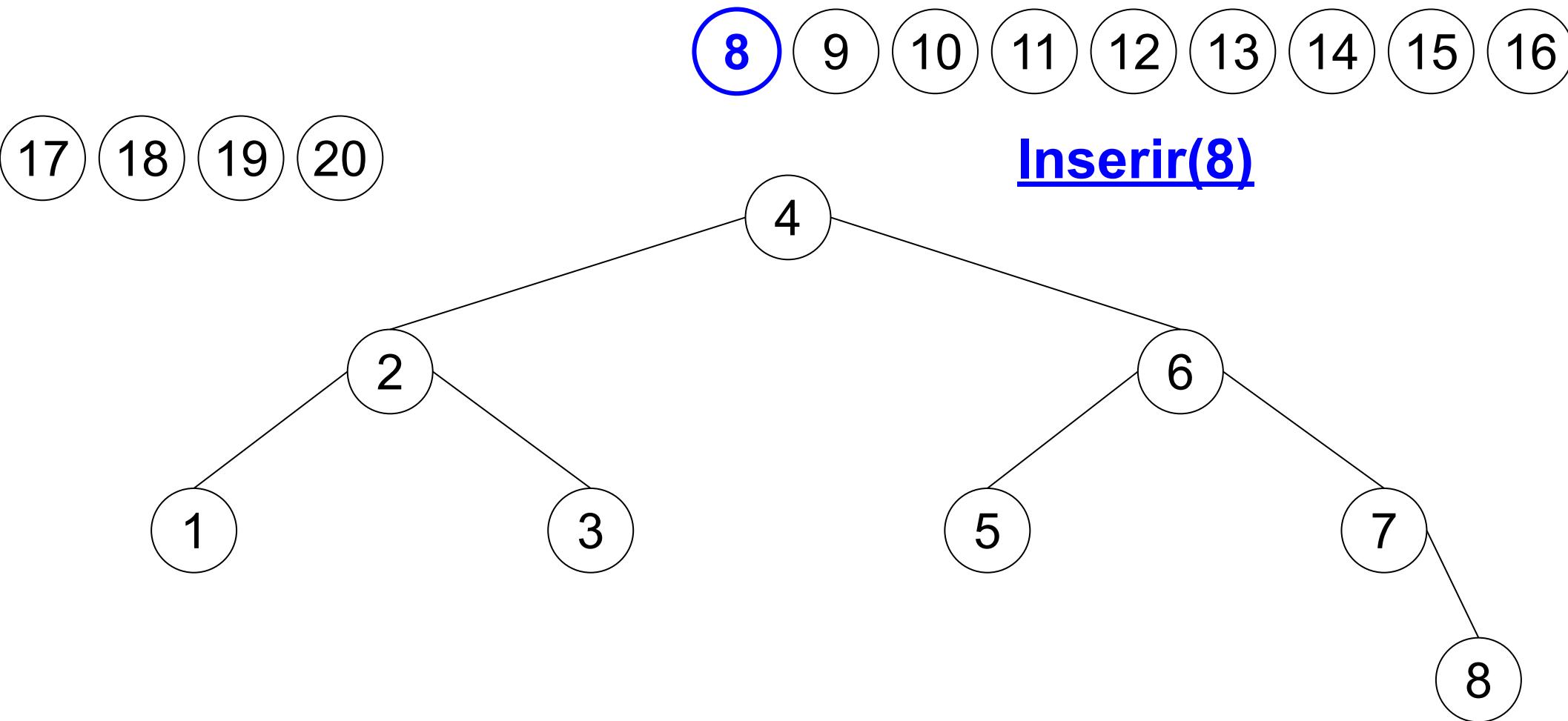
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



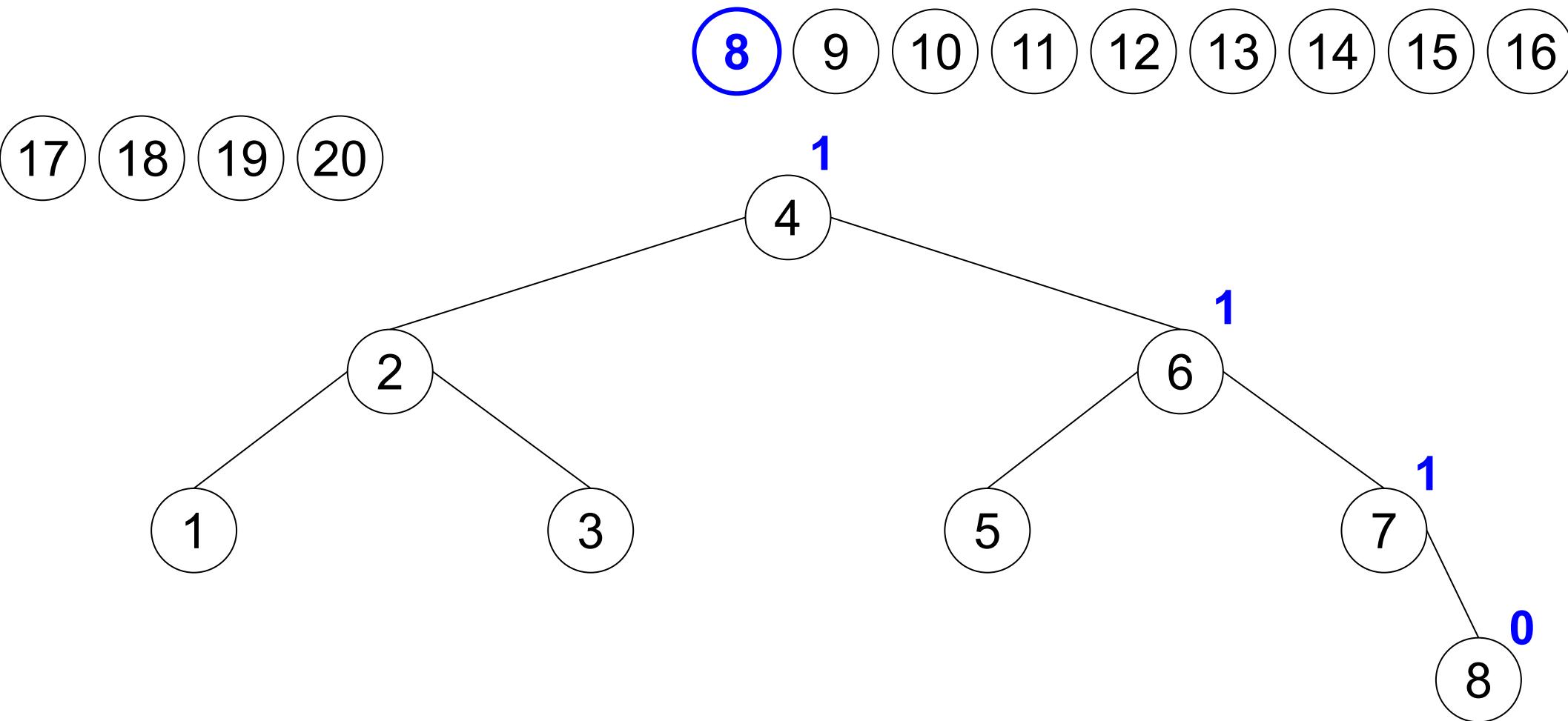
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



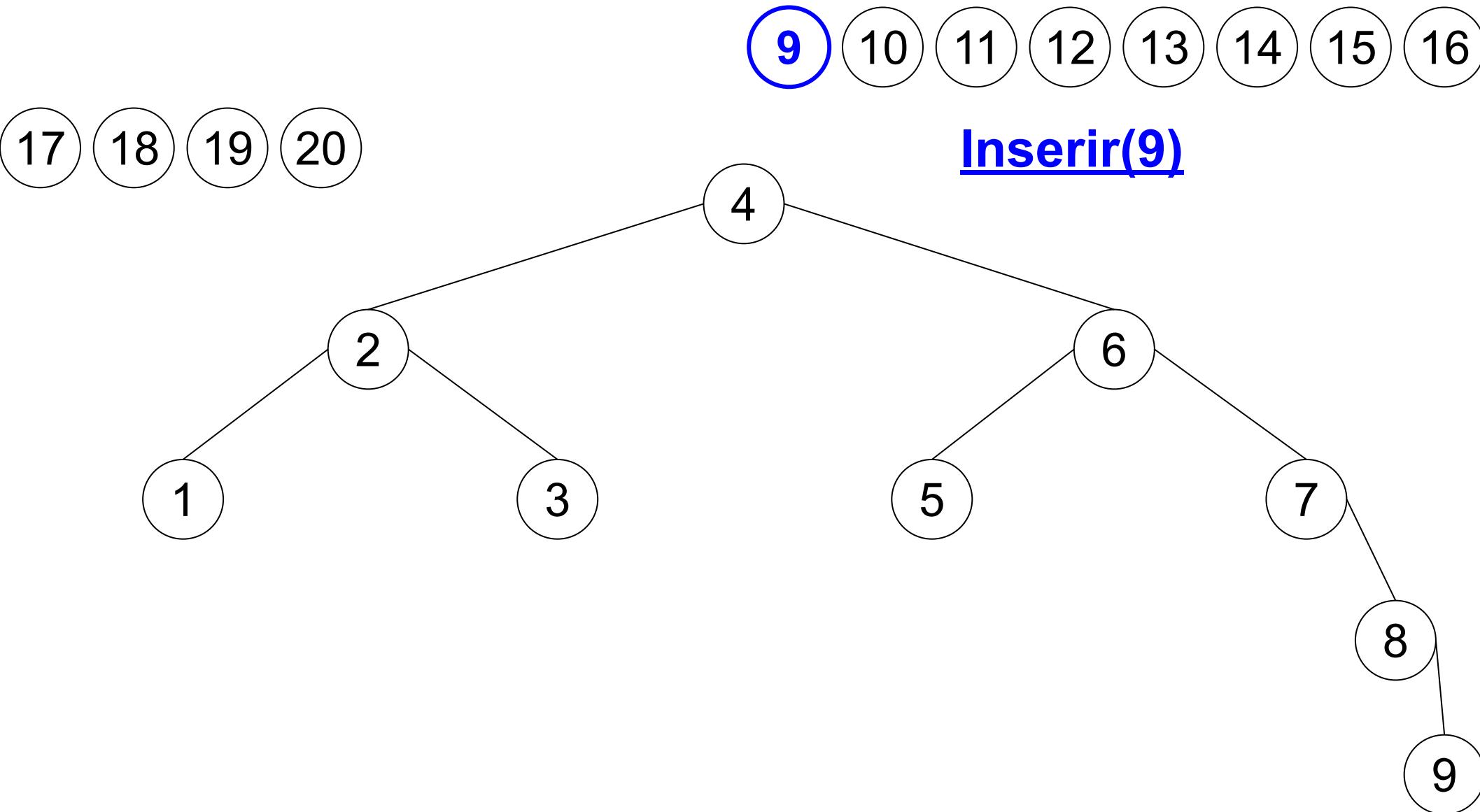
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



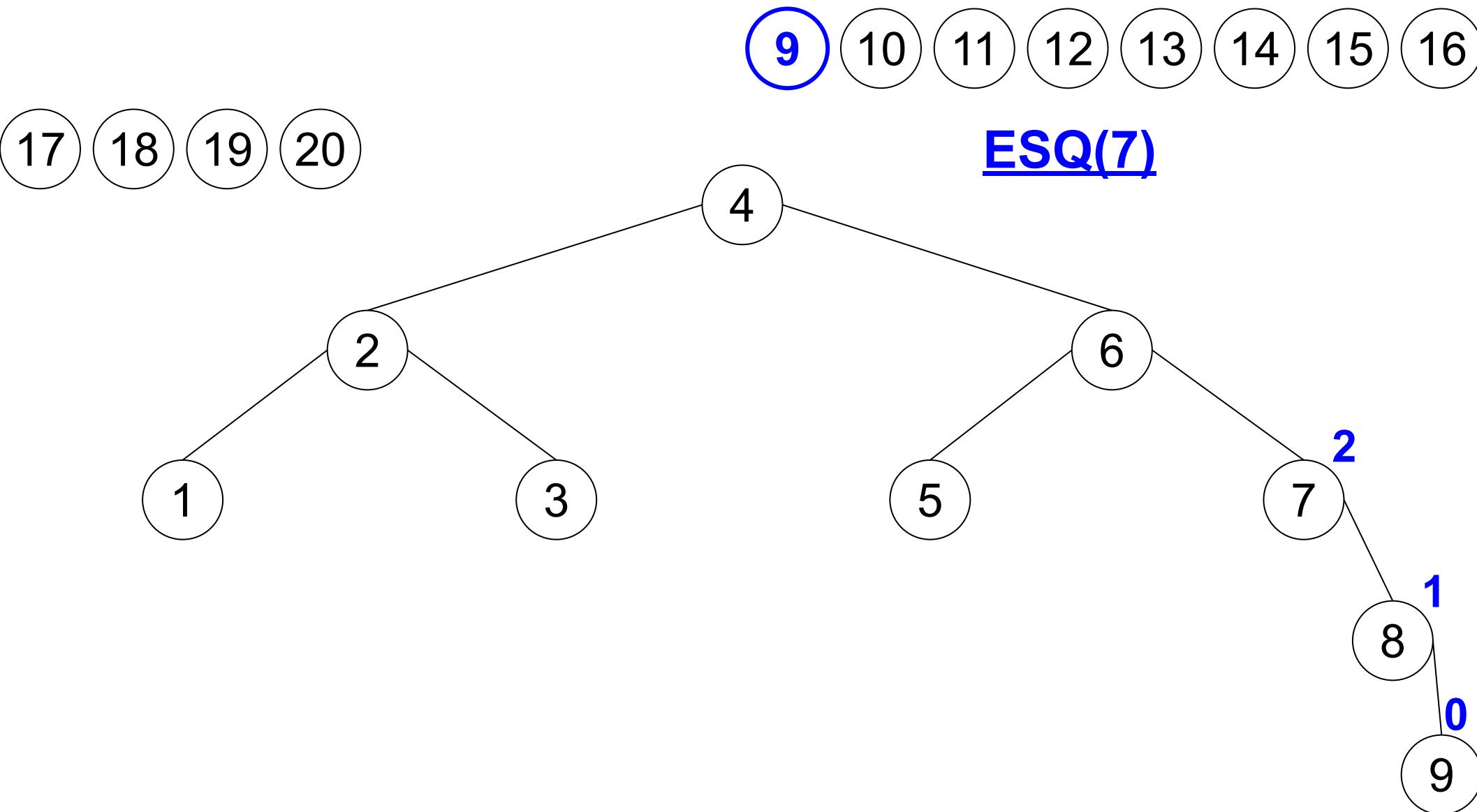
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



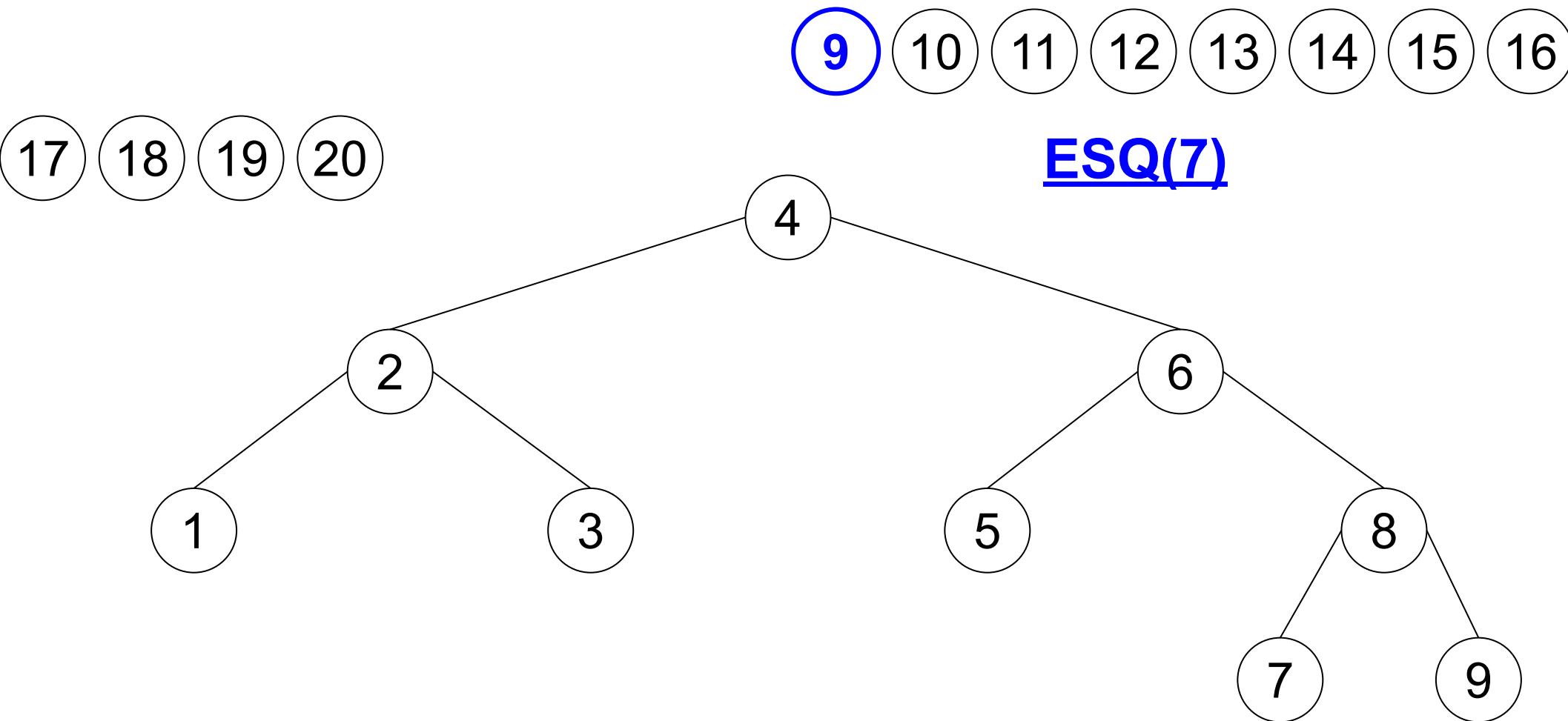
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



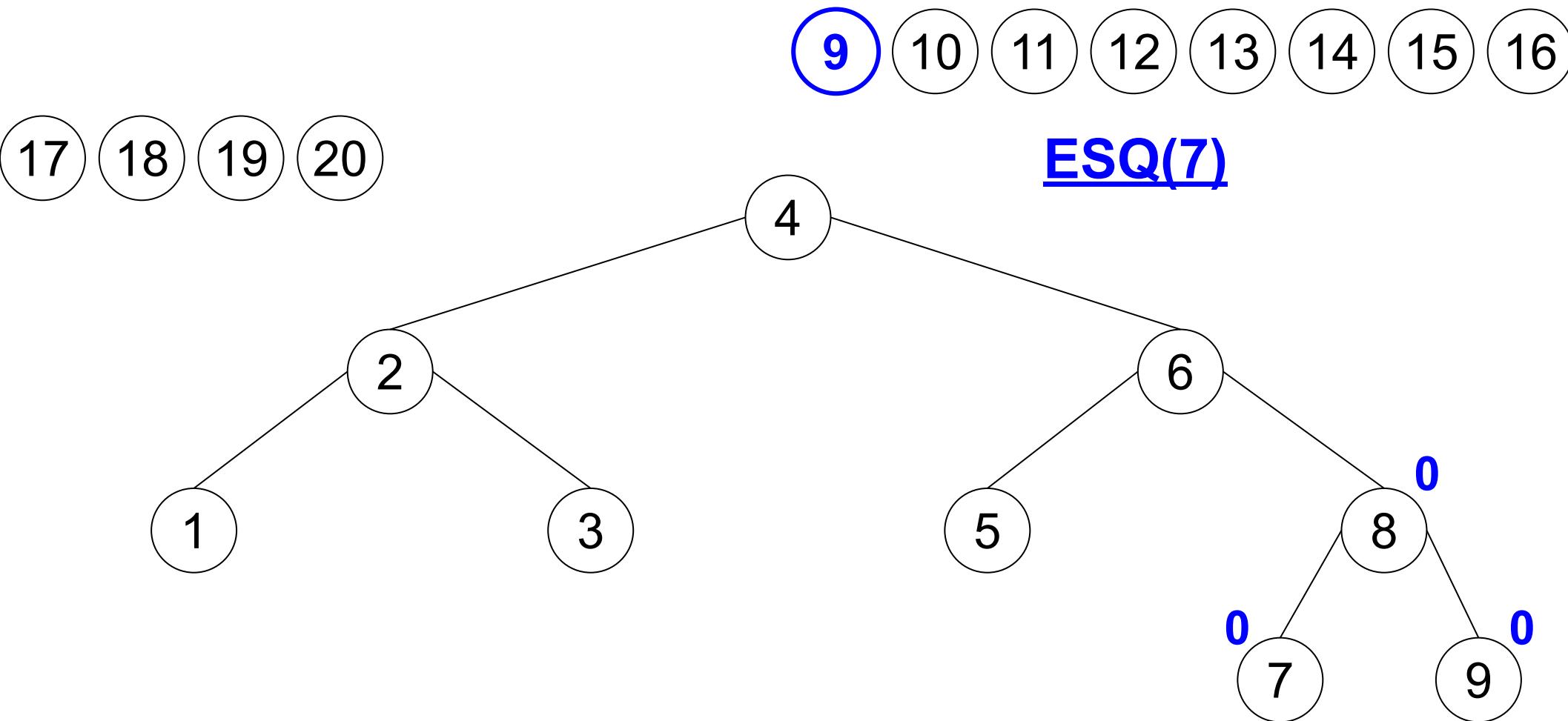
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



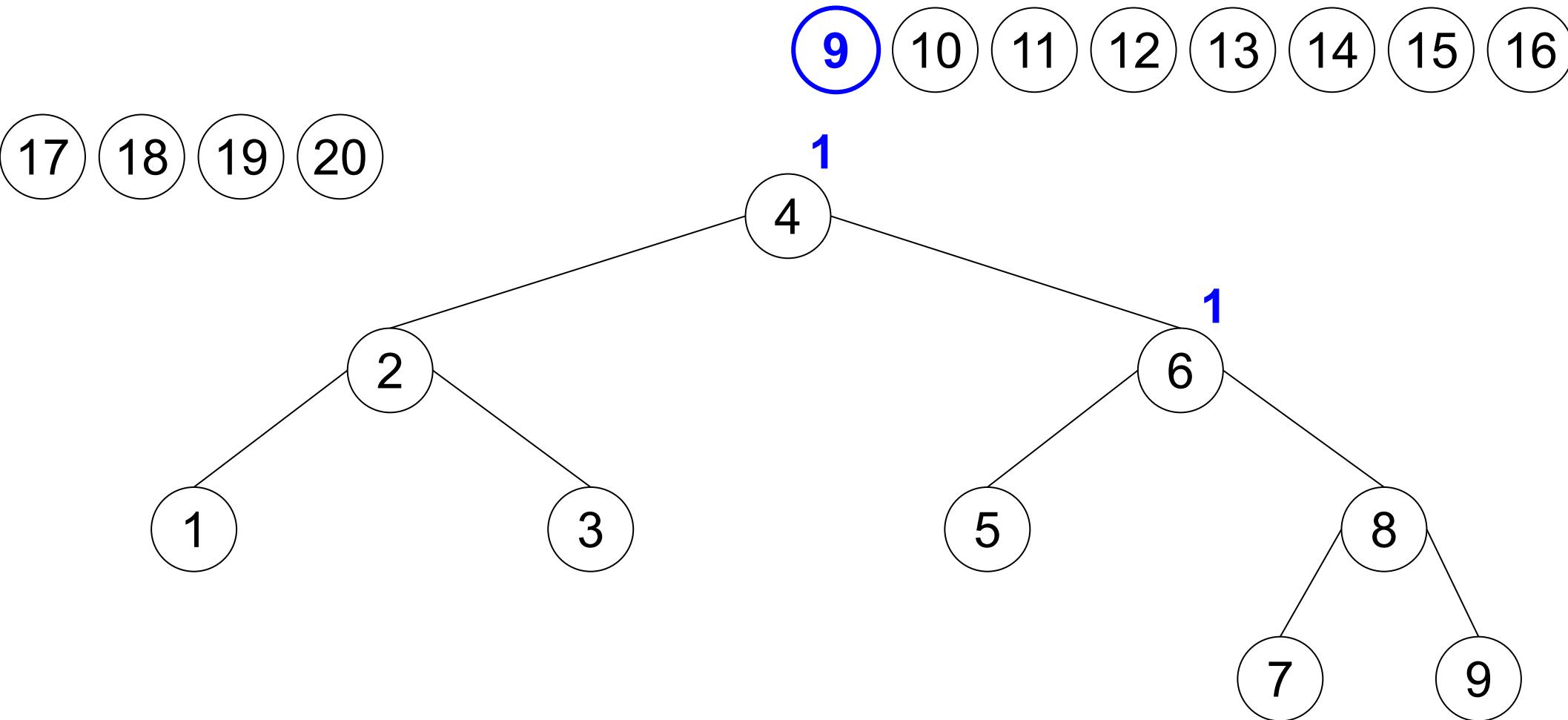
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



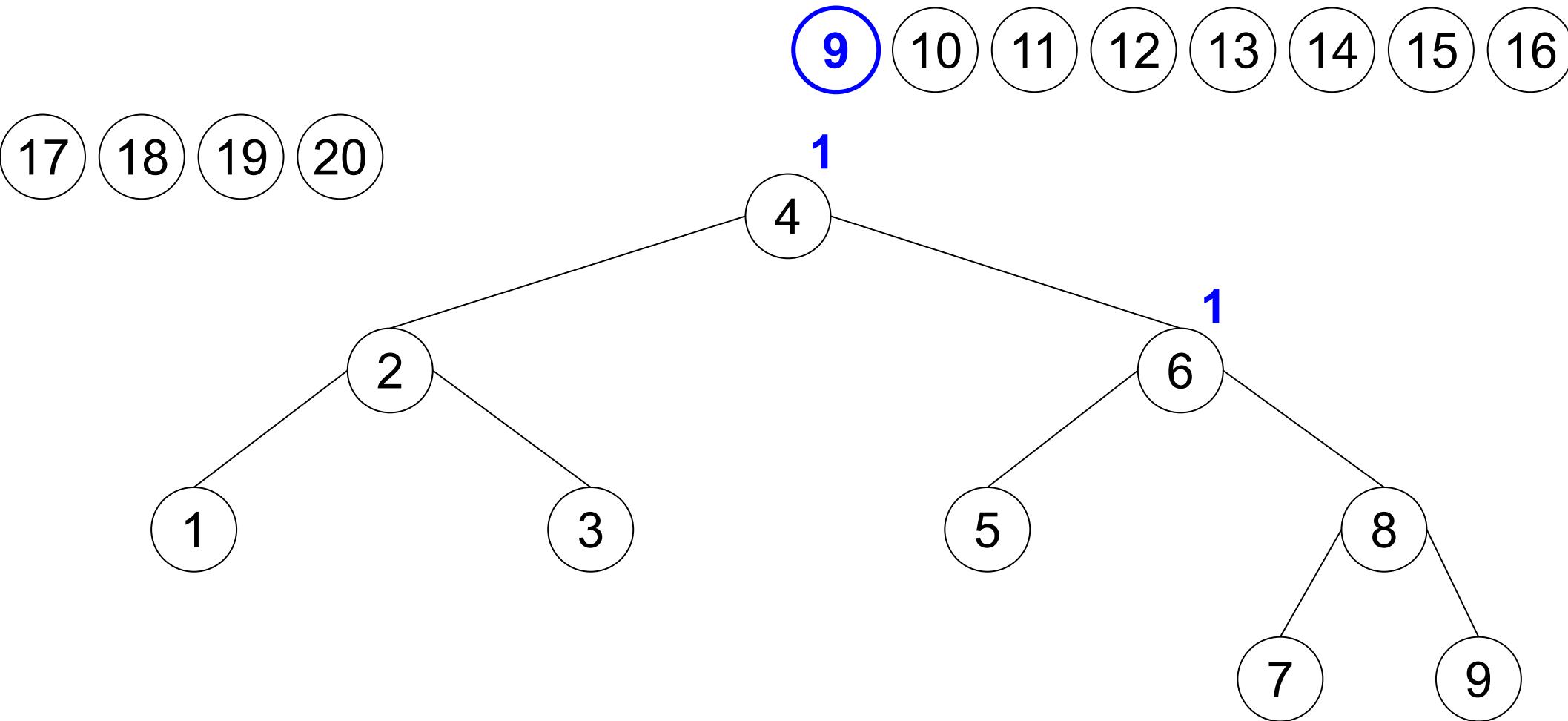
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



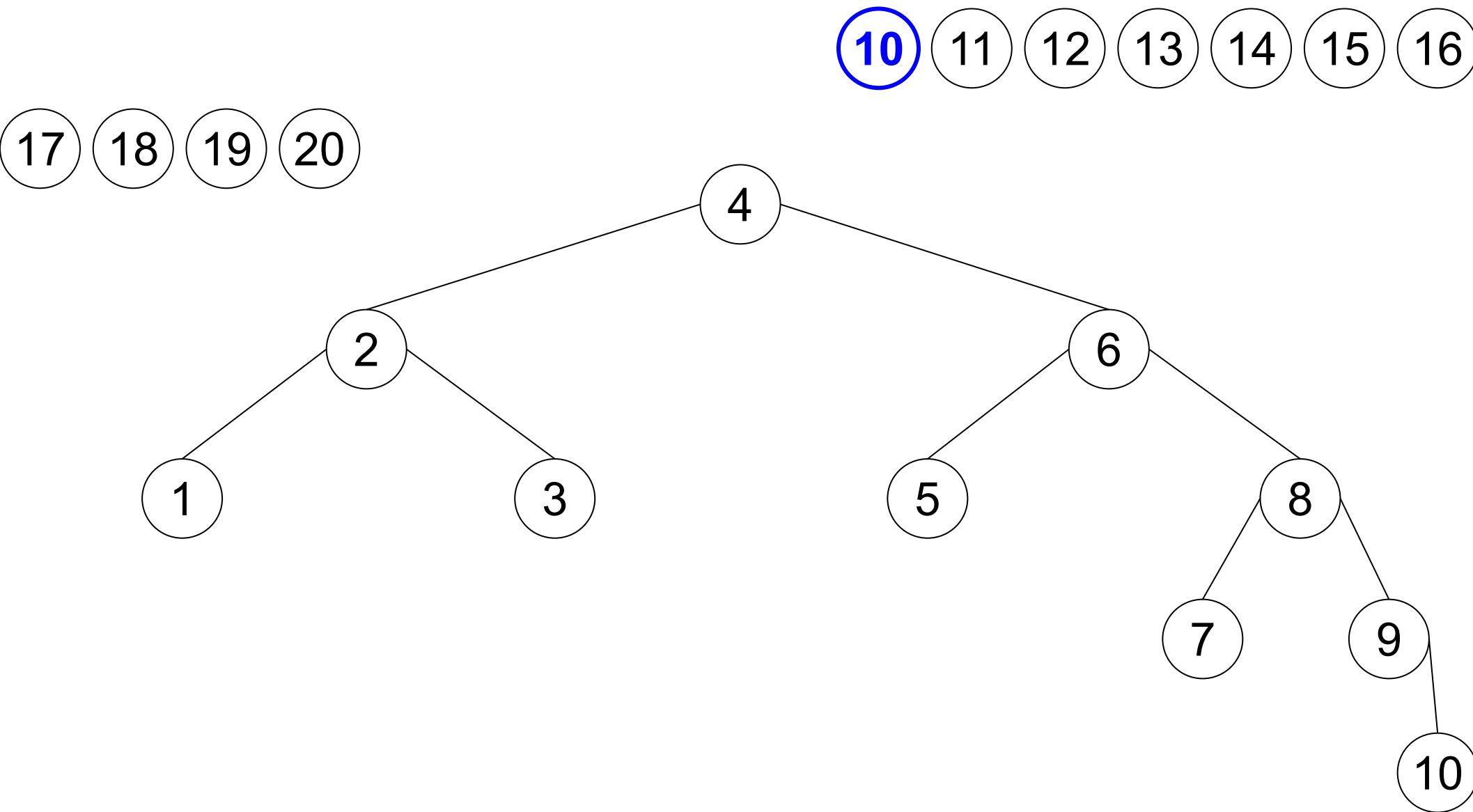
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



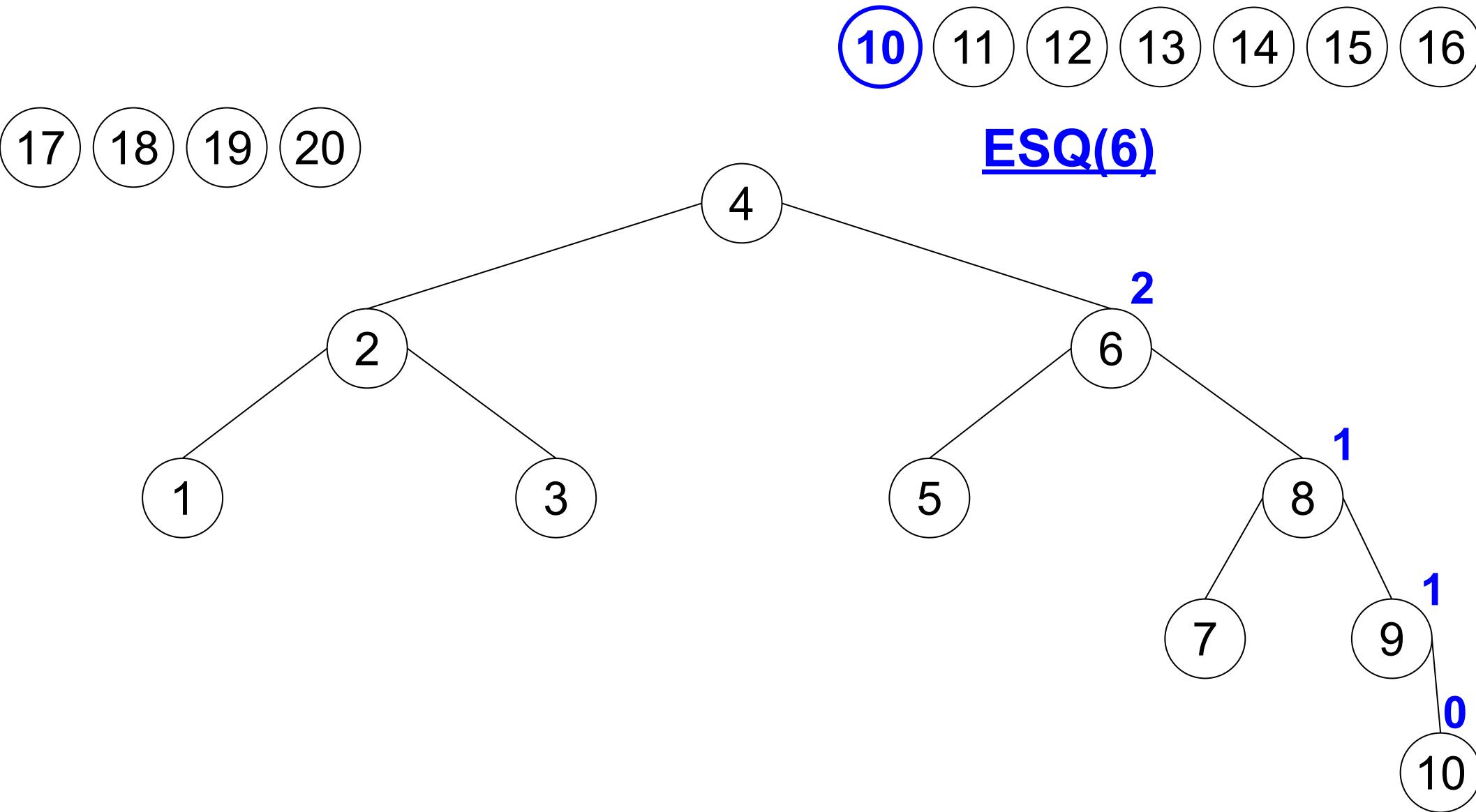
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



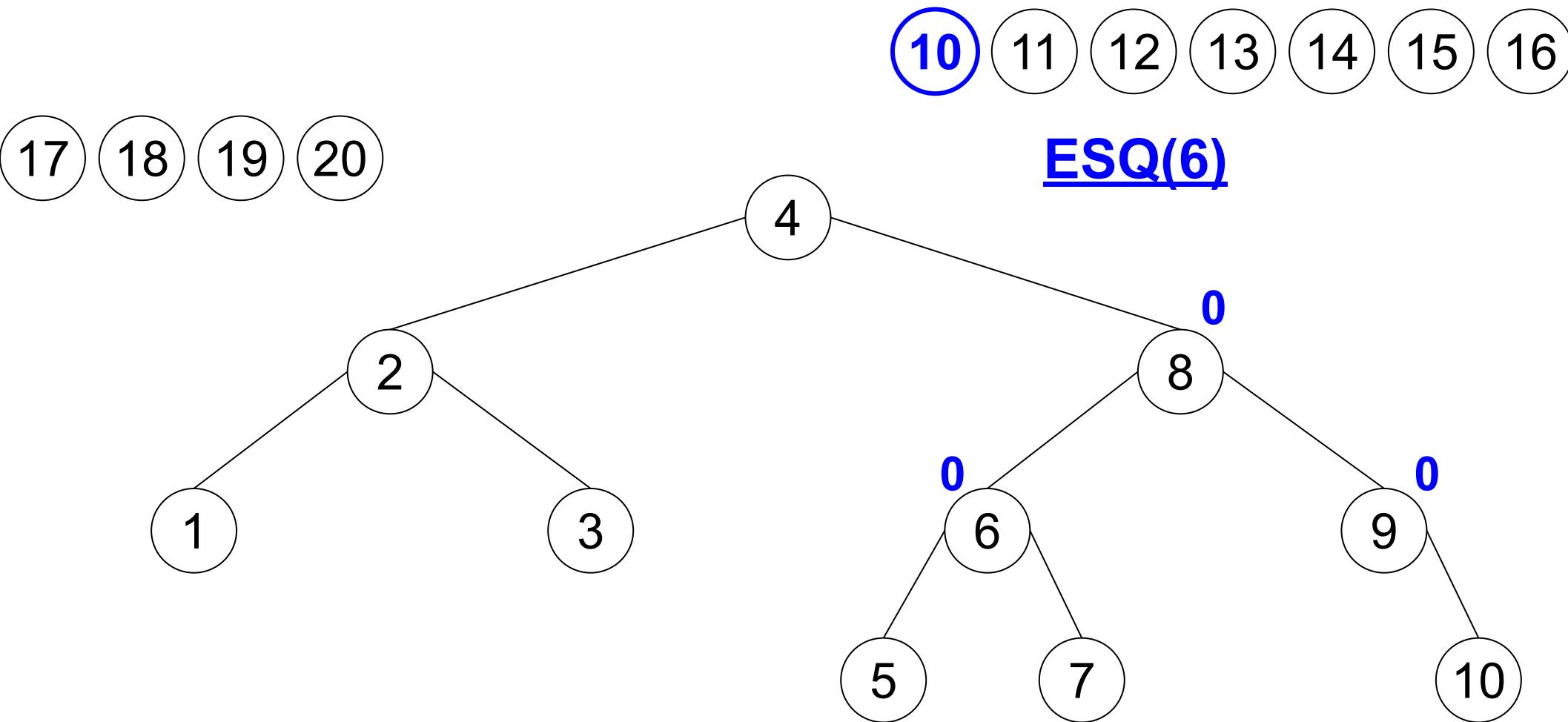
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



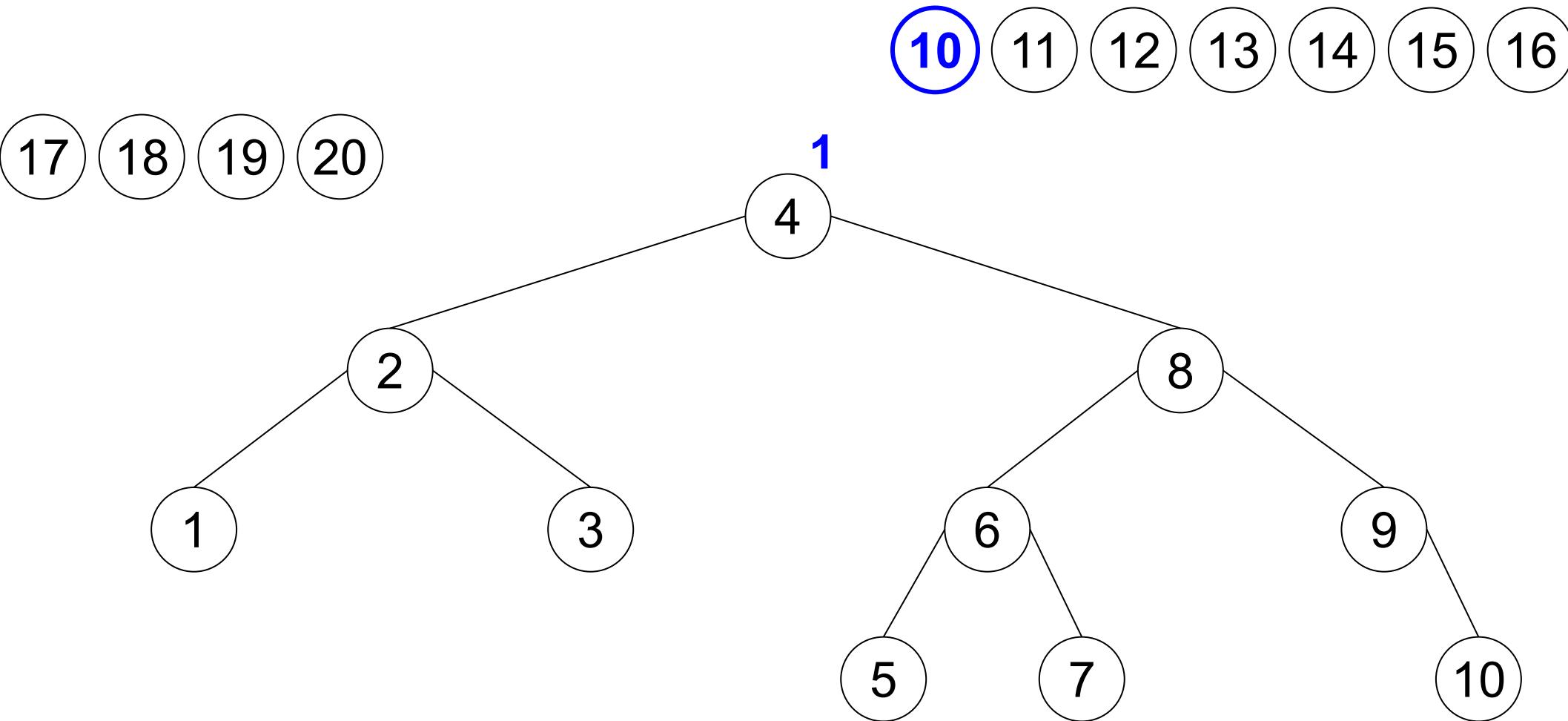
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



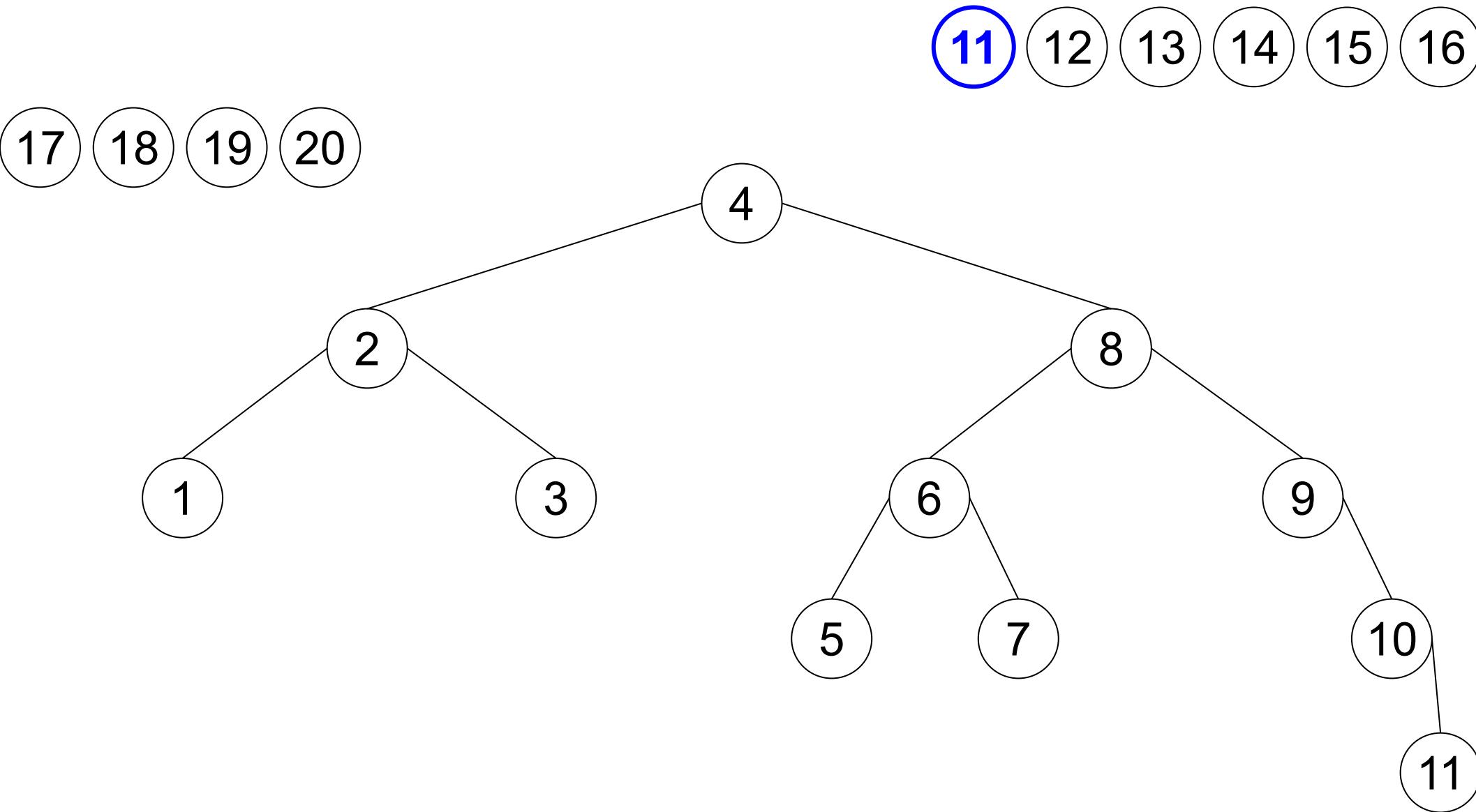
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



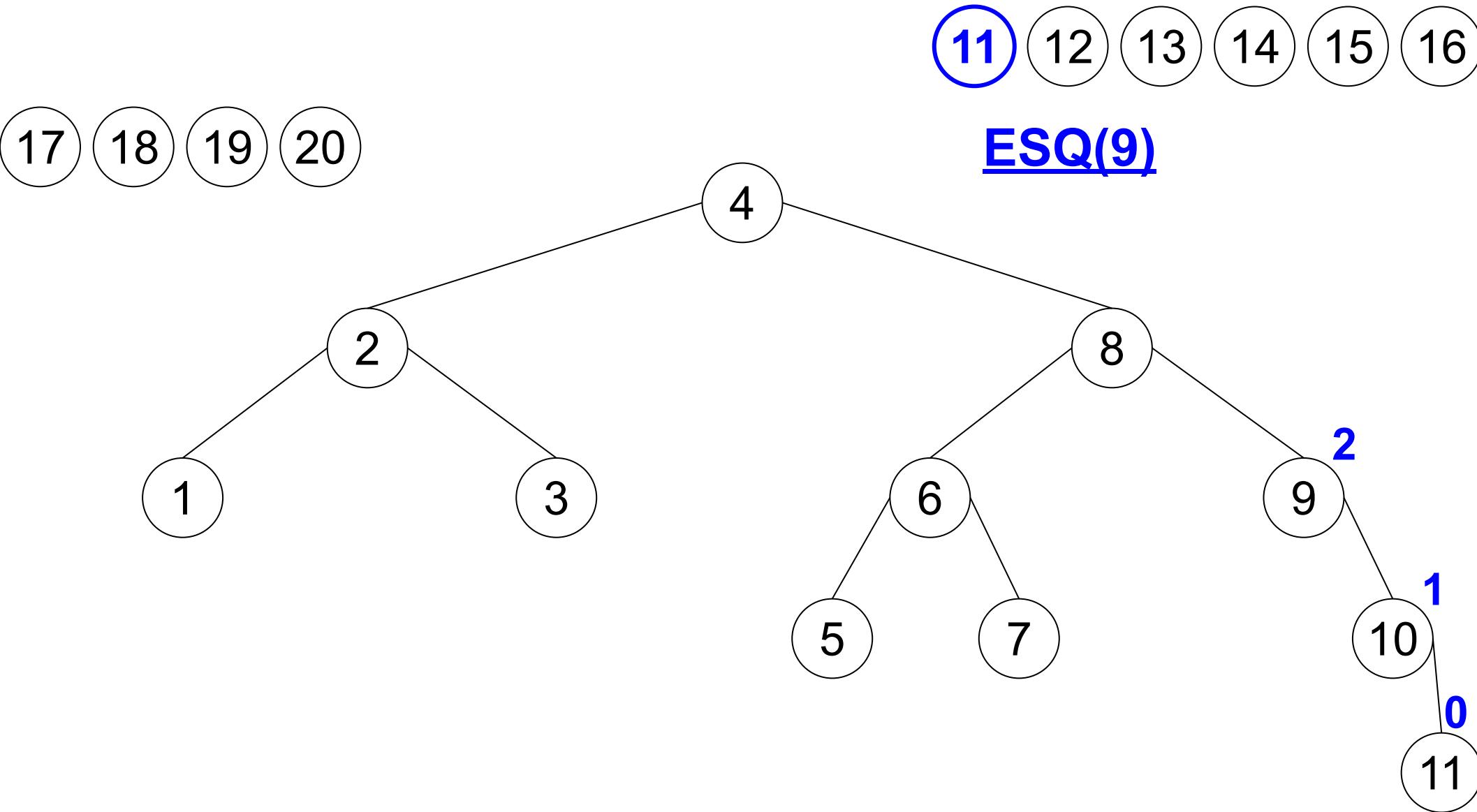
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



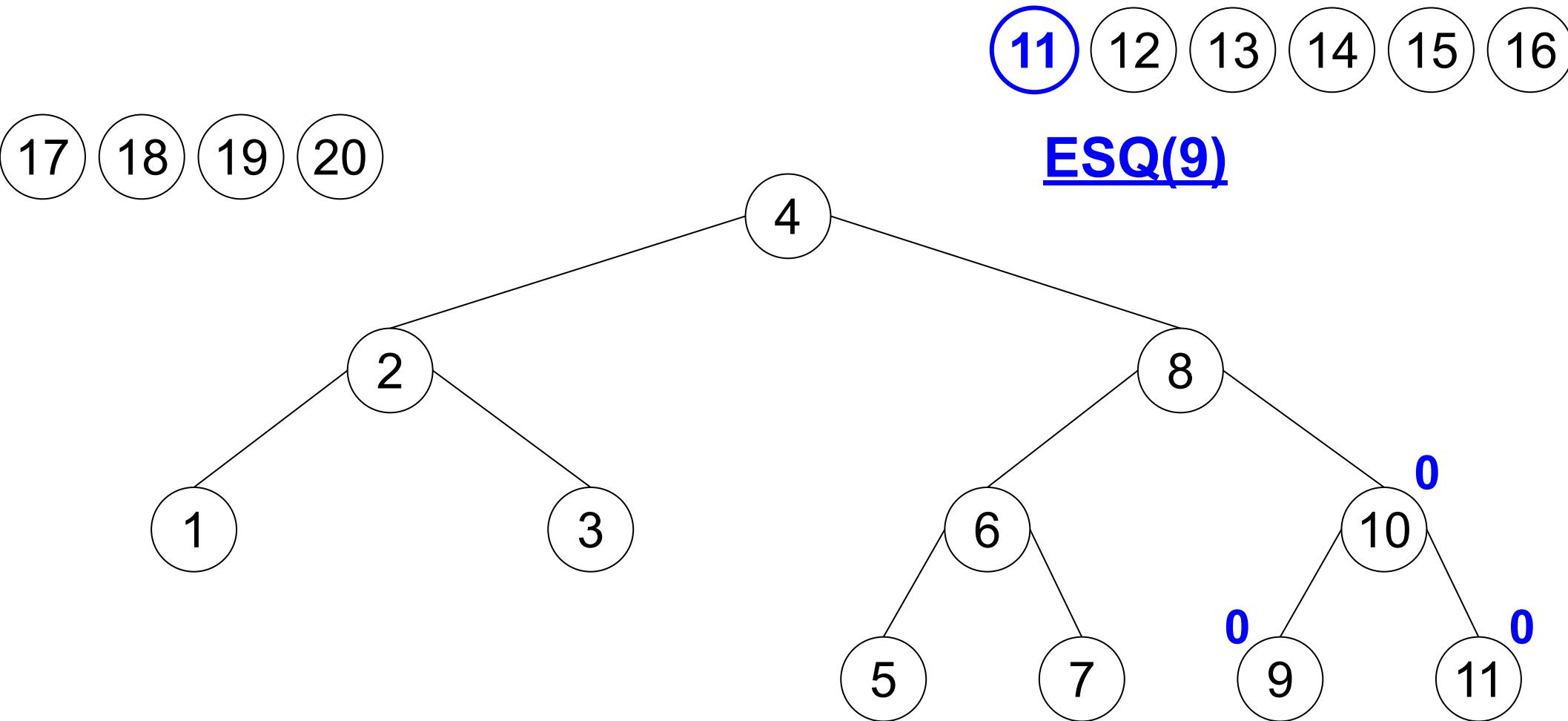
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



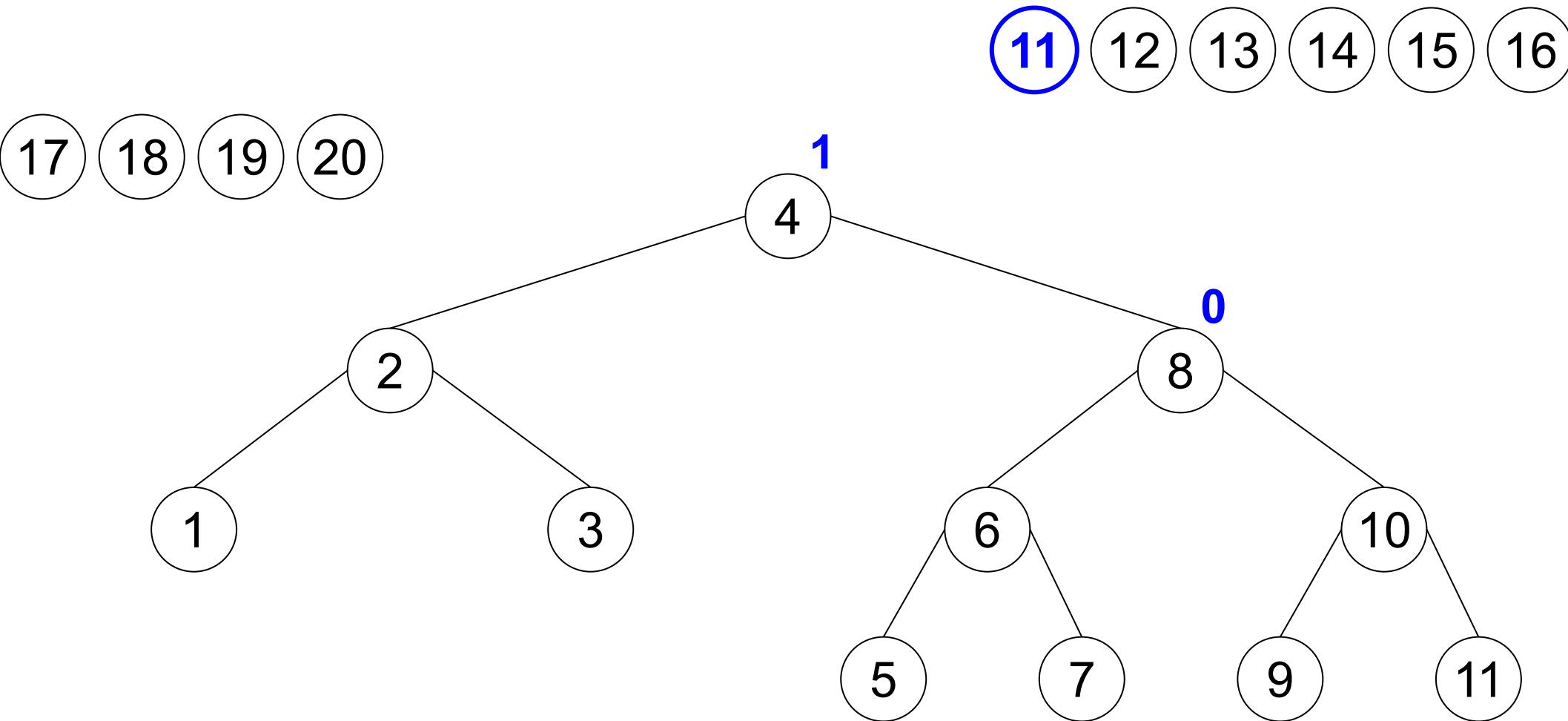
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



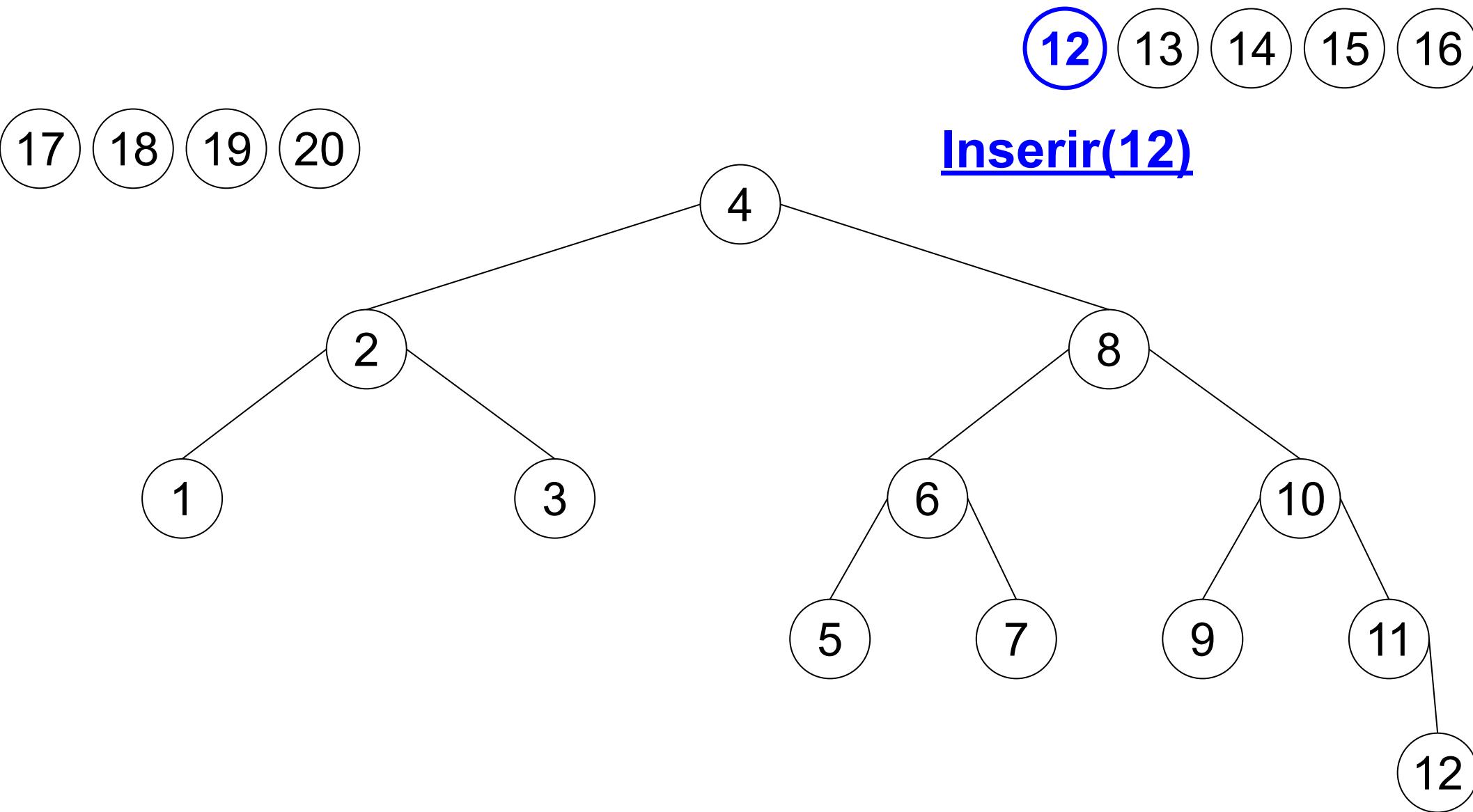
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



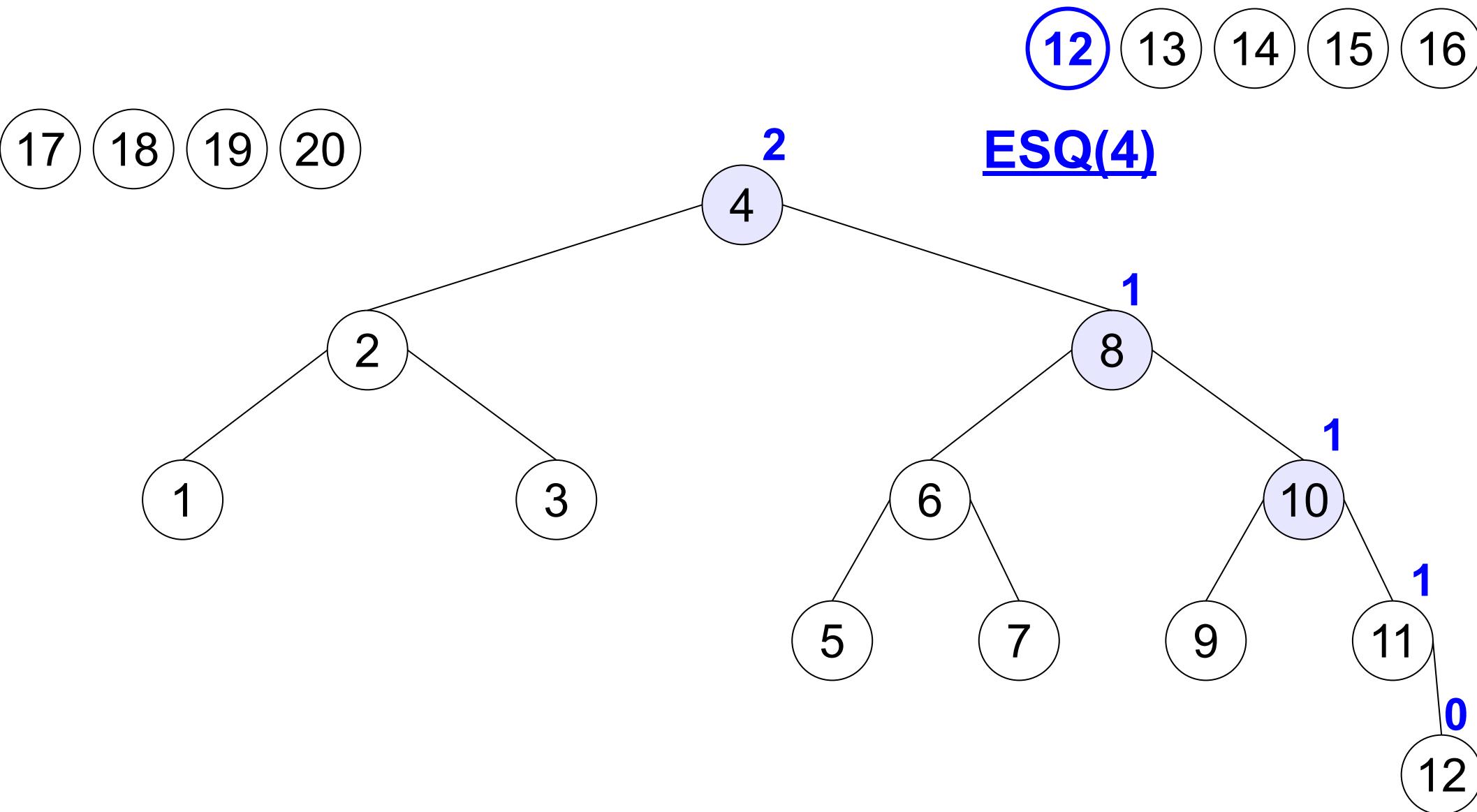
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



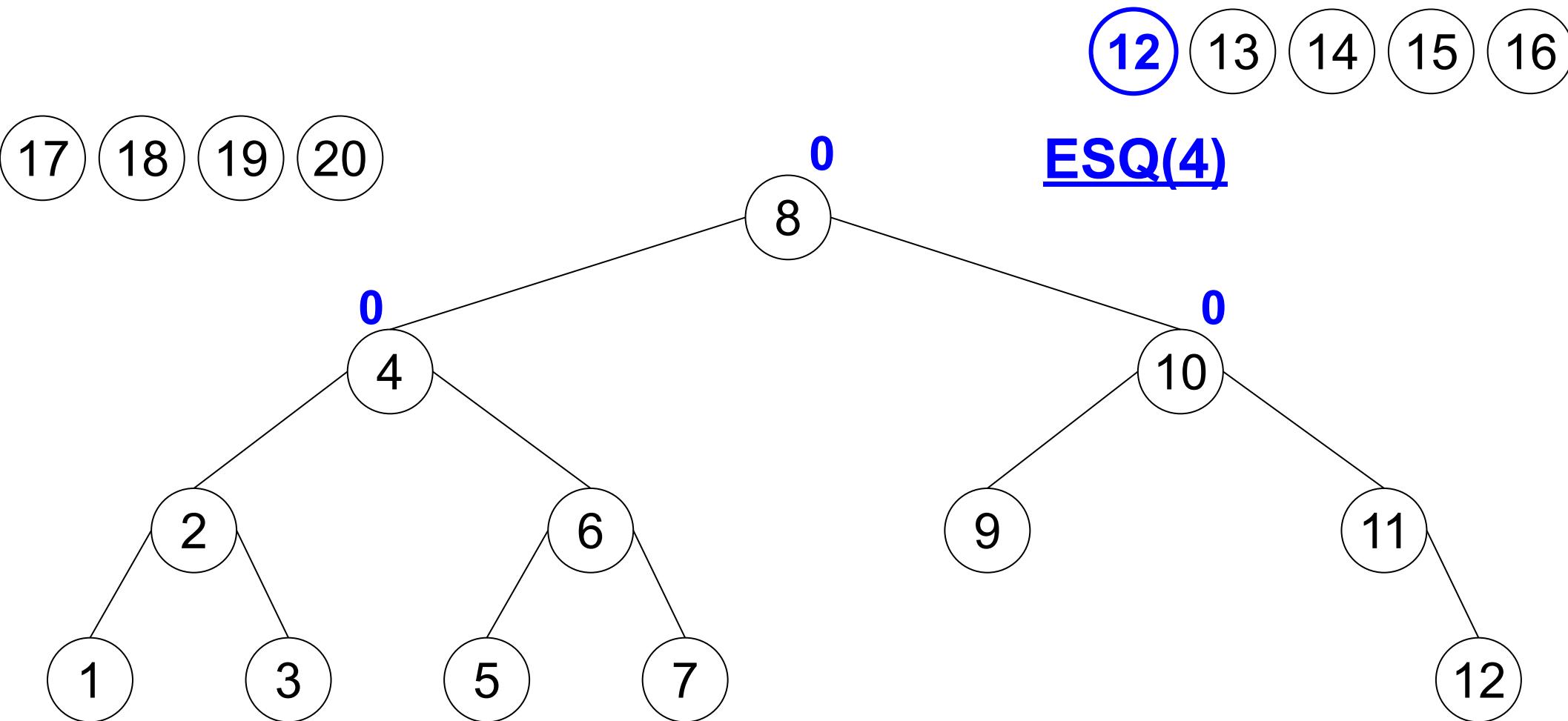
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



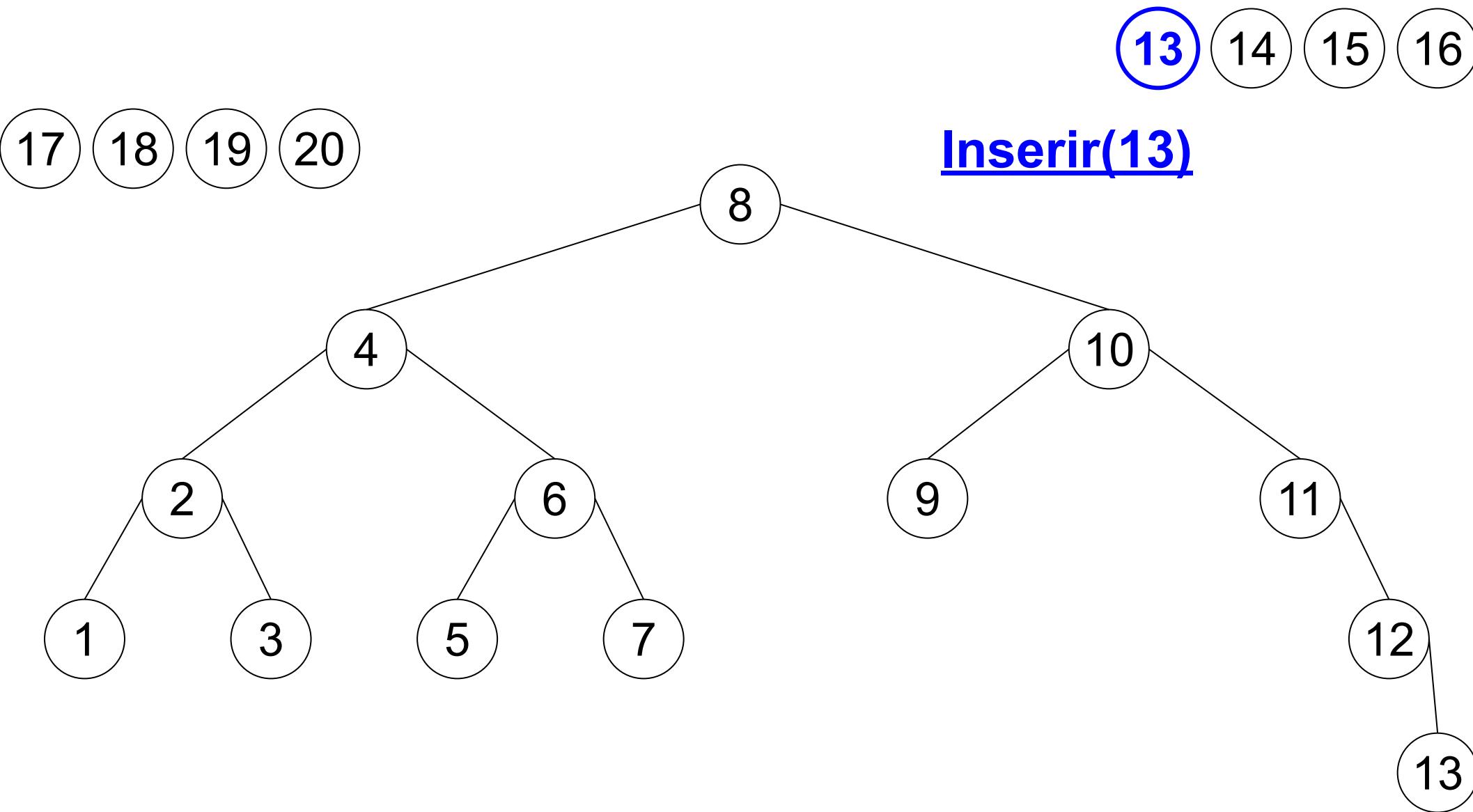
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



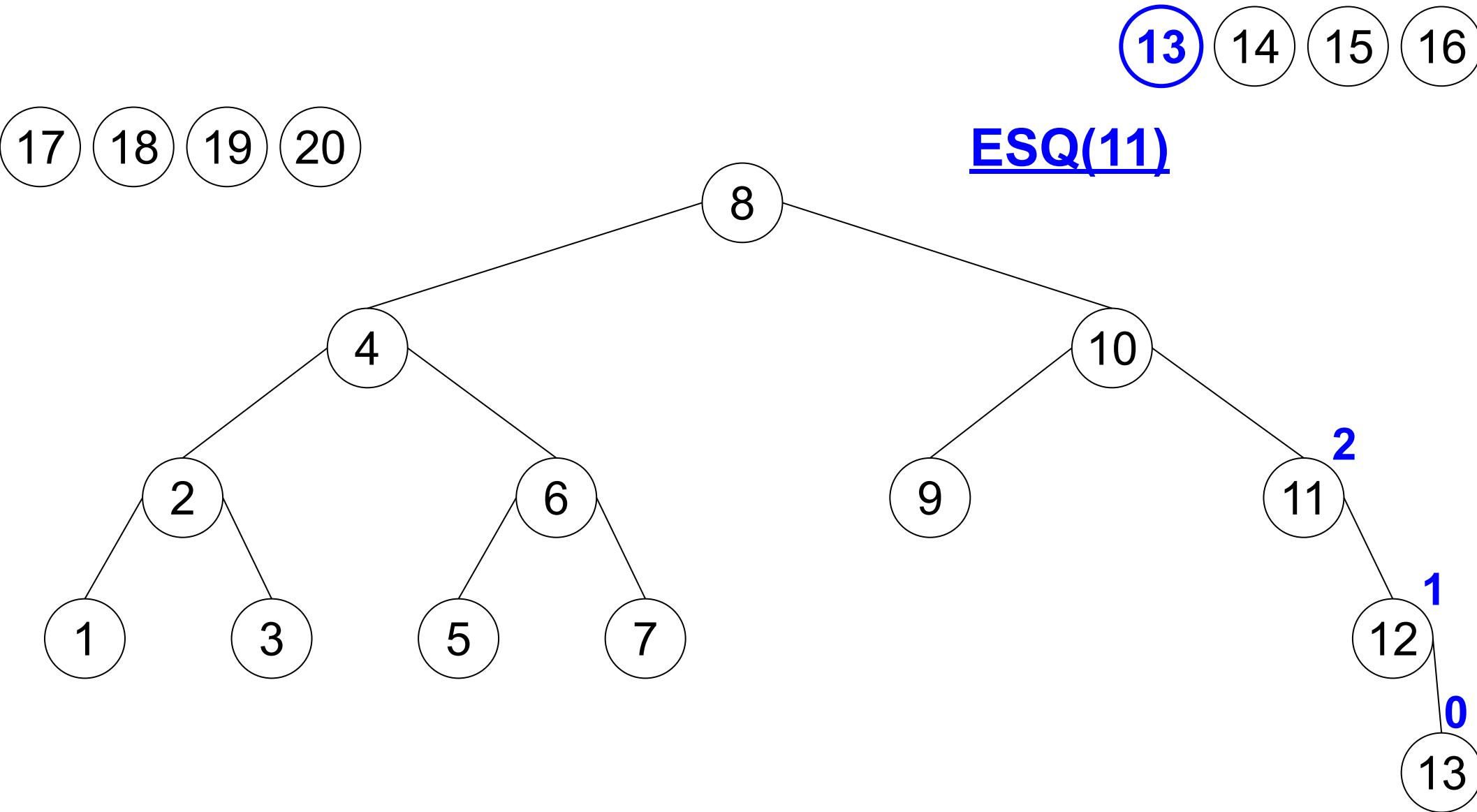
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



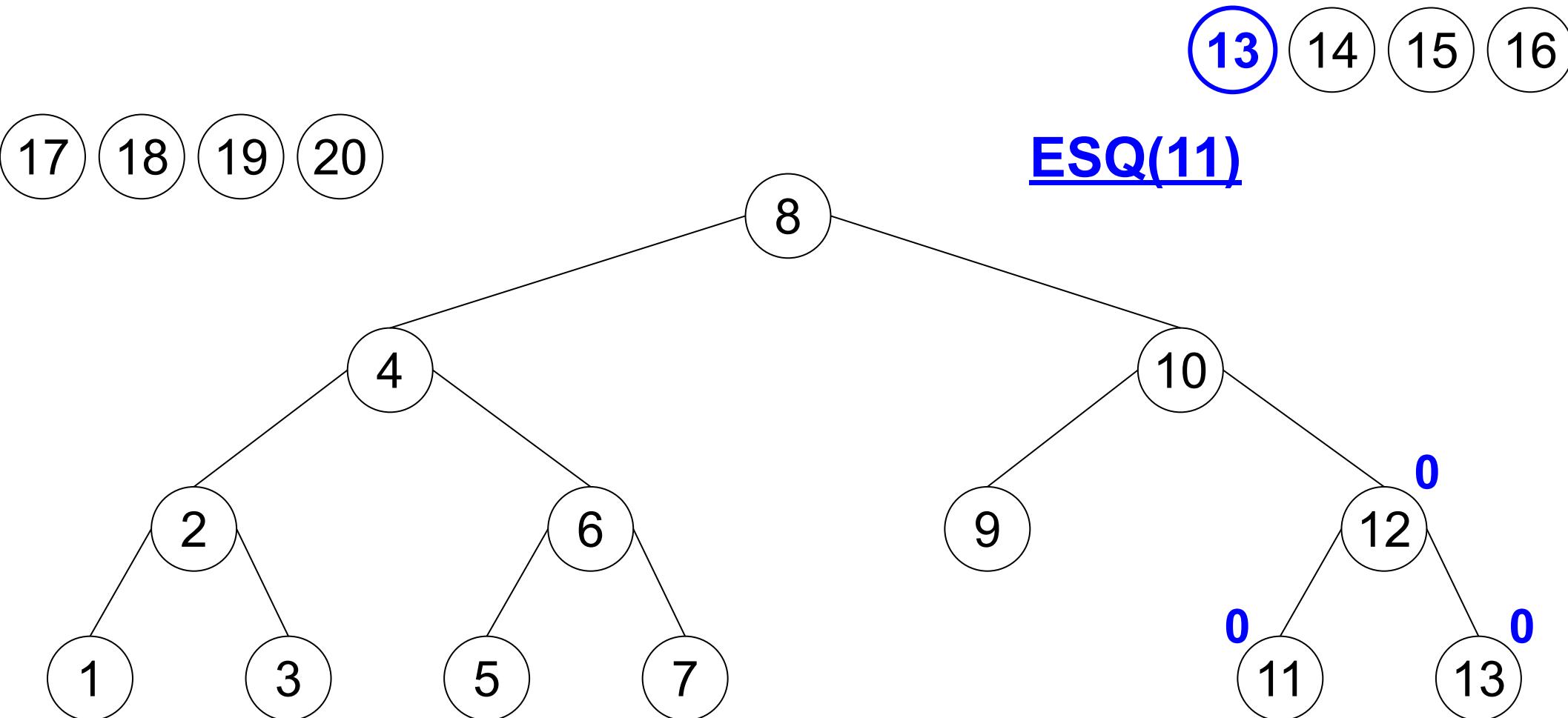
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



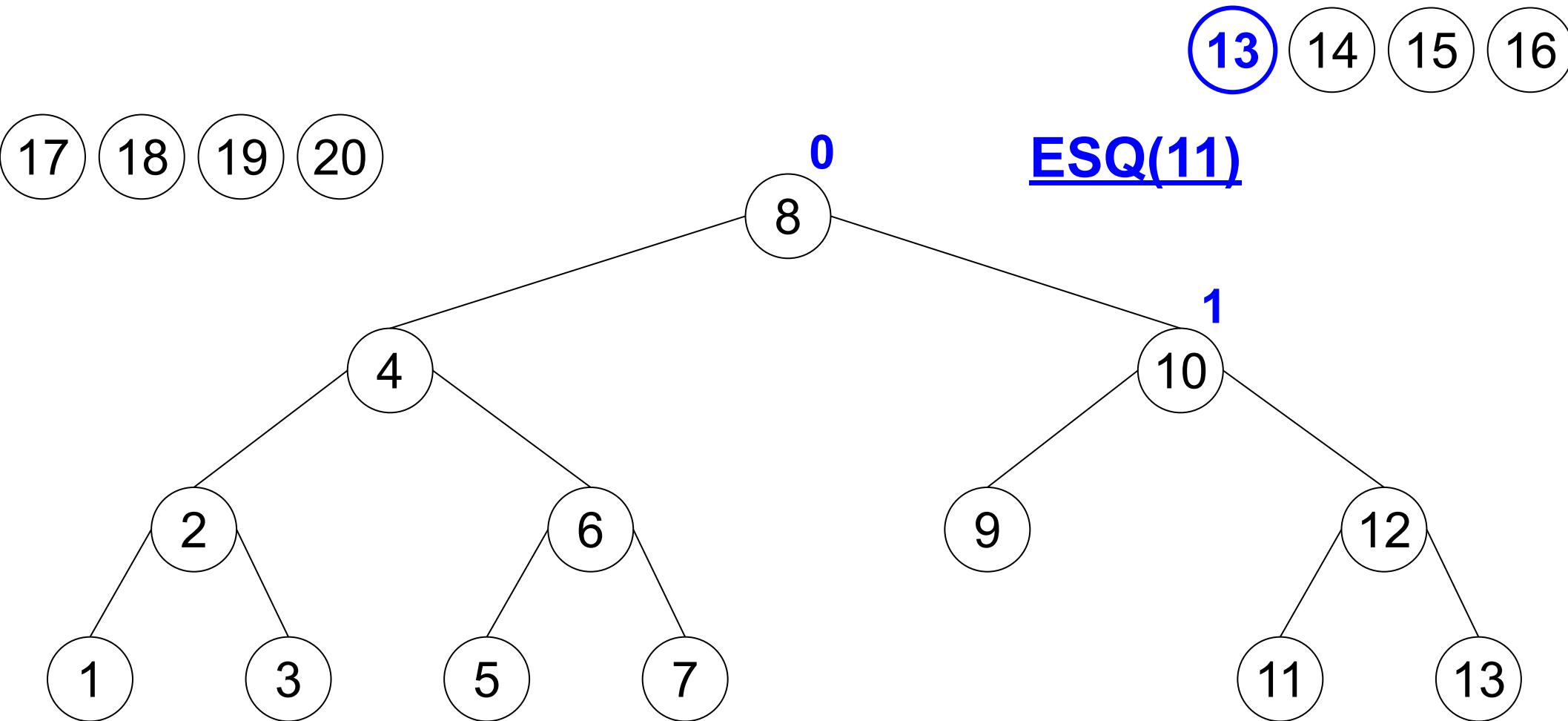
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



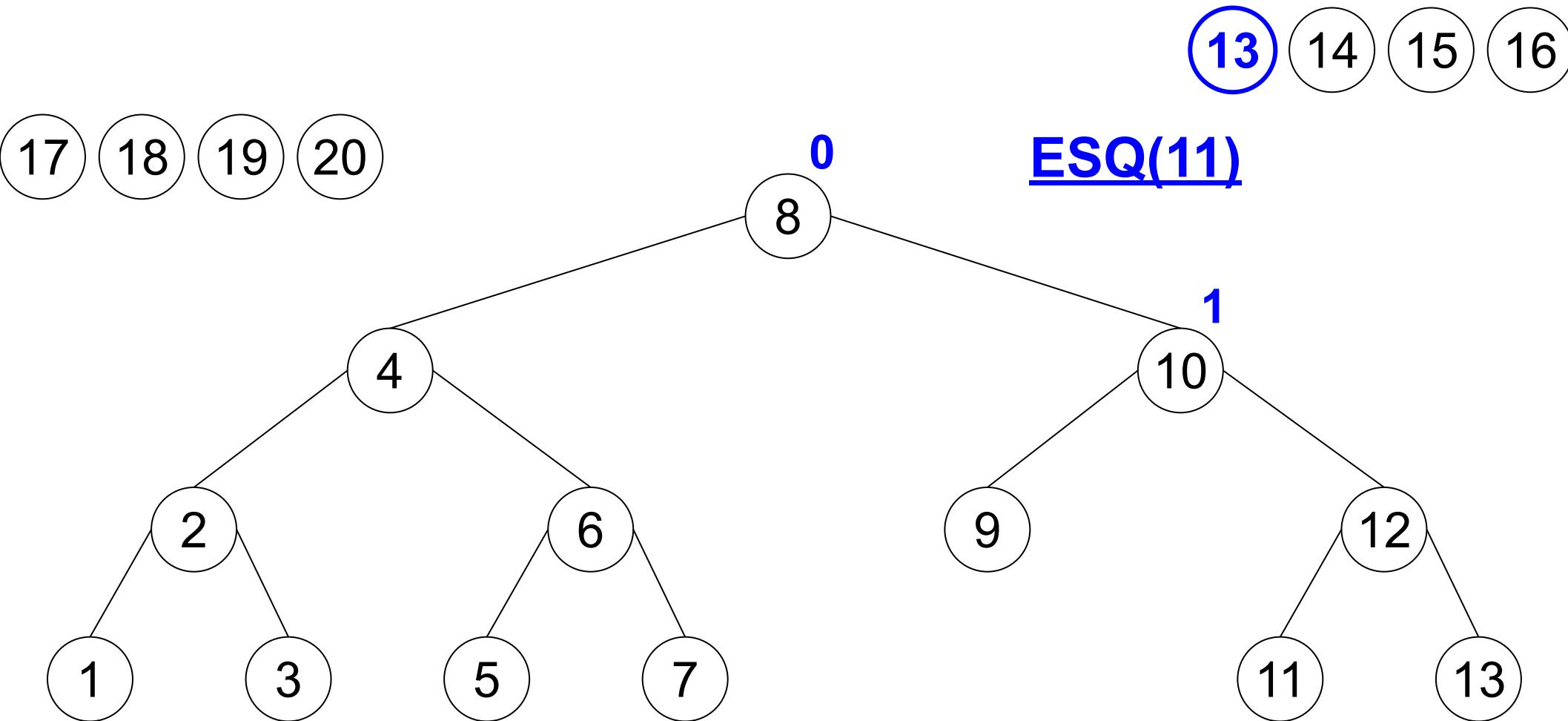
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



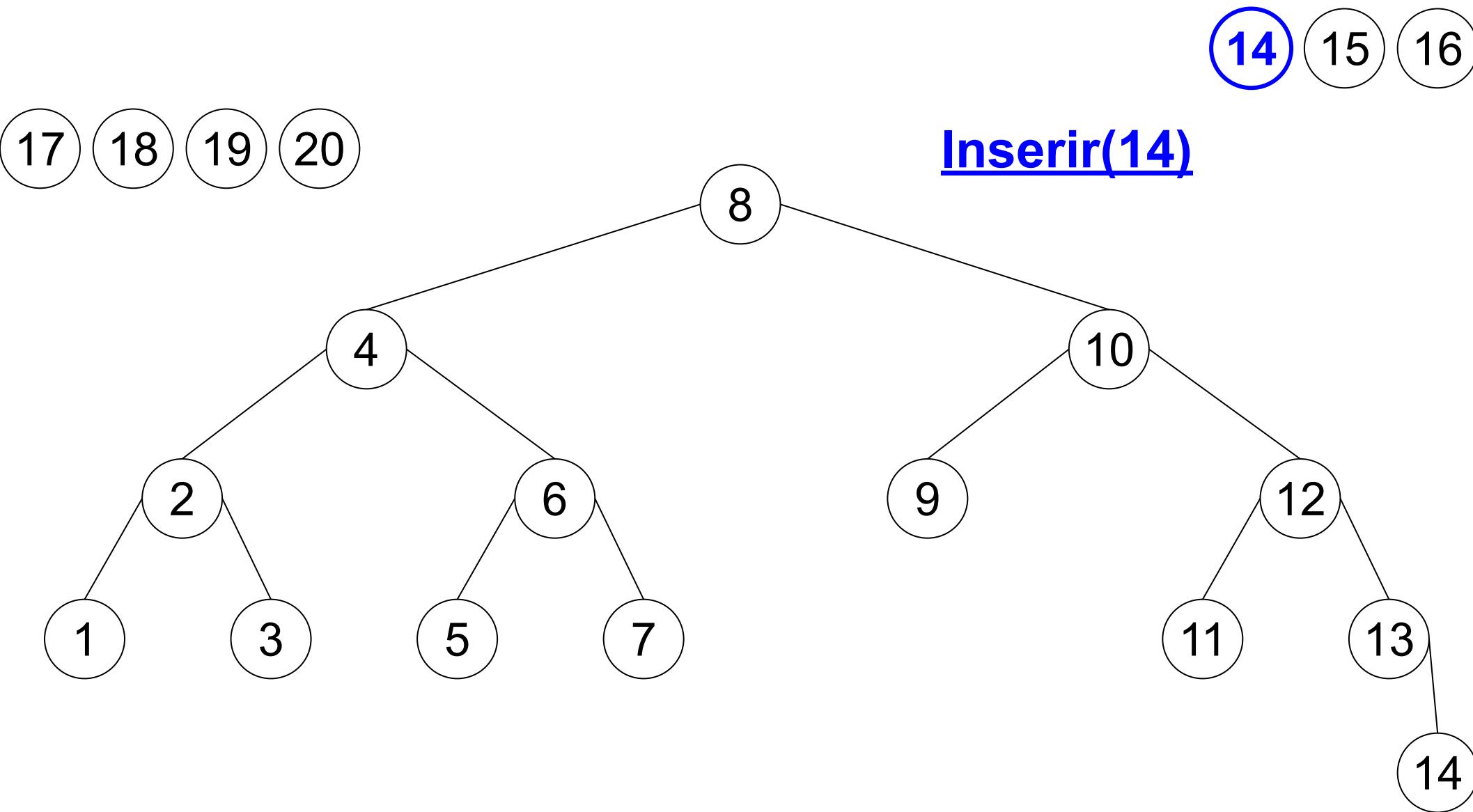
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



Inserir os Números 1 à 20 na AVL

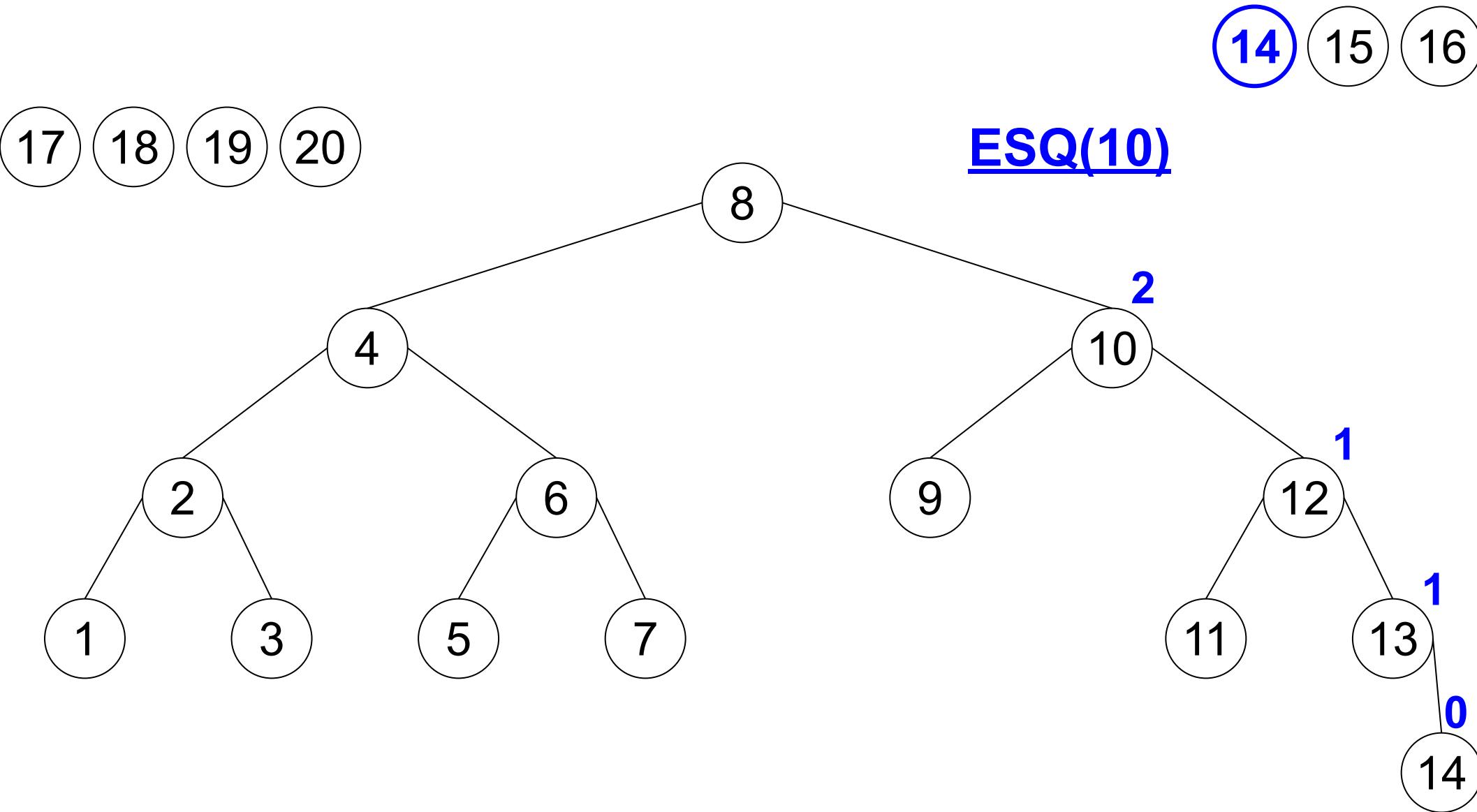


Inserir os Números 1 à 20 na AVL

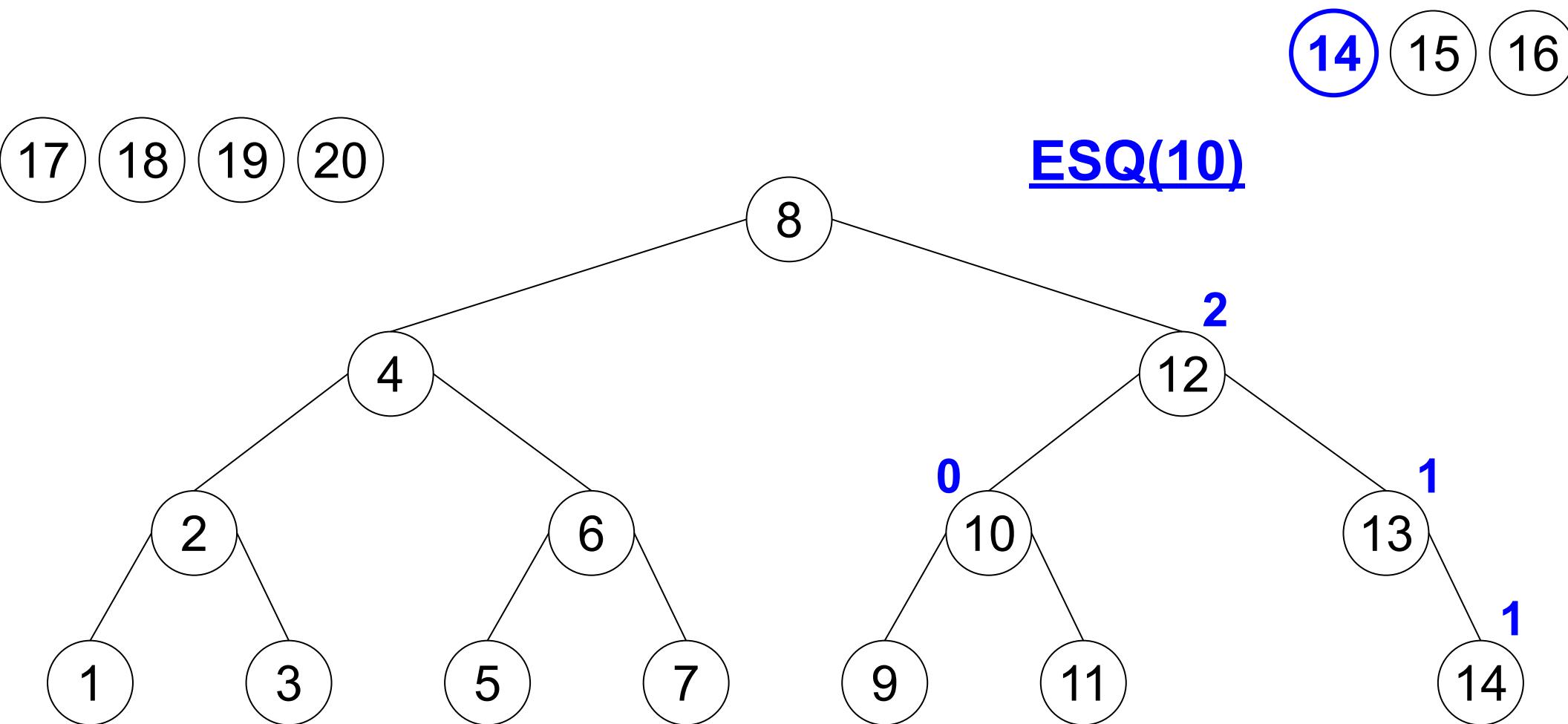


Inserir(14)

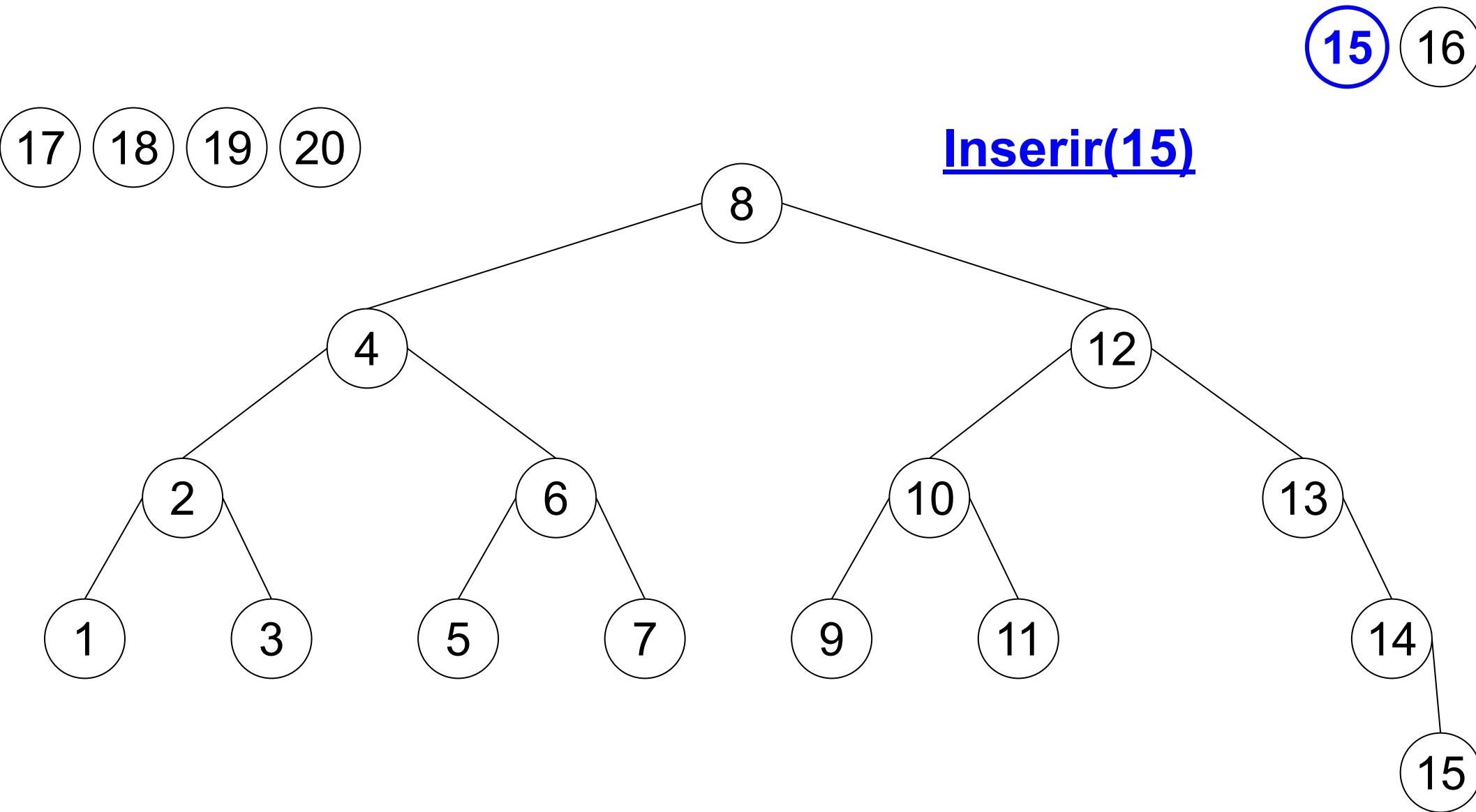
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



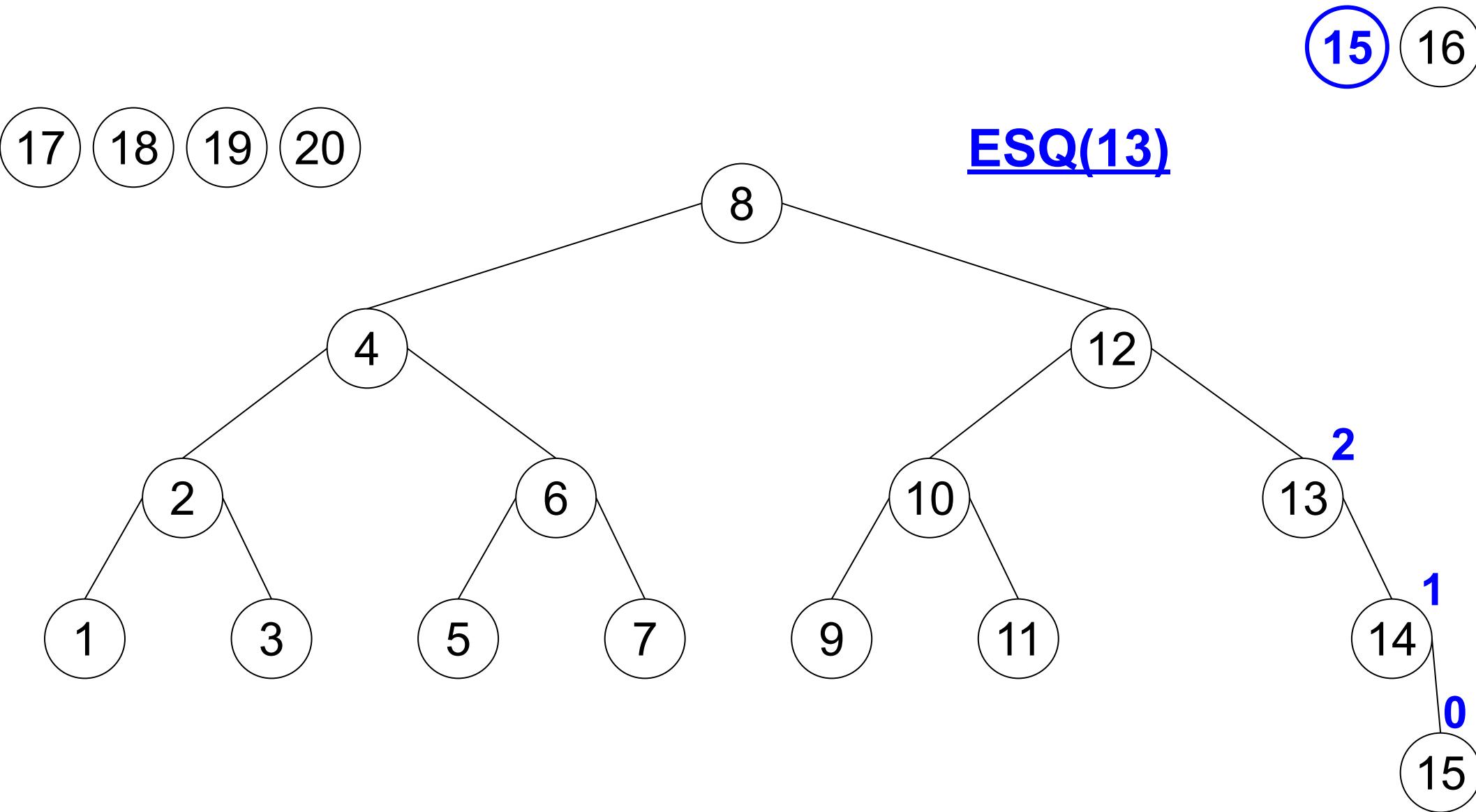
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



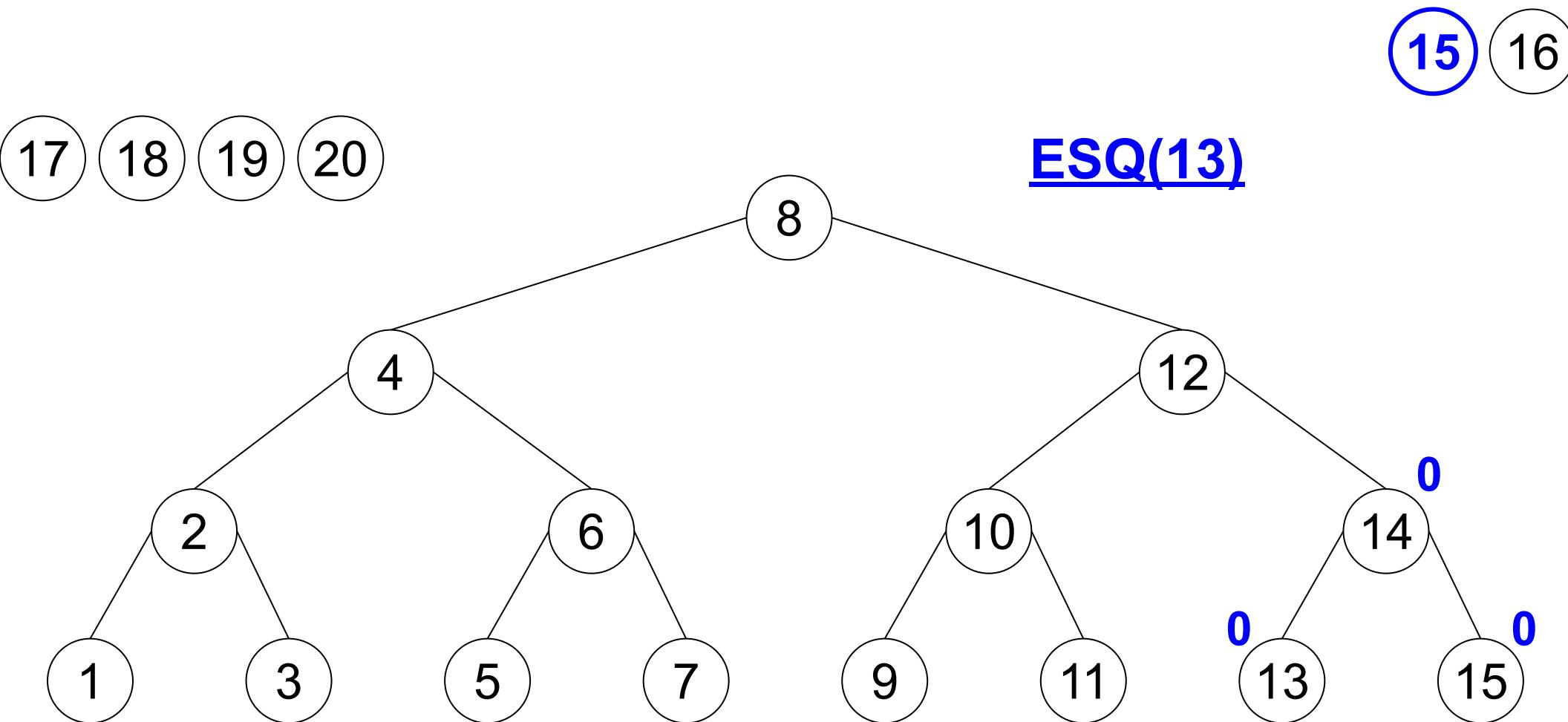
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



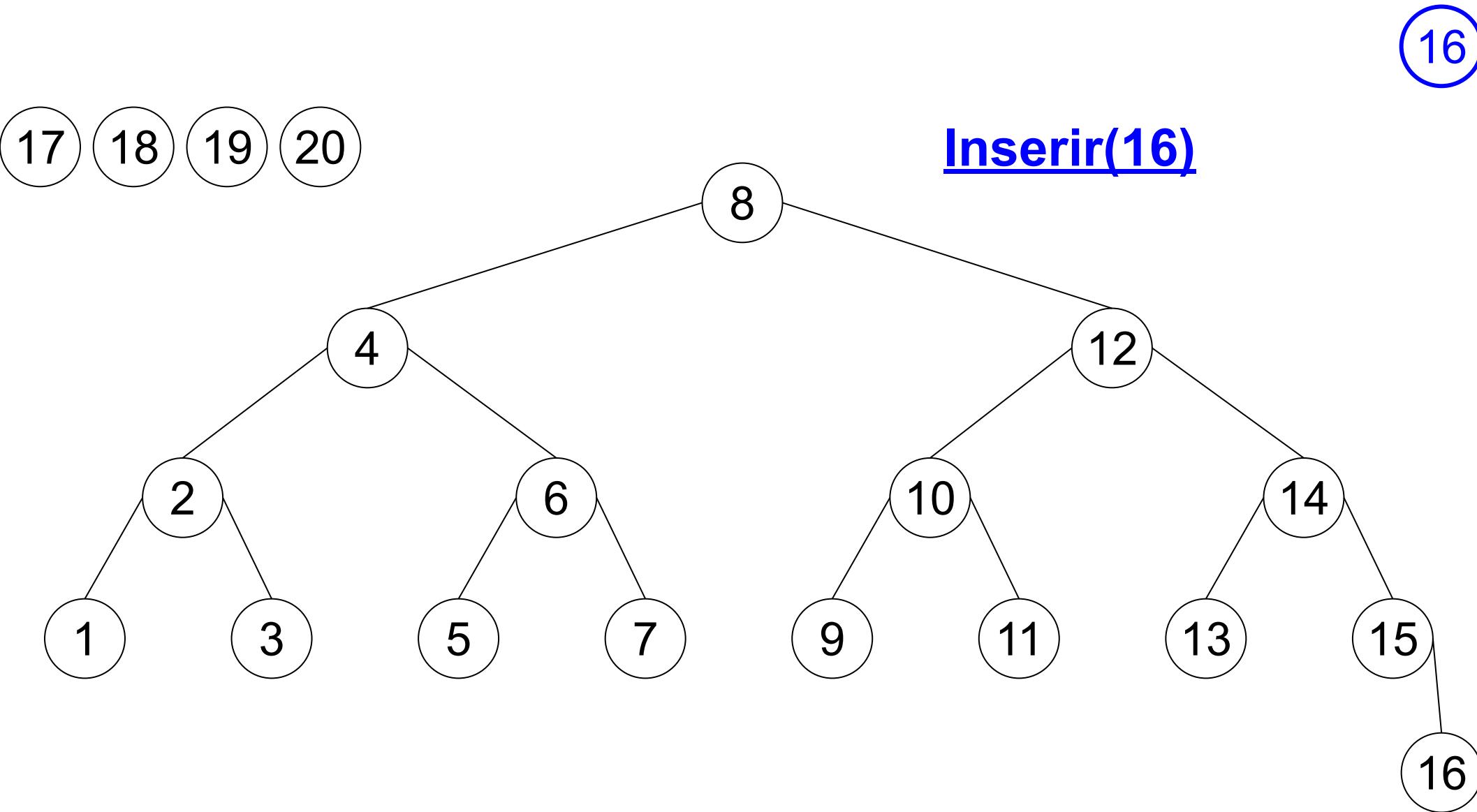
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



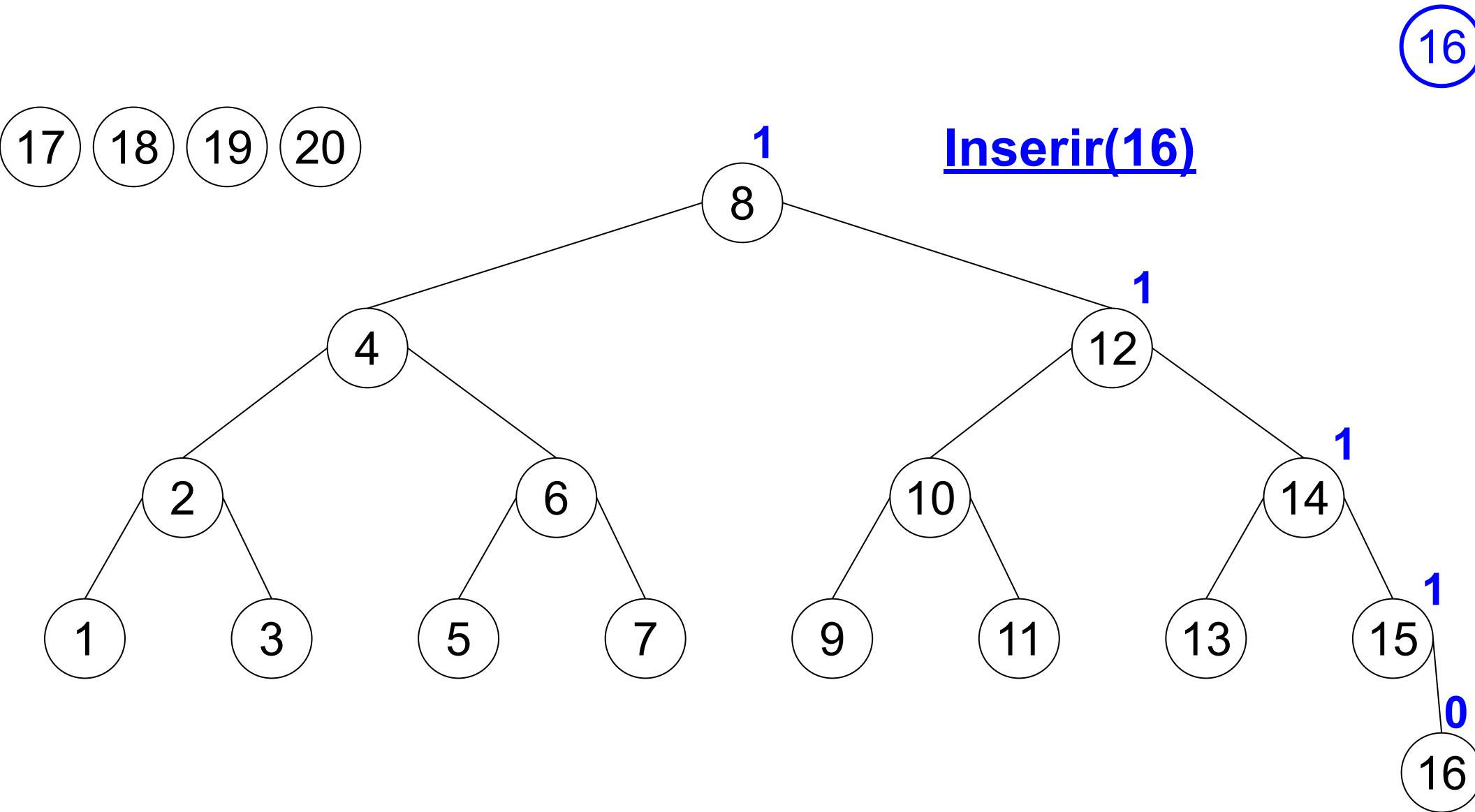
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



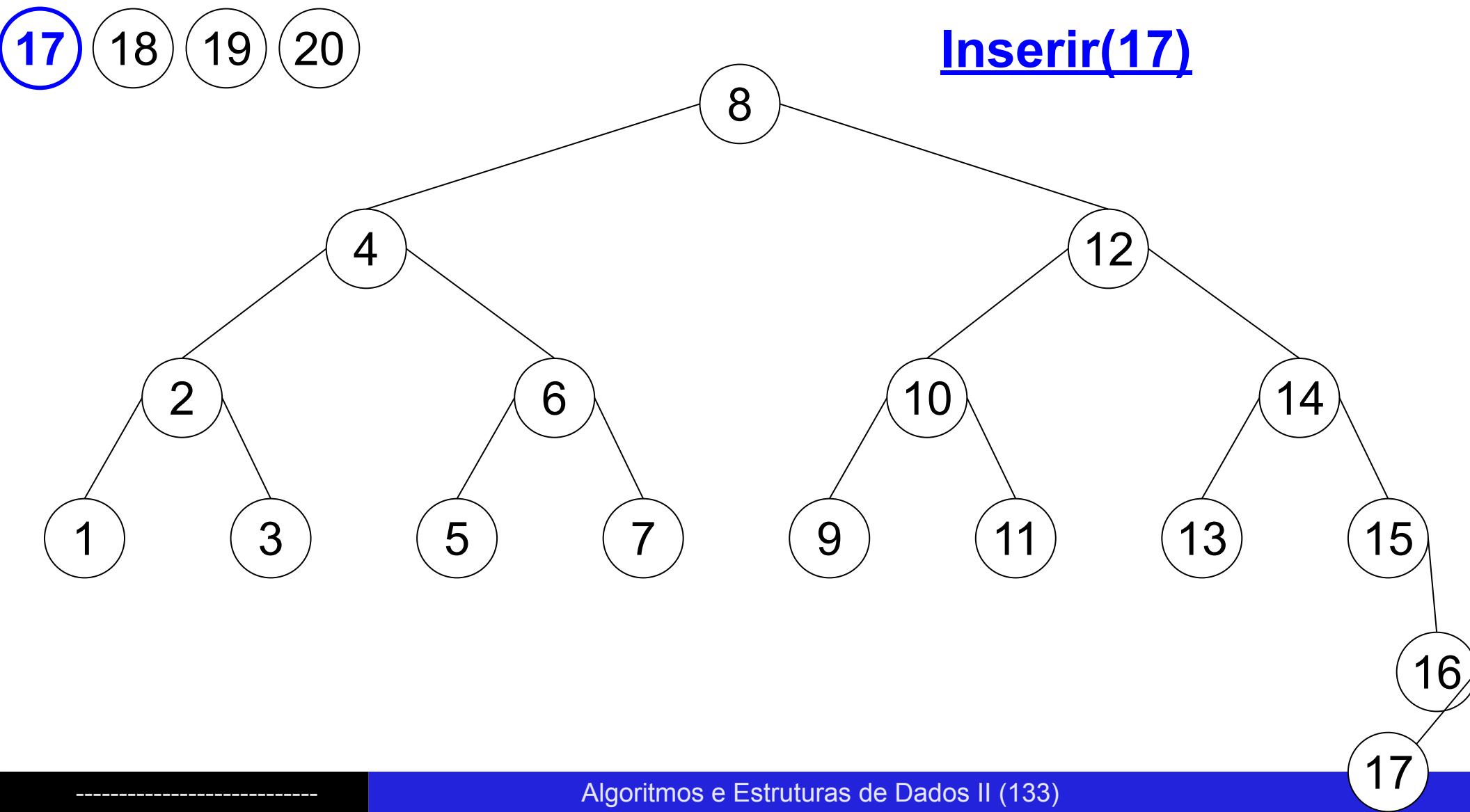
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



Inserir os Números 1 à 20 na AVL

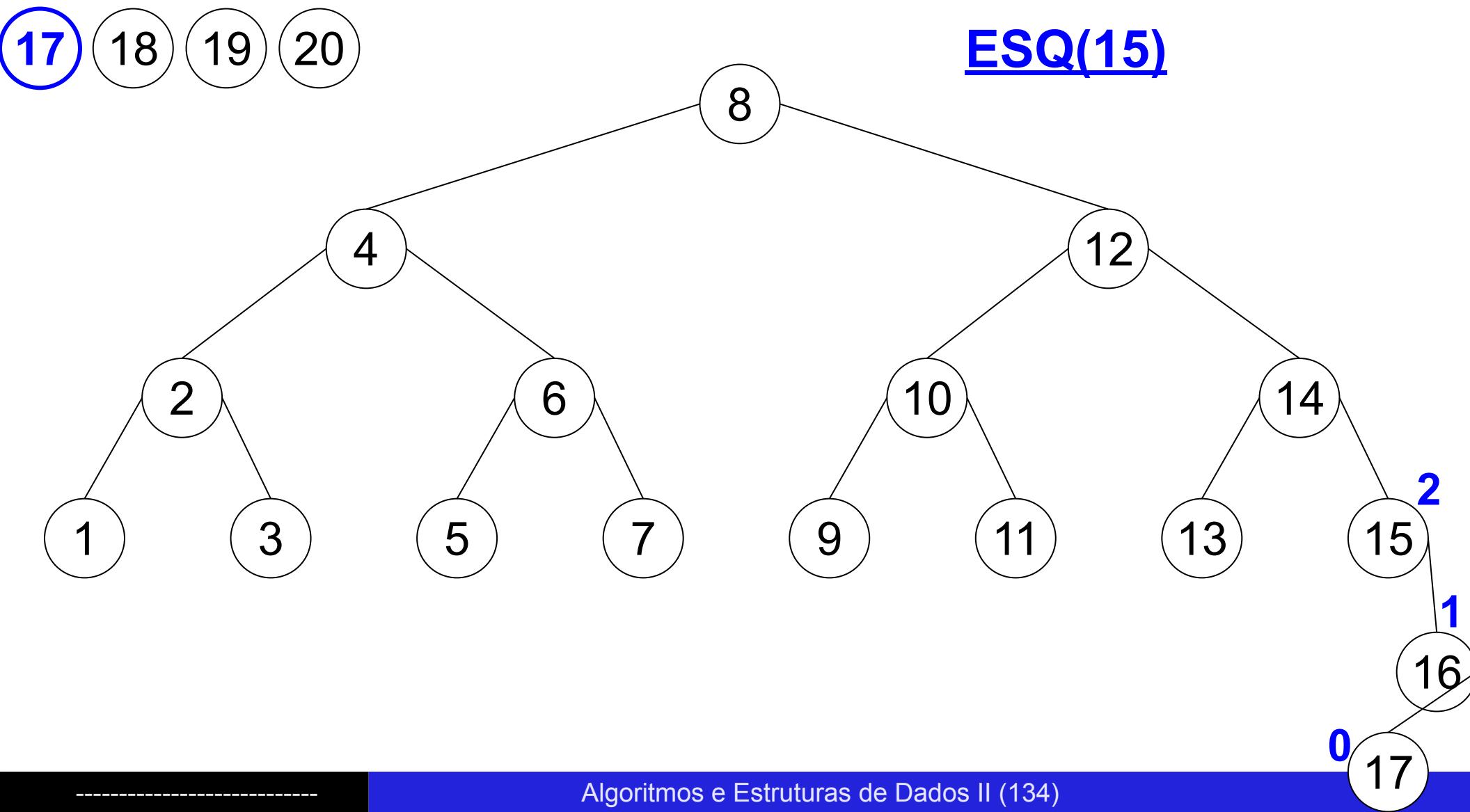


Inserir os Números 1 à 20 na AVL

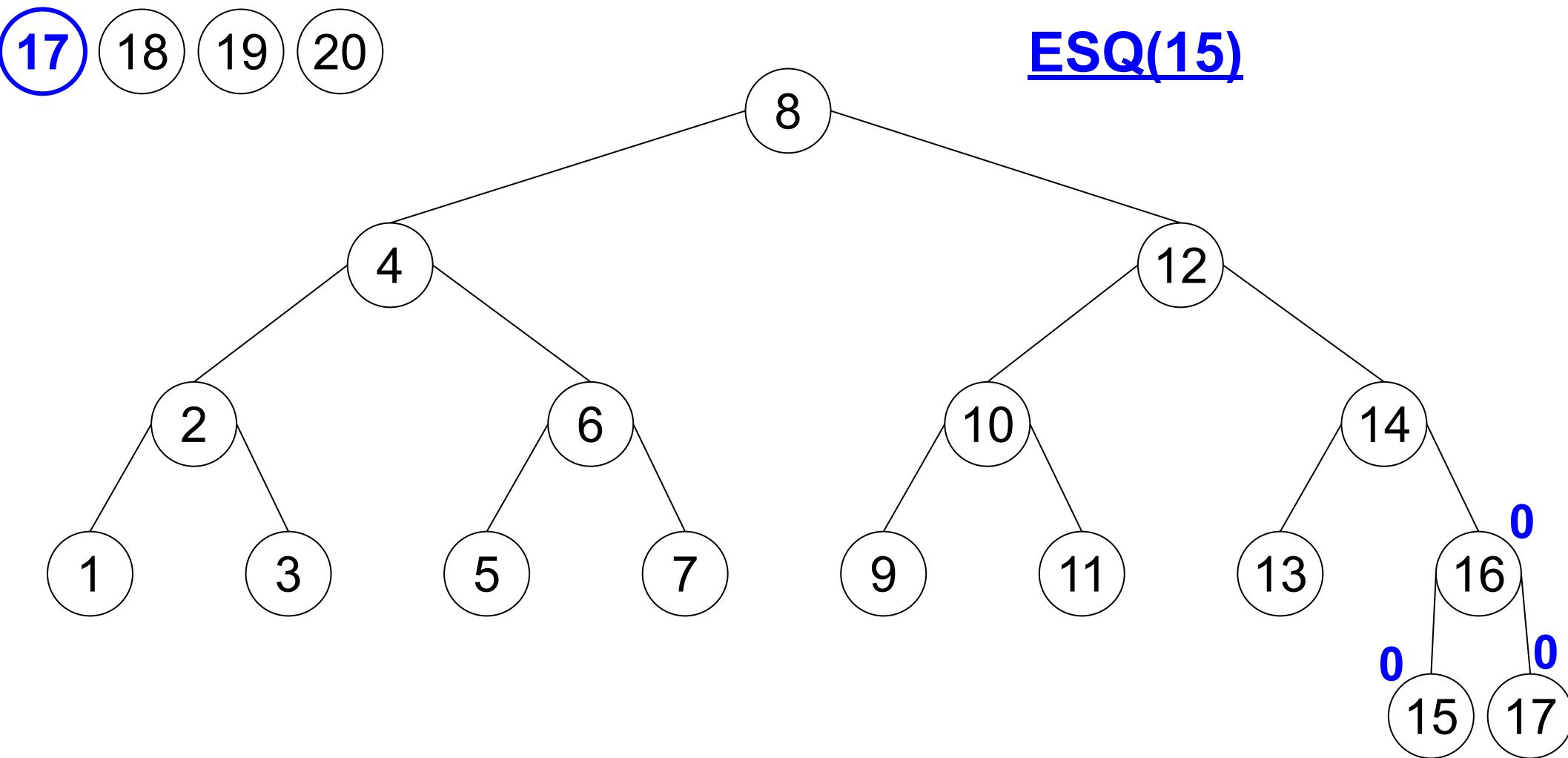


Inserir(17)

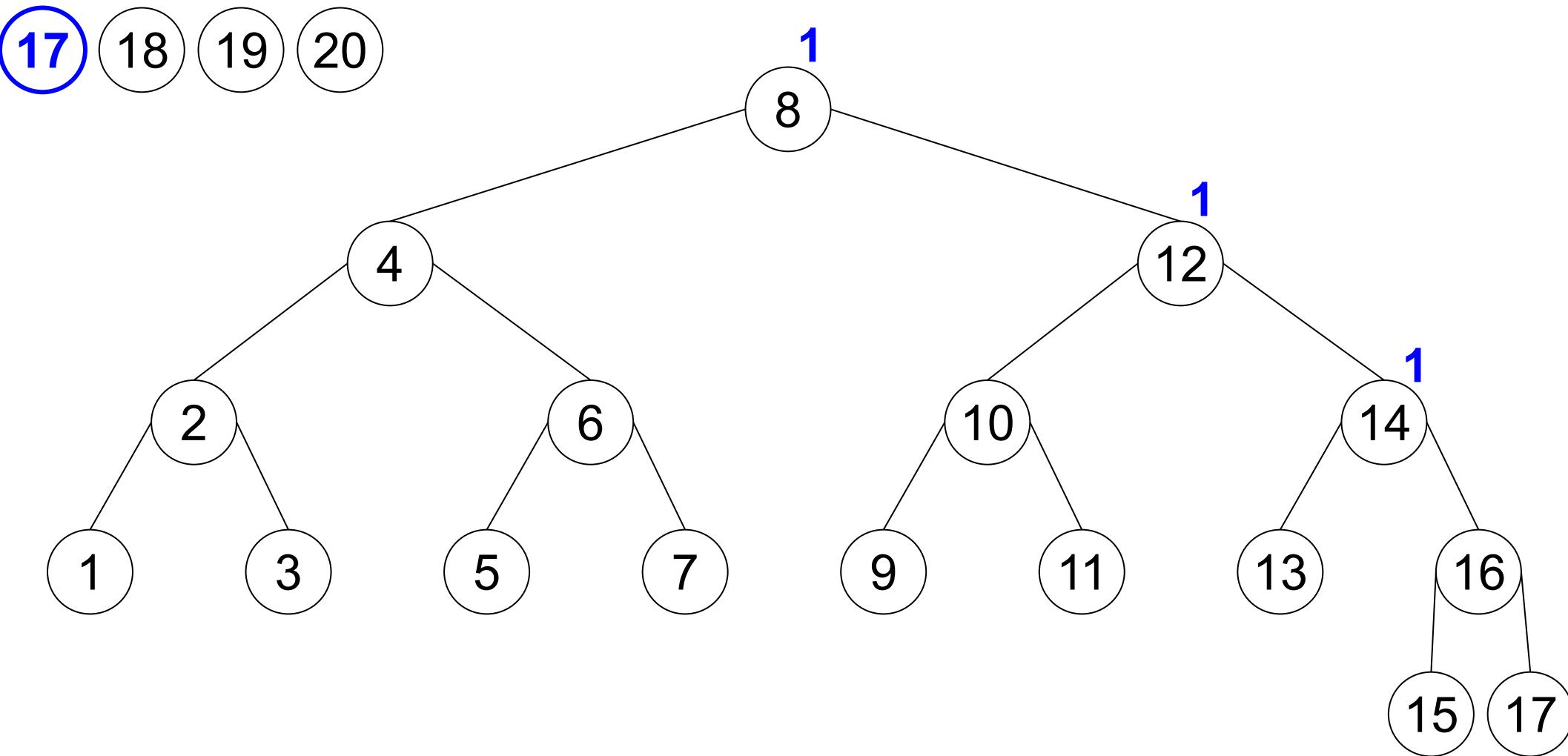
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



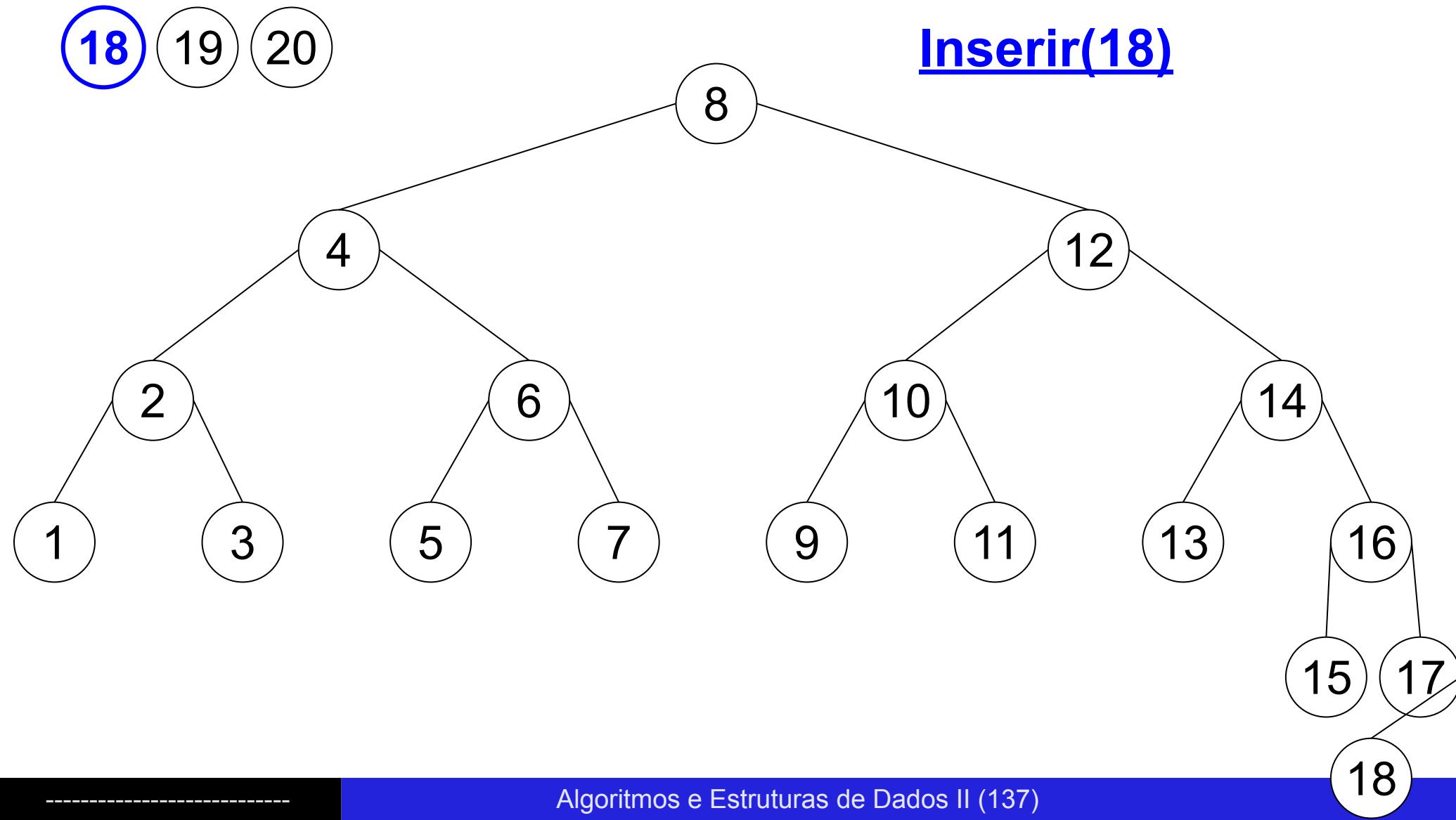
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



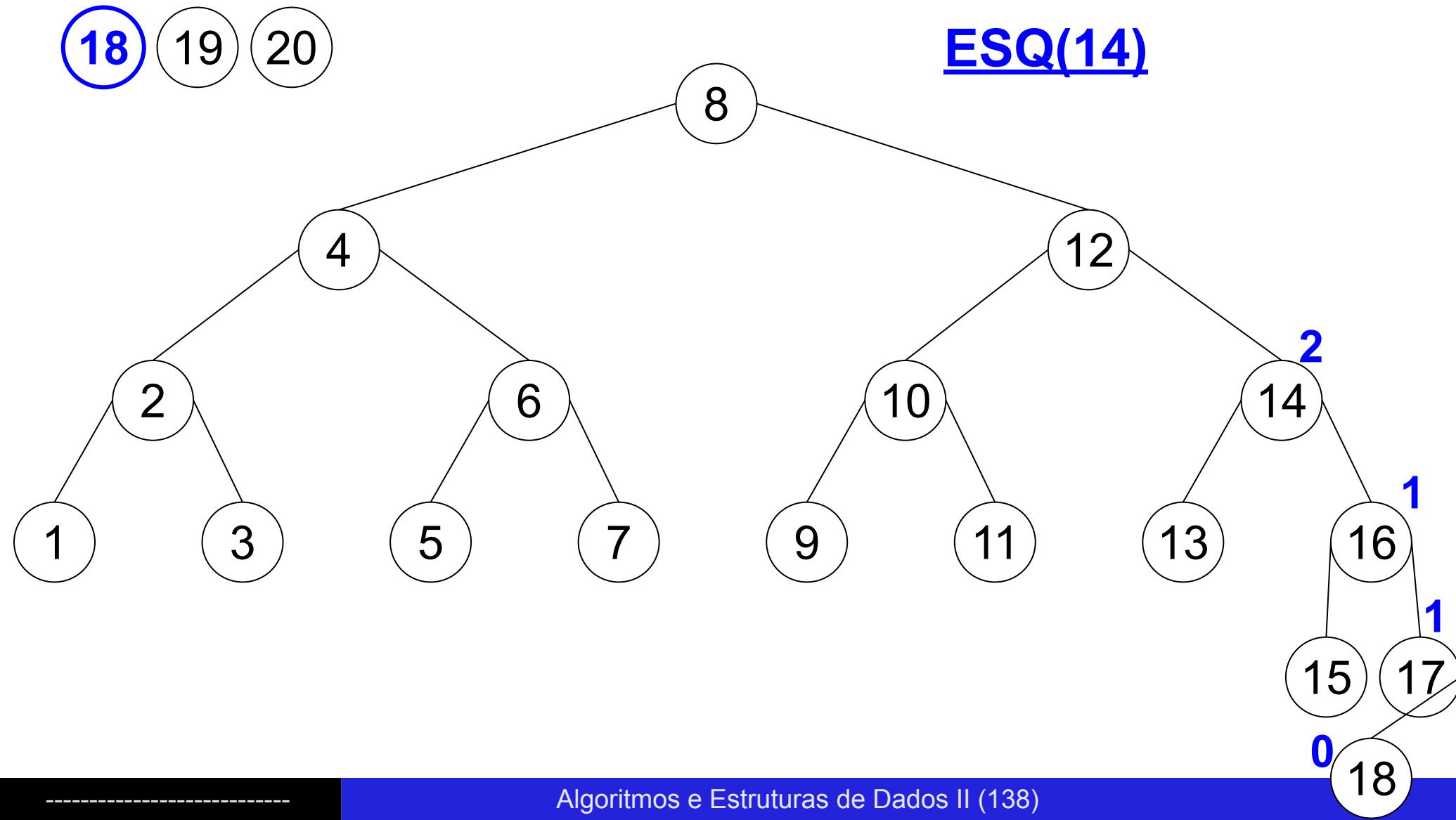
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



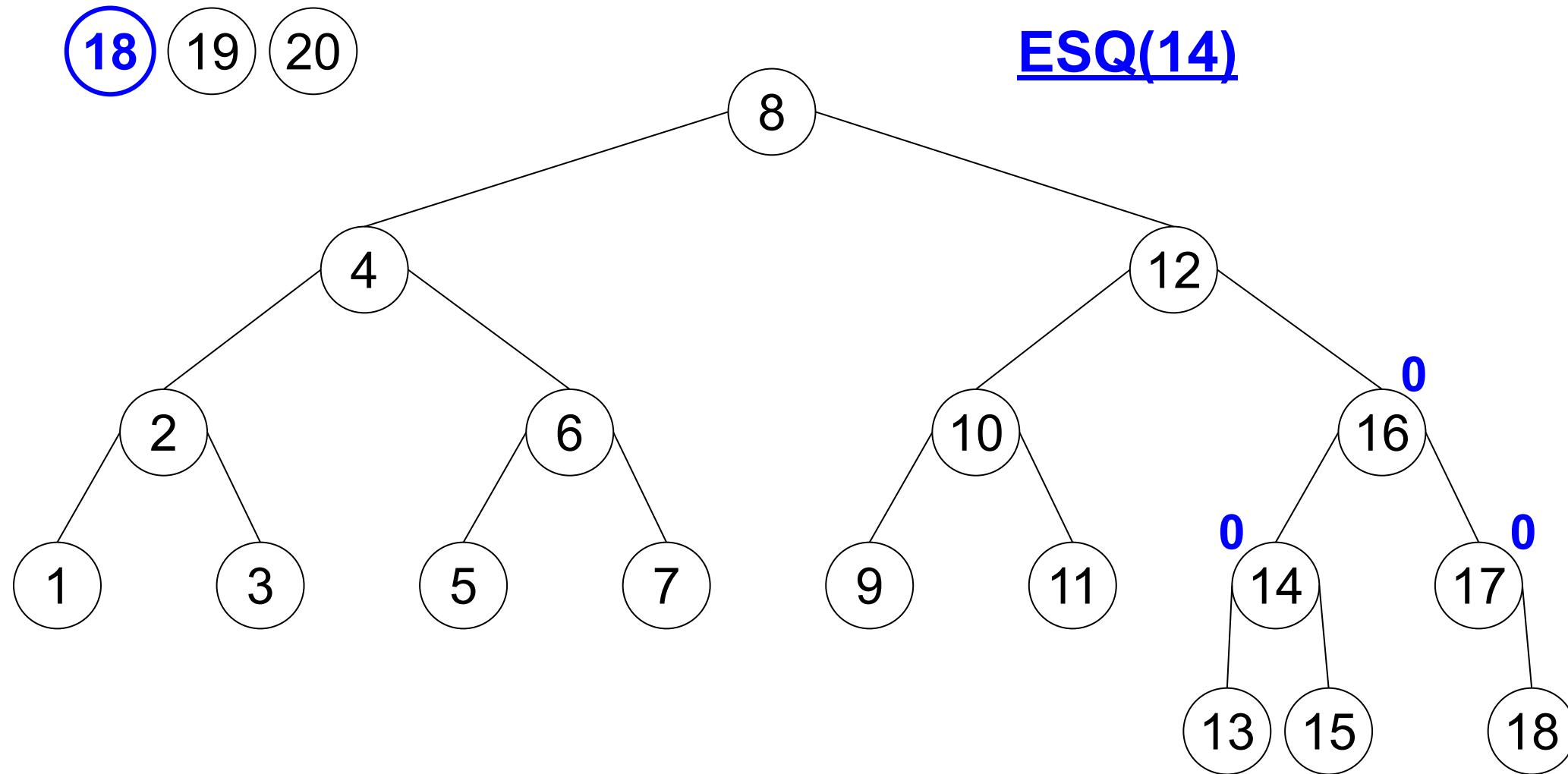
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



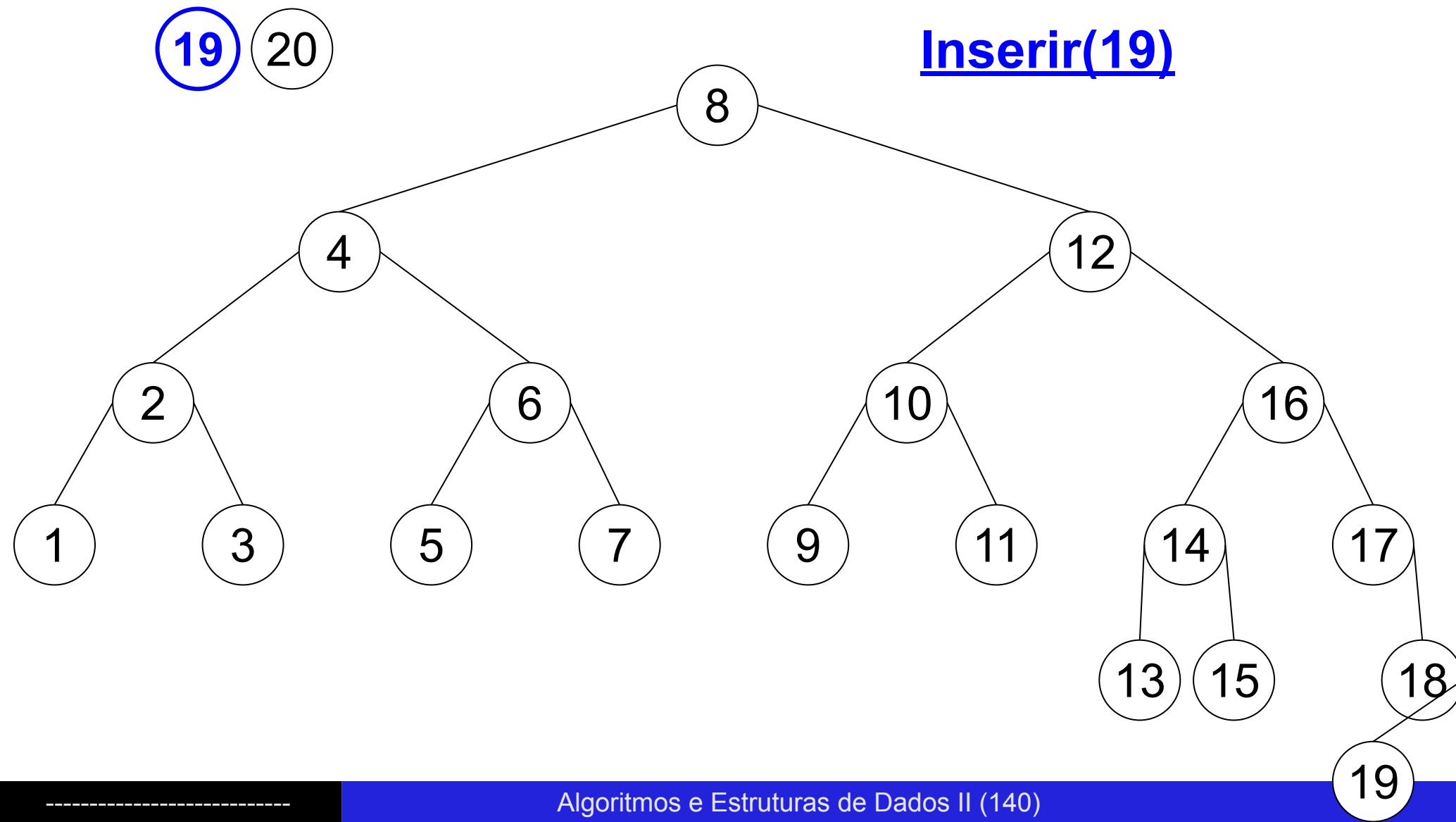
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



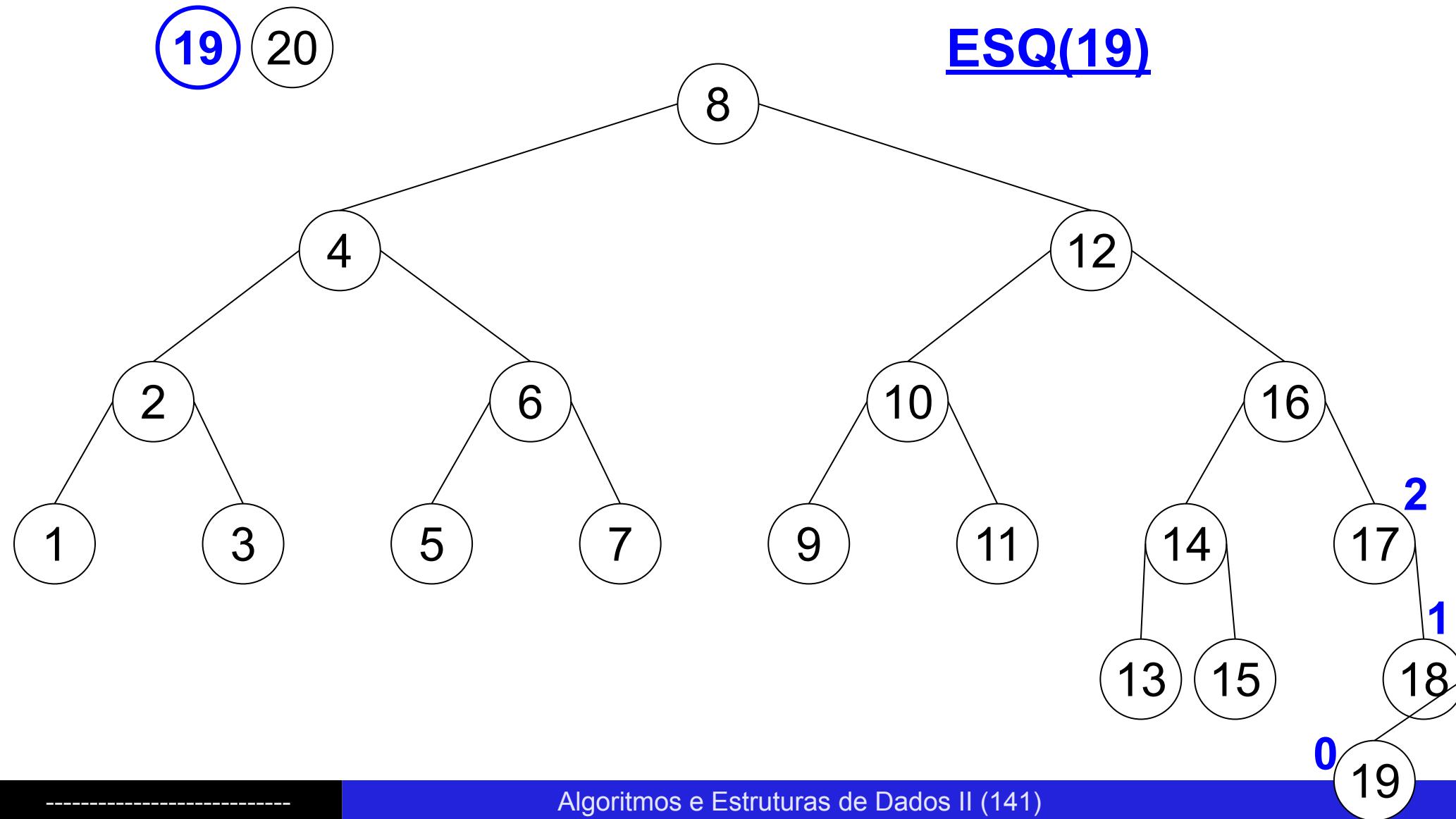
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



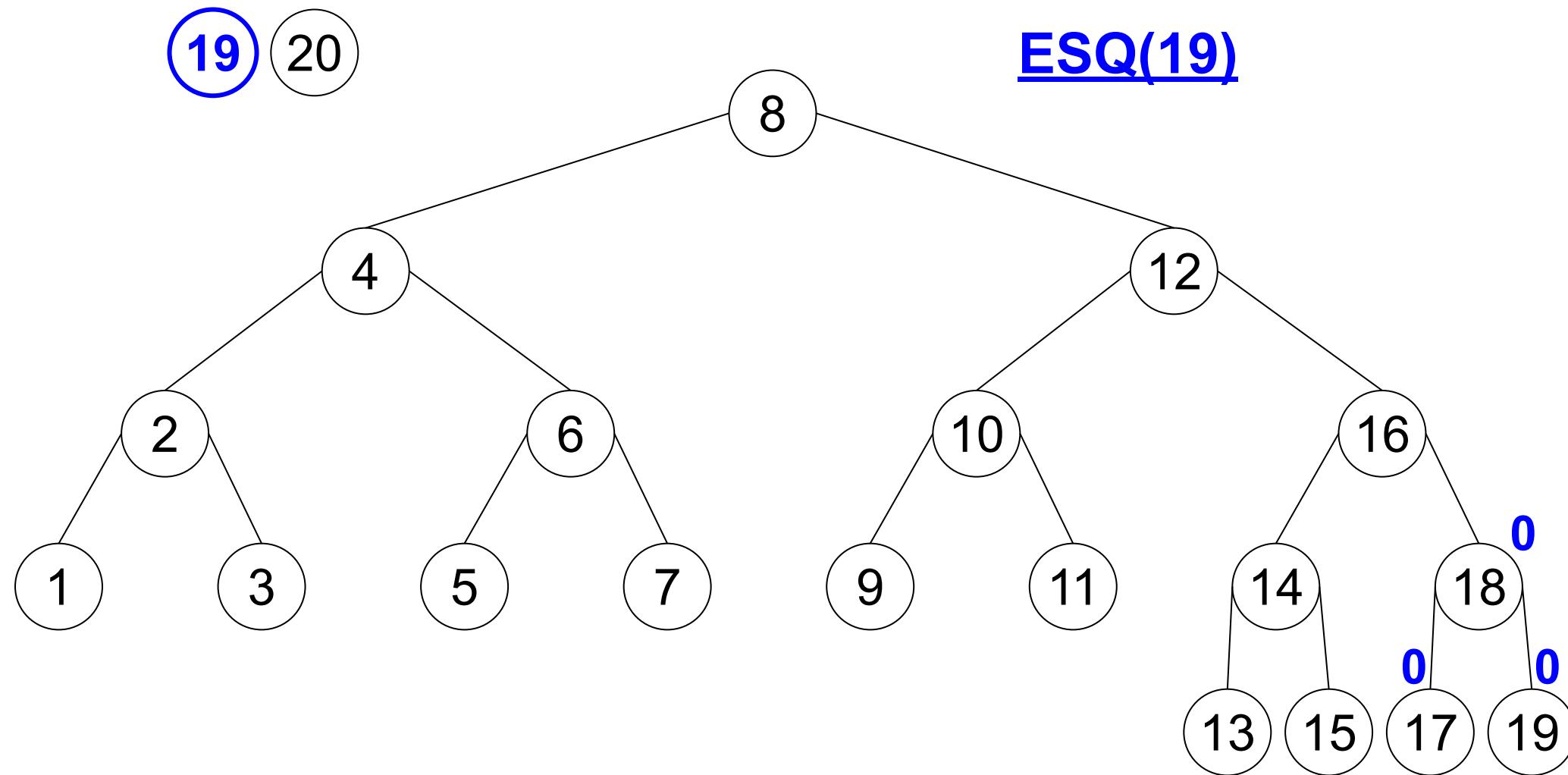
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



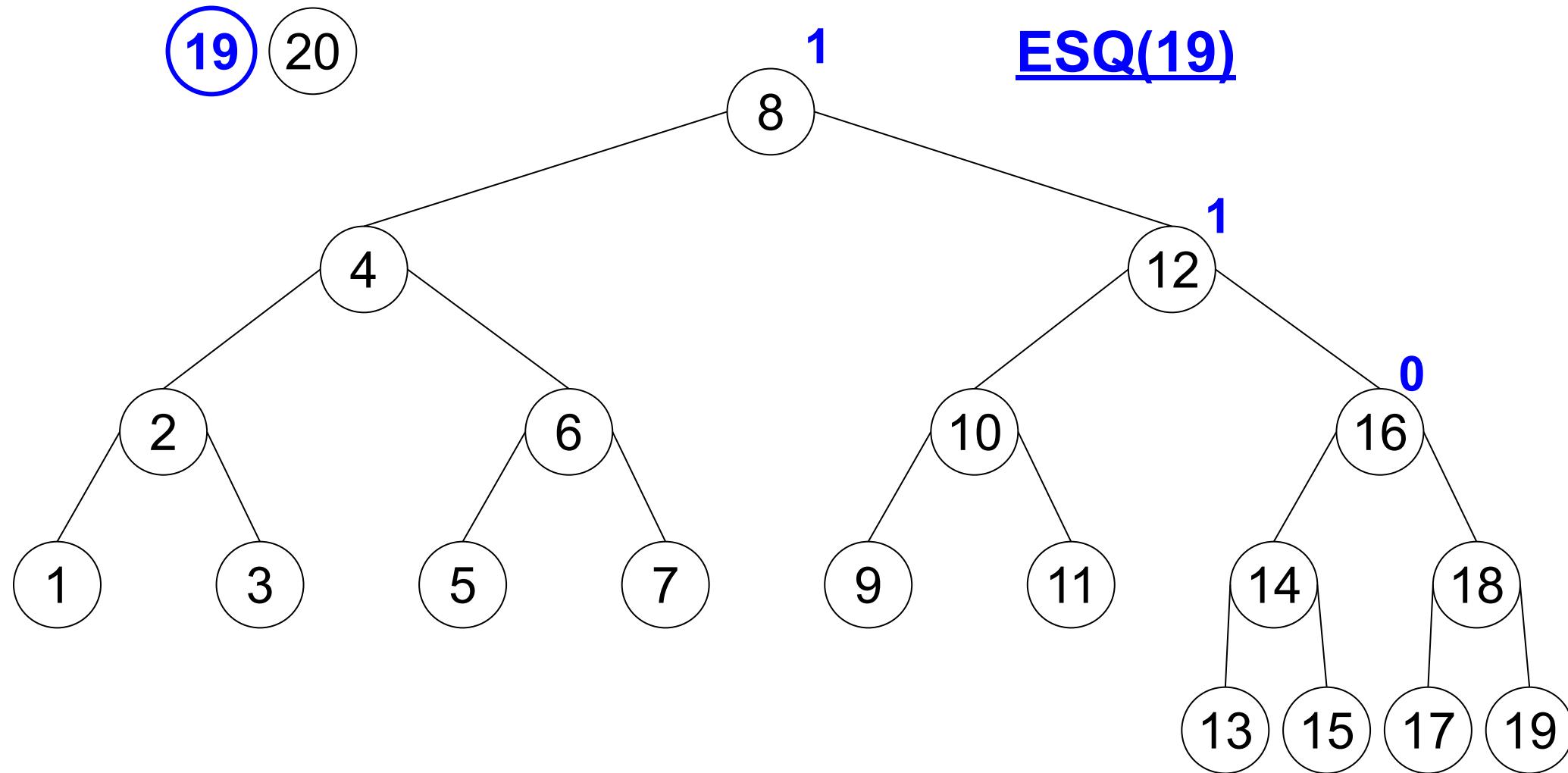
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



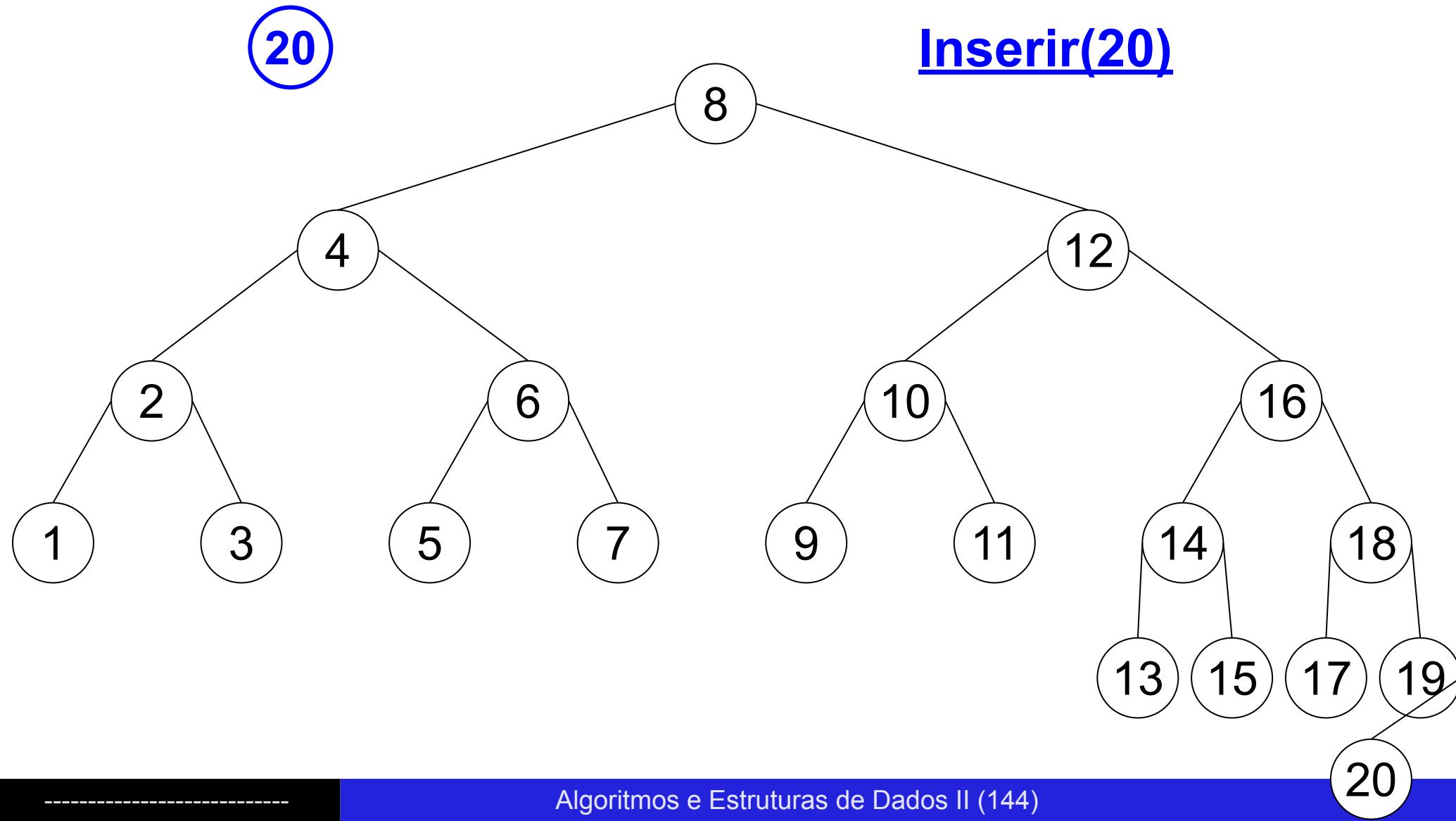
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



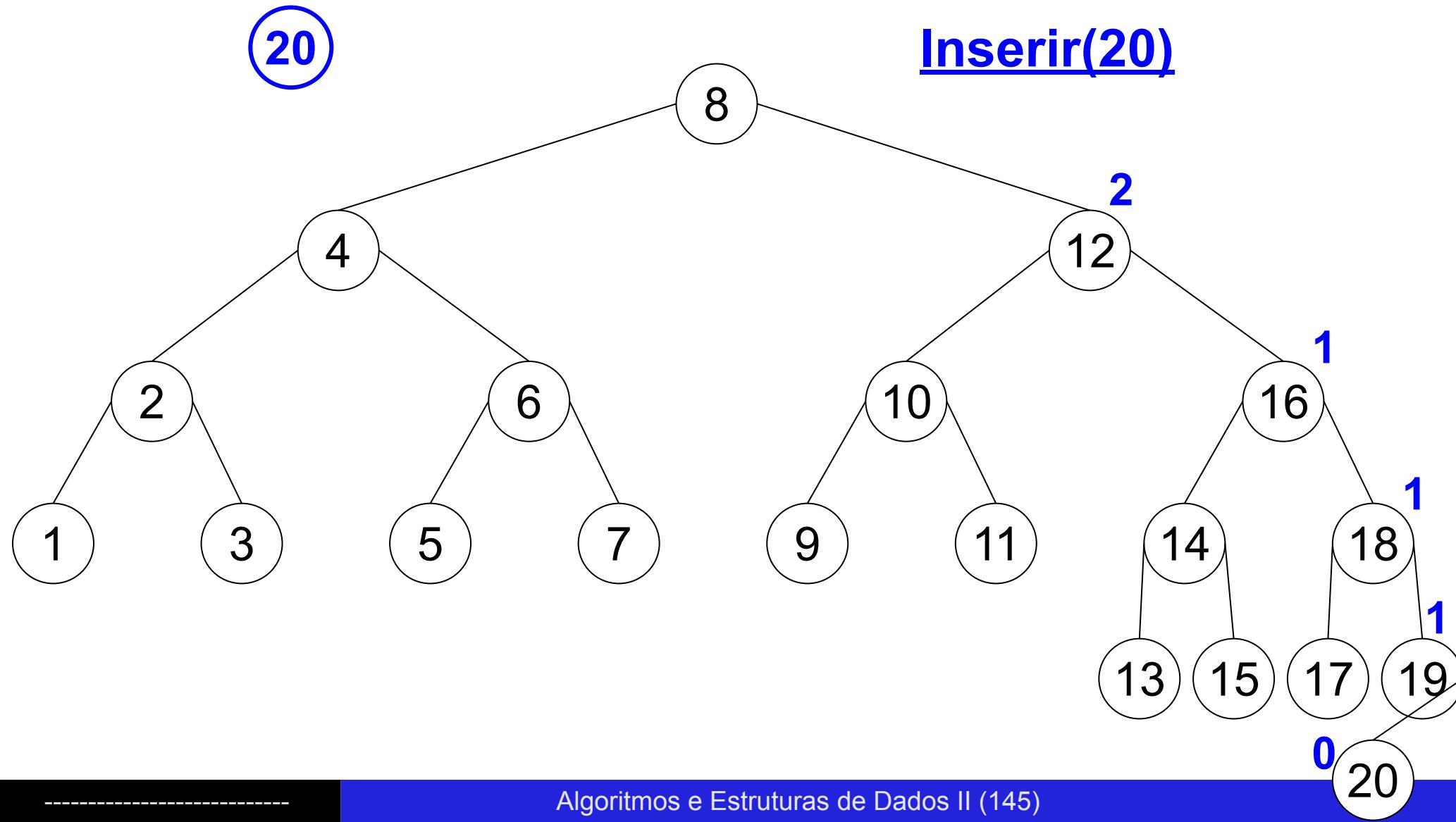
Inserir os Números 1 à 20 na AVL



Inserir os Números 1 à 20 na AVL



Inserir os Números 1 à 20 na AVL



Inserir os Números 1 à 20 na AVL

