

# Unidade VI:

## Árvores AVL



**PUC Minas**

Instituto de Ciências Exatas e Informática  
Departamento de Ciência da Computação

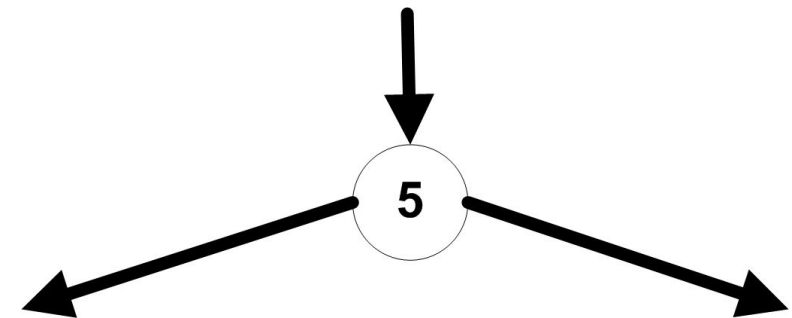
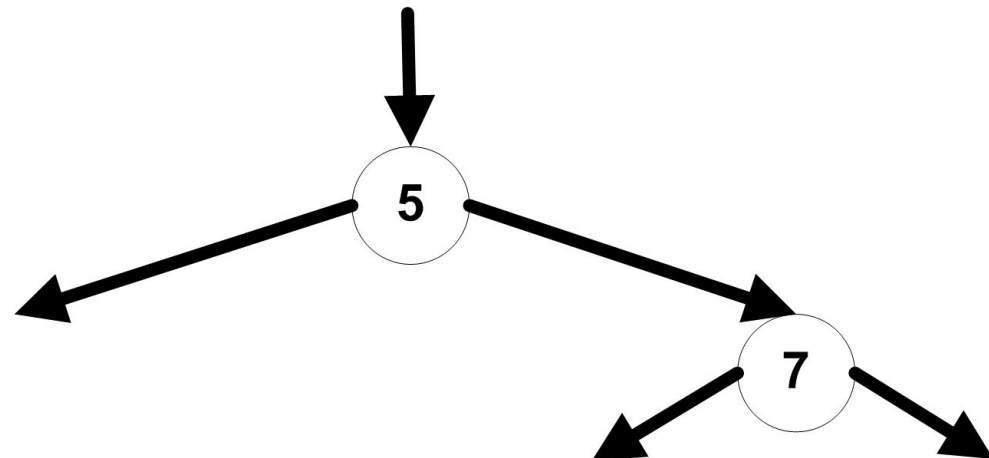
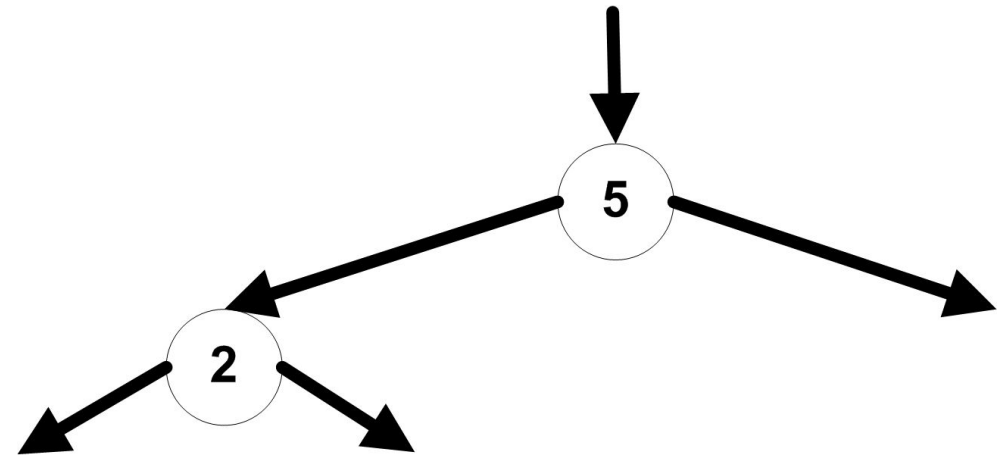
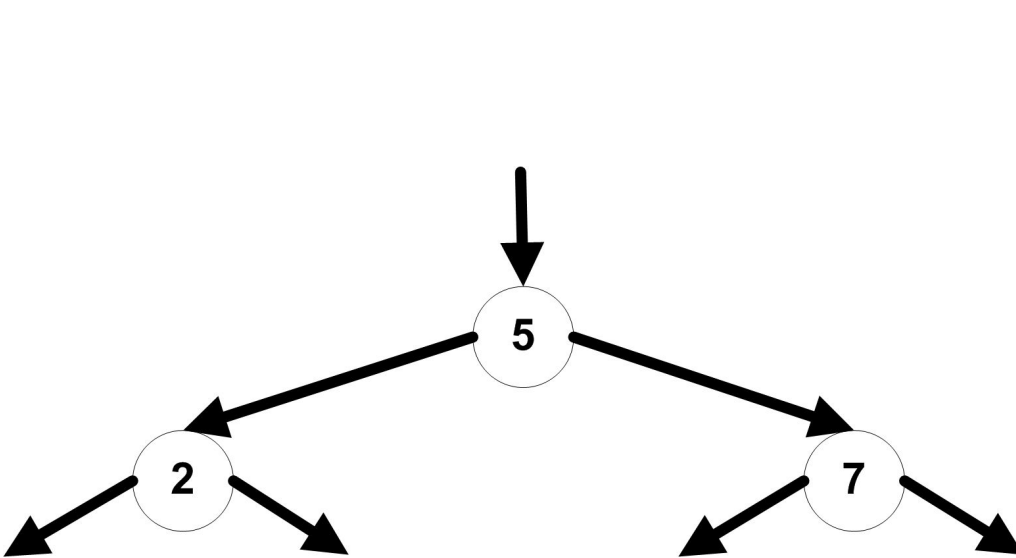
# Introdução

- As árvores AVL foram propostas por Adelson-Velskii e Landis
- No pior caso, o número de comparações para se localizar um elemento em uma AVL é aproximadamente  $1,44 * \lg(n) = \Theta(\lg(n))$
- Cada nó conhece seu **fator de balanceamento** que consiste na diferença entre o número de níveis de suas subárvores à esquerda e à direita

$$\text{fator}(i) = \text{alturaDir}(i) - \text{alturaEsq}(i)$$

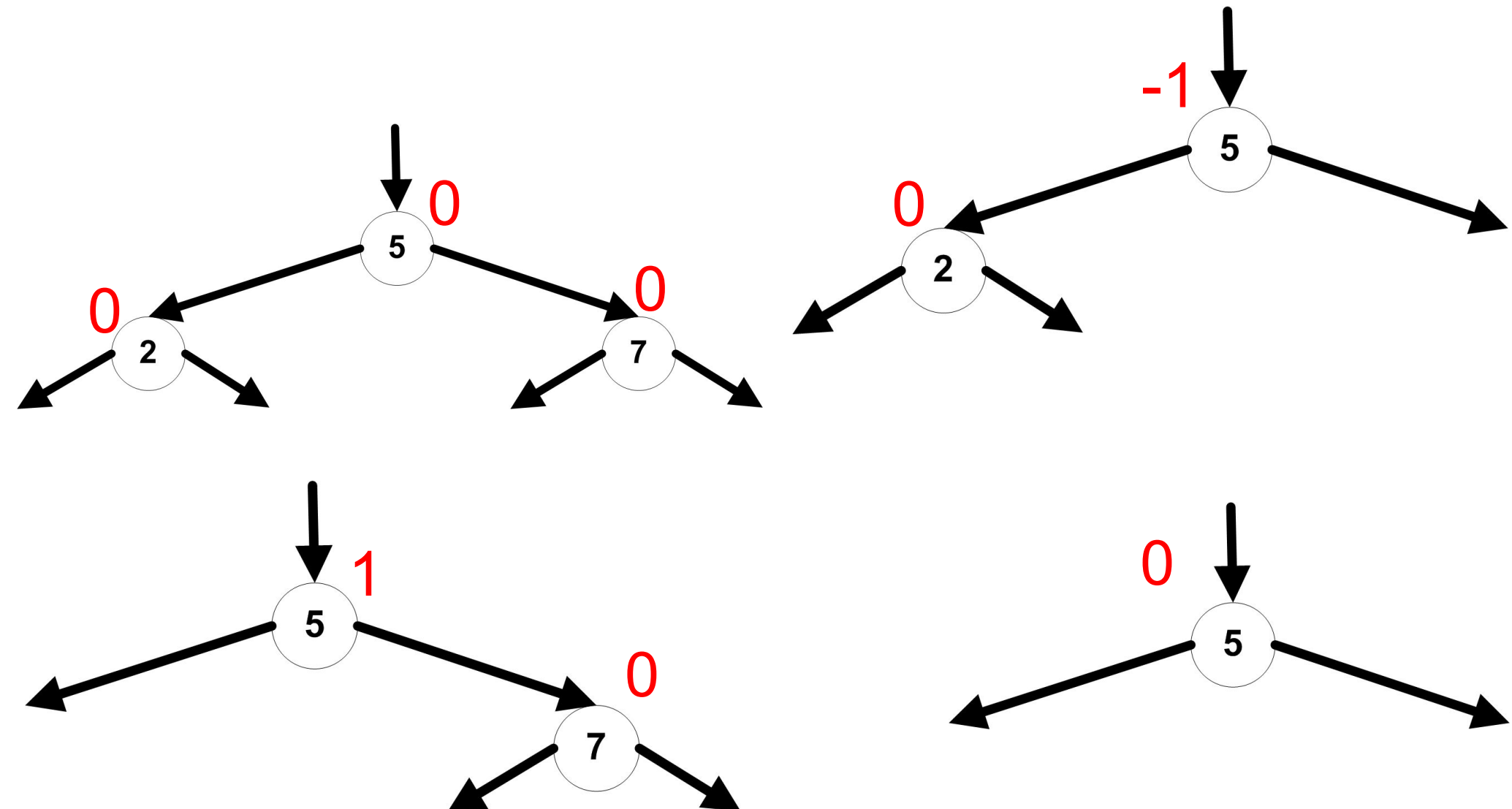
## Exercício

- Sejam as árvores abaixo, mostre o fator de balanceamento de cada nó



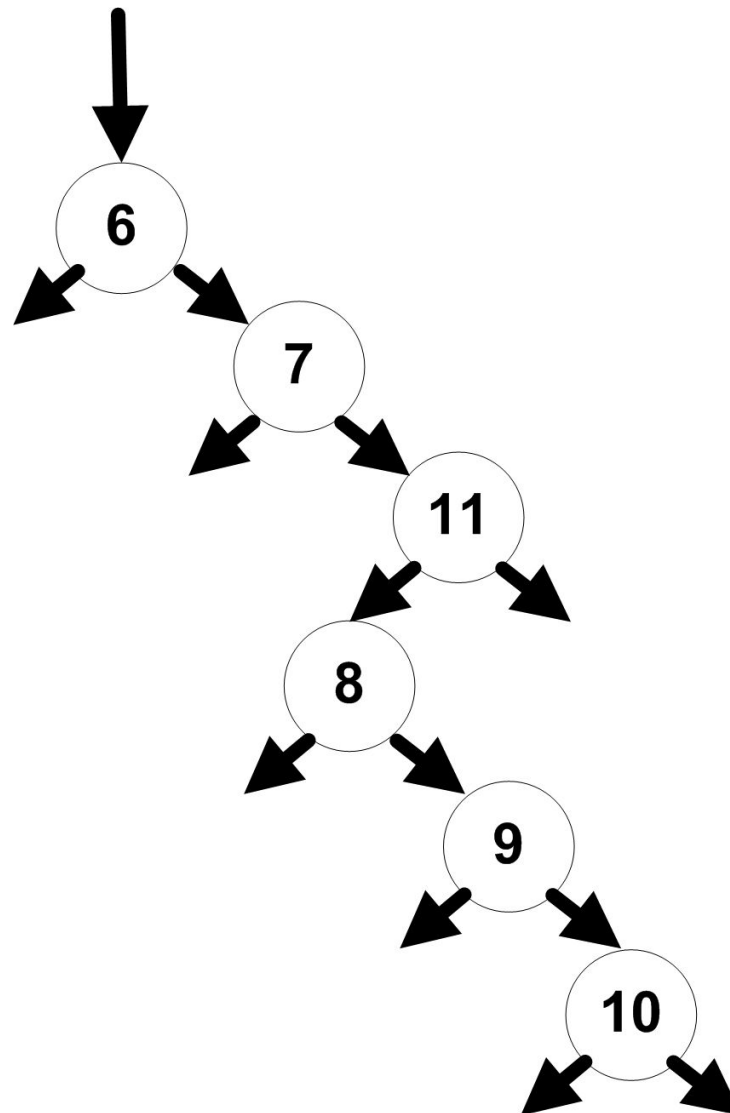
## Exercício

- Sejam as árvores abaixo, mostre o fator de balanceamento de cada nó



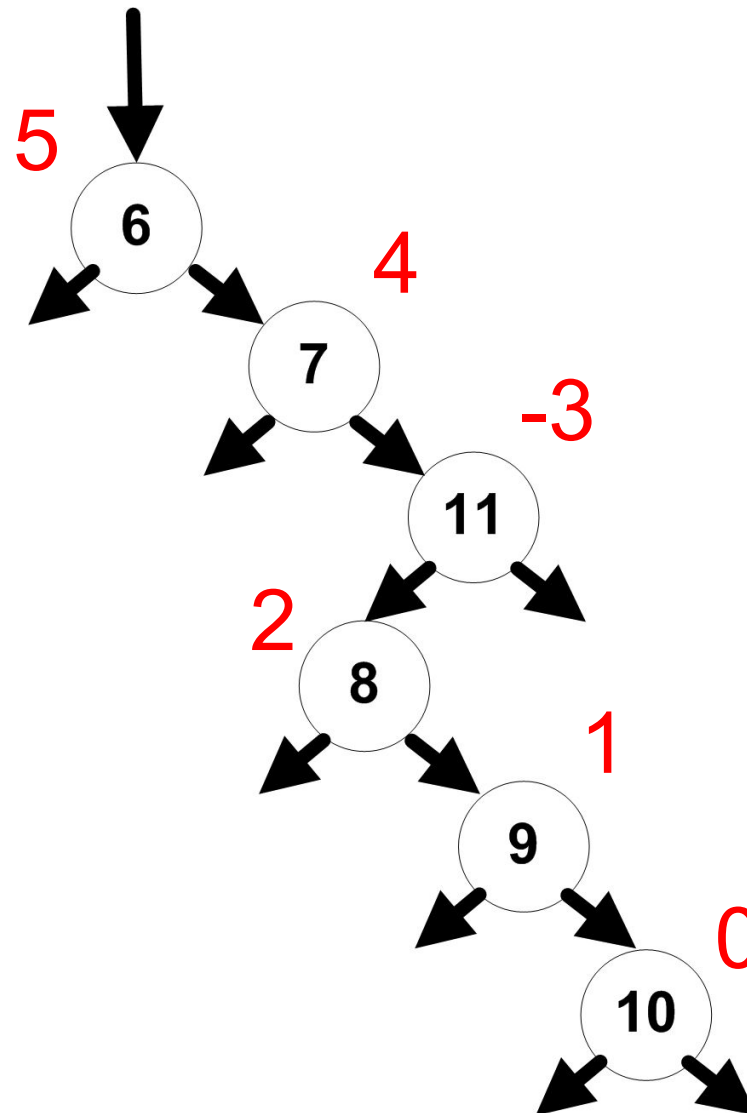
## Exercício

- Seja a árvore abaixo, mostre o fator de balanceamento de cada nó



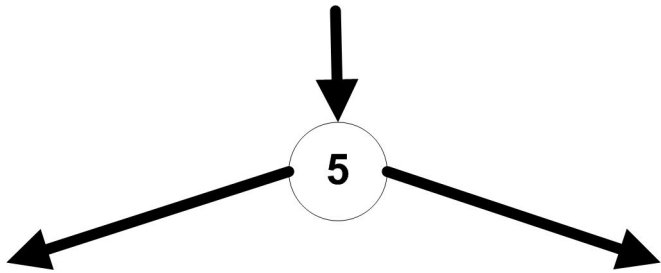
## Exercício

- Seja a árvore abaixo, mostre o fator de balanceamento de cada nó



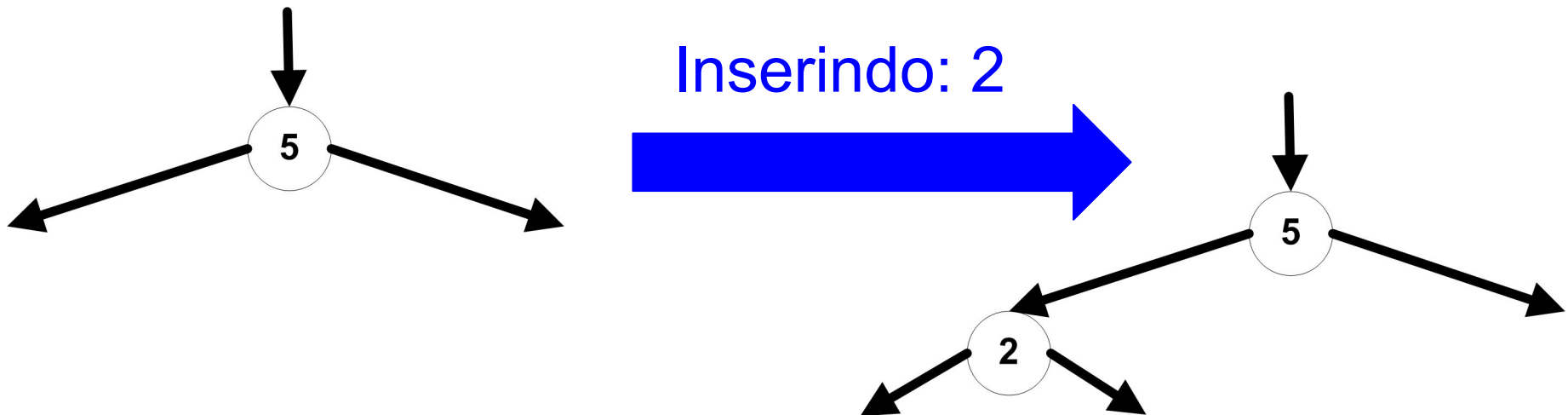
## Exercício

- Seja a árvore abaixo, faça a inserção de um elemento tal que o fator de balanceamento do nó cinco seja menos um



## Exercício

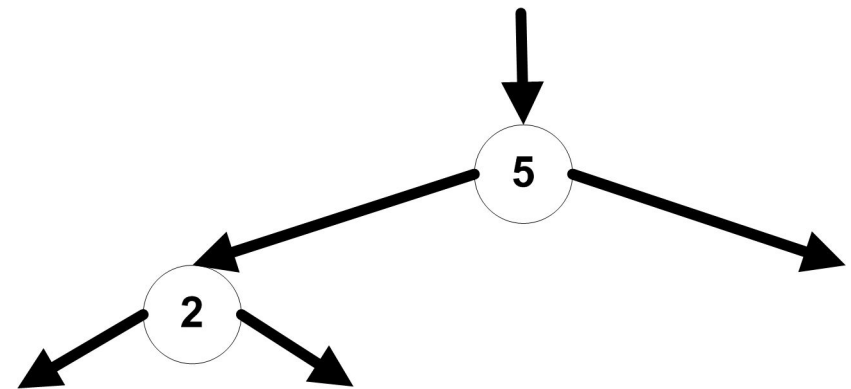
- Seja a árvore abaixo, faça a inserção de um elemento tal que o fator de balanceamento do nó cinco seja menos um





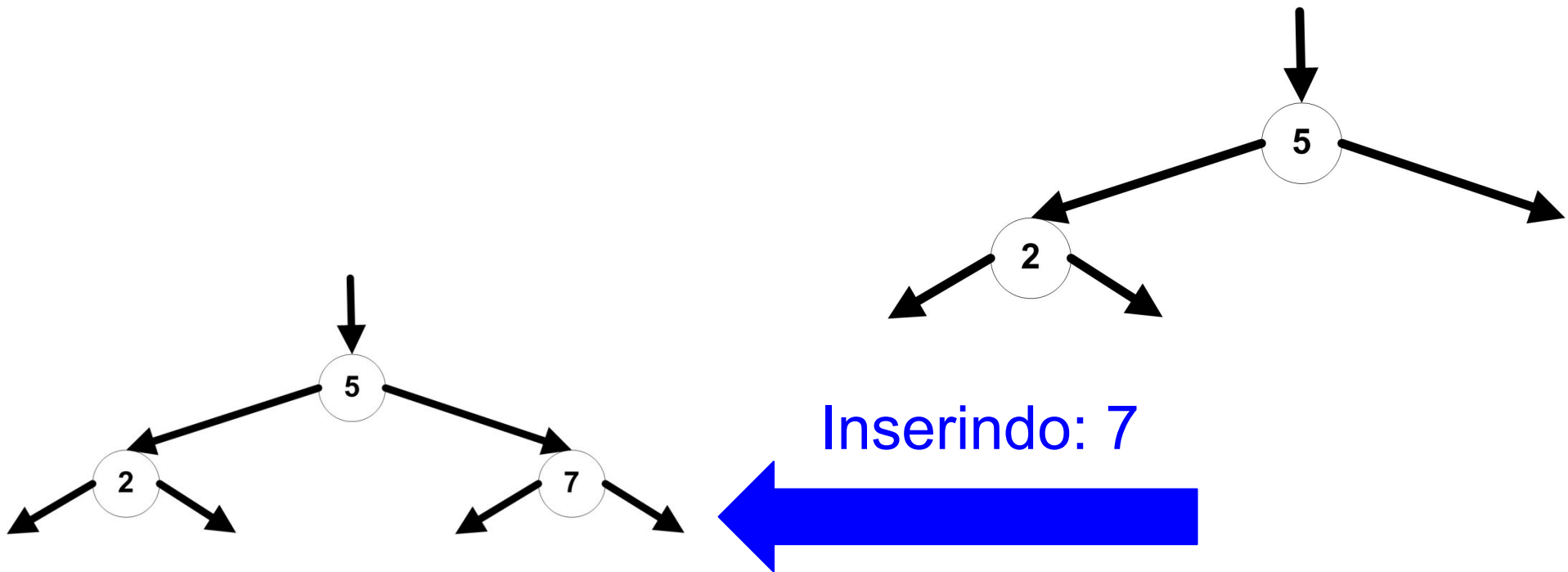
## Exercício

- Agora, faça a inserção de outro elemento para que o fator de balanceamento do nó cinco volte a ser zero



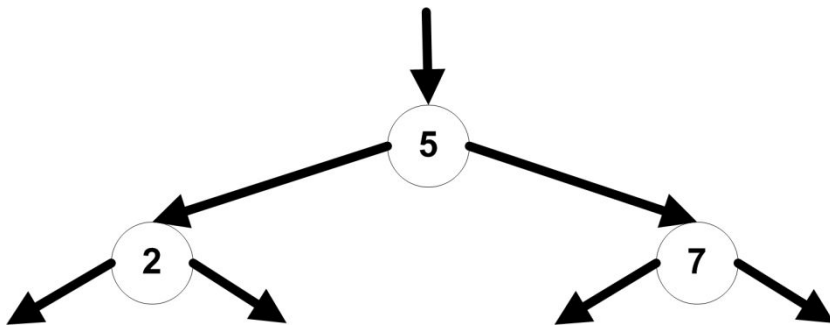
## Exercício

- Faça a inserção de outro elemento para que o fator de balanceamento do nó cinco volte a ser 0



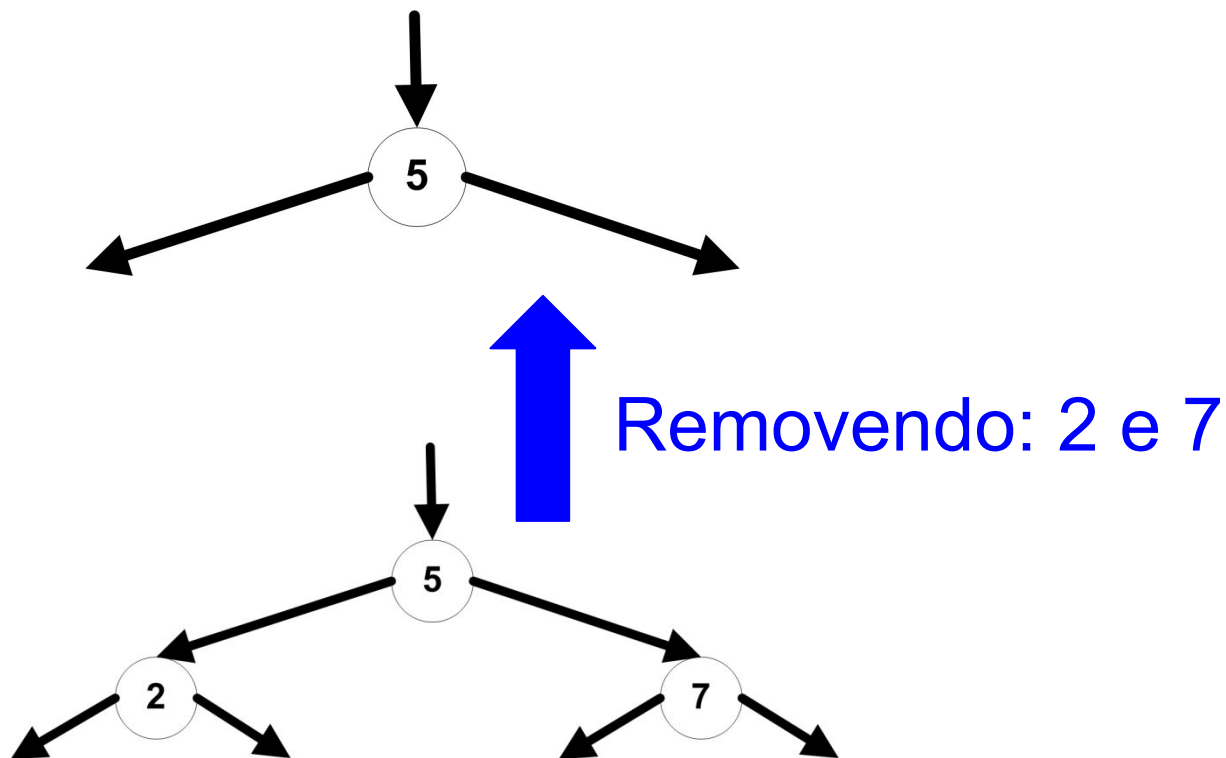
## Exercício

- O que acontece se removermos o dois e, depois, o sete?



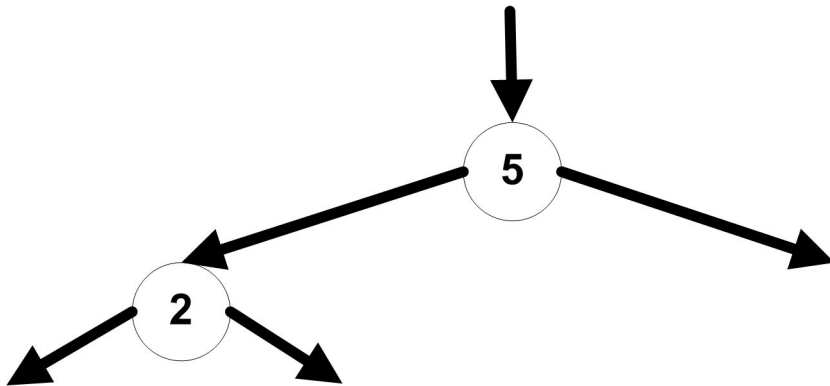
## Exercício

- O que acontece se removermos o dois e, depois, o sete?



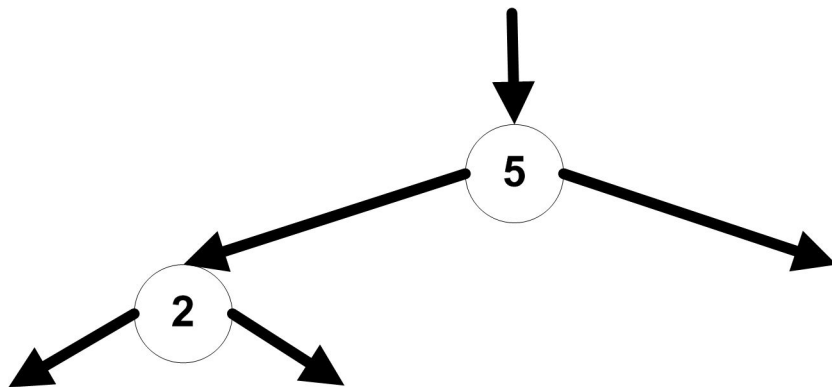
## Exercício

- Seja a árvore abaixo, faça a inserção de um elemento tal que o fator de balanceamento do nó cinco seja menos dois

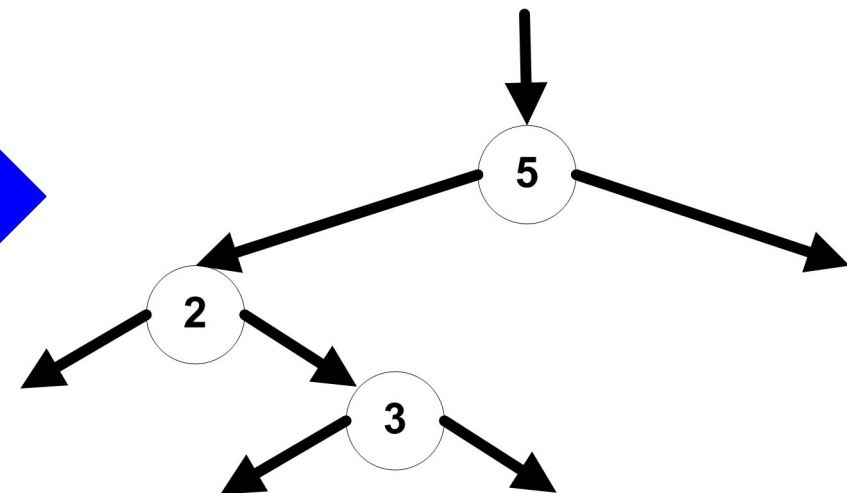


## Exercício

- Seja a árvore abaixo, faça a inserção de um elemento tal que o fator de balanceamento do nó cinco seja menos dois

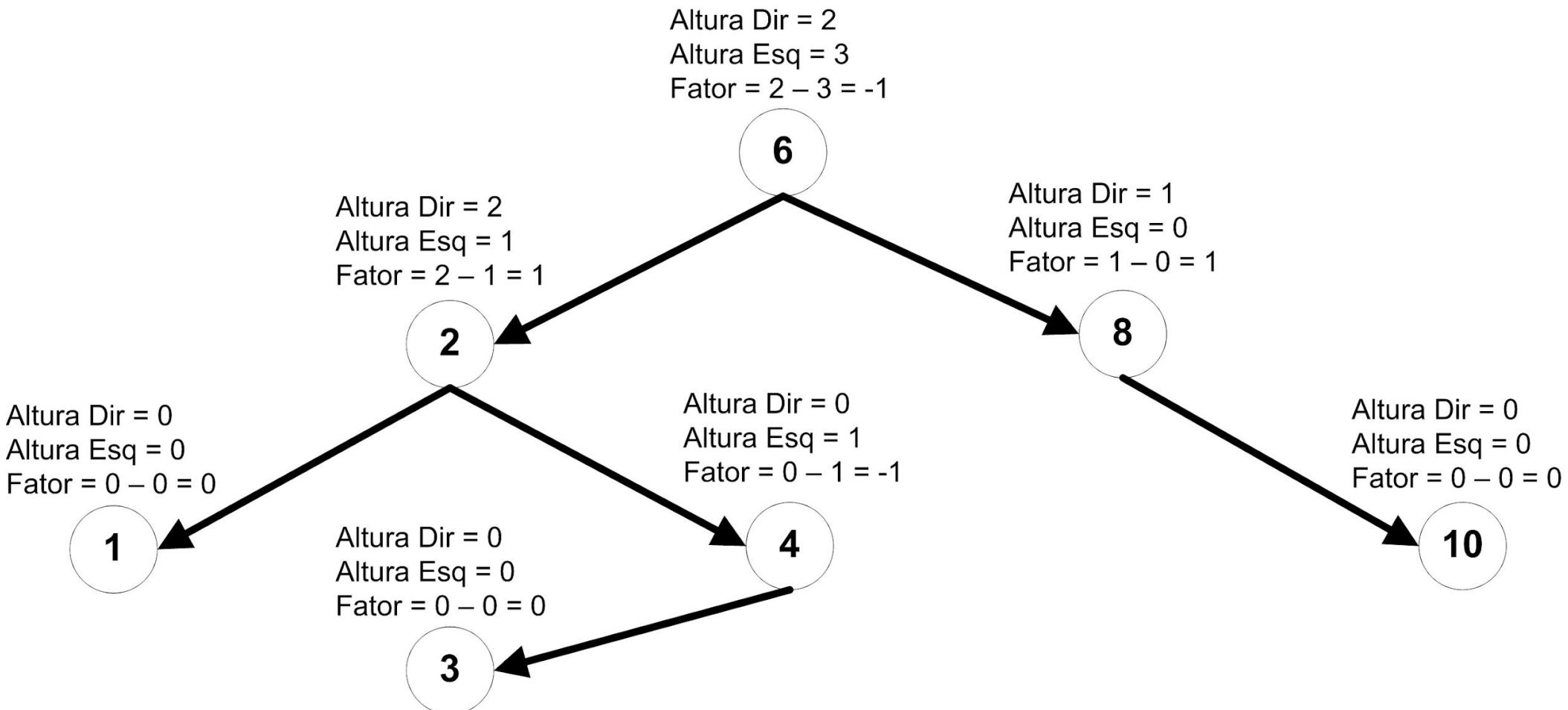


Inserindo: 3



# Exemplo de uma Árvore AVL

- O fator de cada nó será -1, 0 ou 1 como no exemplo abaixo:



## Ideia Básica



- Cada nó conhece seu fator de balanceamento
- Quando o fator de um nó se torna  $\pm 2$ , o algoritmo da AVL rotaciona esse nó, sabendo que existem quatro tipos de rotação ( $R_E$ ,  $R_D$ ,  $R_{DE}$  e  $R_{ED}$ )



## Ideia Básica

Fator do nó	Tipo de rotação
2	Rotação para a esquerda
-2	Rotação para a direita

## Ideia Básica

Fator do nó	Tipo de rotação
2	Rotação para a esquerda  ( $R_E$ e $R_{DE}$ )
-2	Rotação para a direita  ( $R_D$ e $R_{ED}$ )

## Ideia Básica

Fator  
do nó

O tipo de rotação depende do fator do  
filho pertencente a maior subárvore

Ou seja, o pai...

2

Rotação para a esquerda

$(R_E \text{ e } R_{DE})$

-2

Rotação para a direita

$(R_D \text{ e } R_{ED})$

## Ideia Básica

Fator do nó	Fator do filho à direita	Fator do filho à esquerda	Tipo de rotação
2	1 0		Simples à esquerda
	-1		Dupla dir-esq
-2		-1 0	Simples à direita
		1	Dupla esq-dir

# Ideia Básica

Fator do nó	Fator do filho à direita	Fator do filho à esquerda	Tipo de rotação
2	1	-	<b>Simples à esquerda</b>
	0		
	-1		Dupla dir-esq
-2		-1 0	Simples à direita
		1	Dupla esq-dir

## Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à direita com fator 1

Rotação simples à esquerda no nó com fator 2

Altura Dir = 1  
Altura Esq = 0  
Fator =  $1 - 0 = 1$

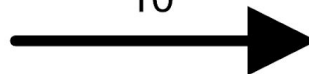
6

Altura Dir = 0  
Altura Esq = 0  
Fator =  $0 - 0 = 0$

8

Árvore  
Balanceada

Inserindo  
10



Altura Dir = 2  
Altura Esq = 0  
Fator =  $2 - 0 = 2$

6

Altura Dir = 1  
Altura Esq = 0  
Fator =  $1 - 0 = 1$

8

Altura Dir = 0  
Altura Esq = 0  
Fator =  $0 - 0 = 0$

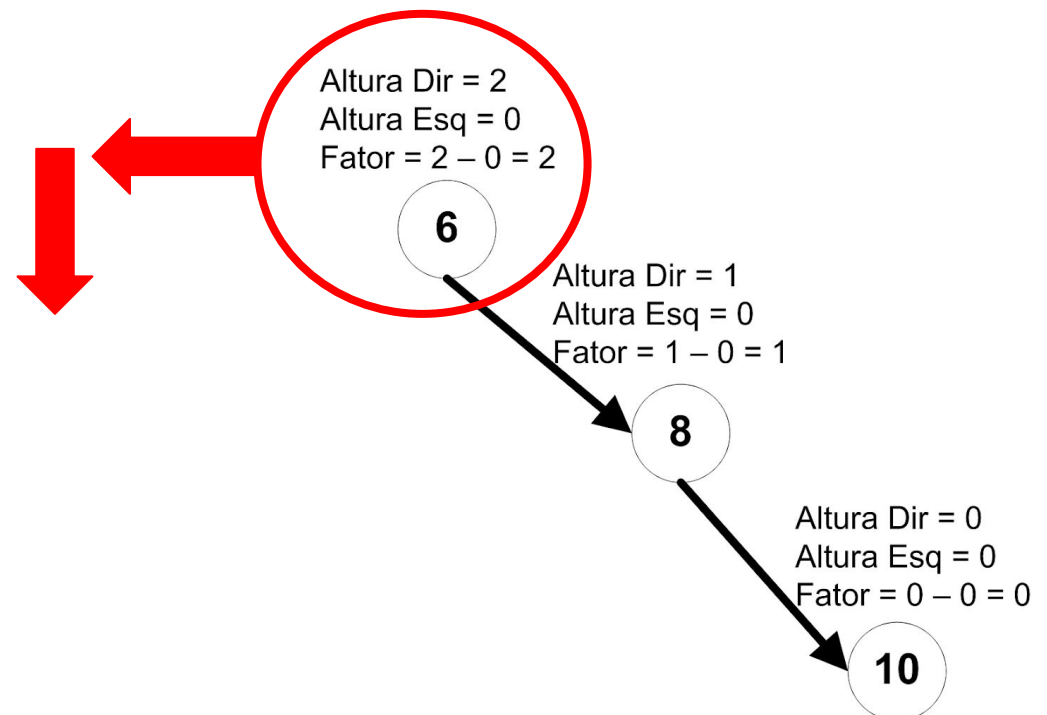
10

Árvore  
Desbalanceada

## Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à direita com fator 1

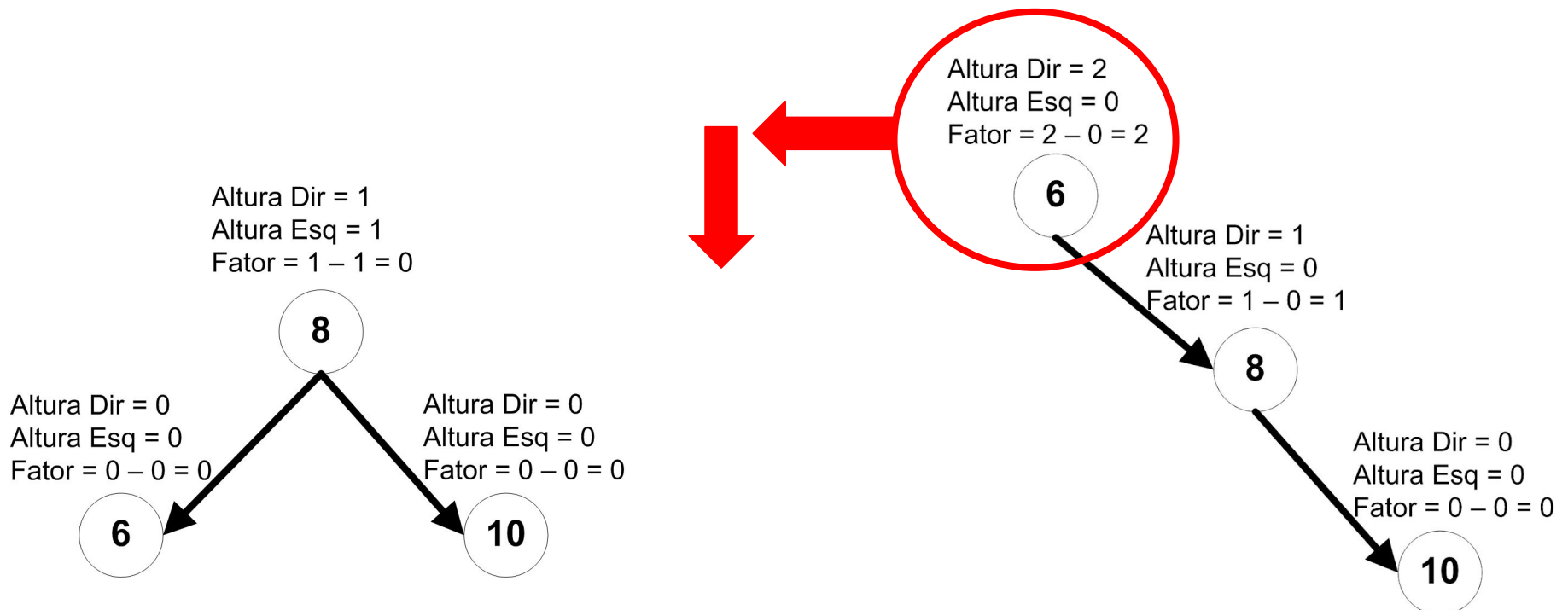
Rotação simples à esquerda no nó com fator 2



# Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à direita com fator 1

Rotação simples à esquerda no nó com fator 2



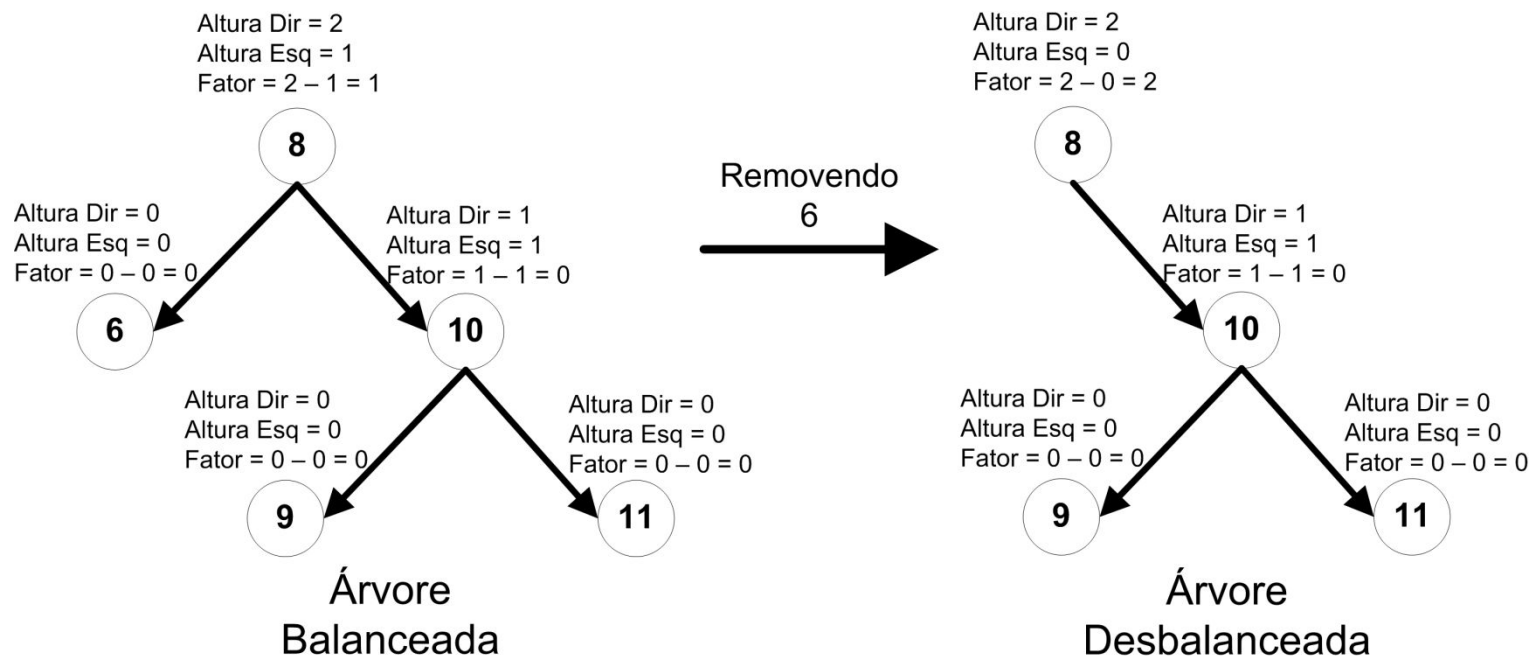


# Ideia Básica

Fator do nó	Fator do filho à direita	Fator do filho à esquerda	Tipo de rotação
2	1		<b>Simples à esquerda</b>
	0		
	-1		Dupla dir-esq
-2		-1 0	Simples à direita
		1	Dupla esq-dir

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à direita com fator 0

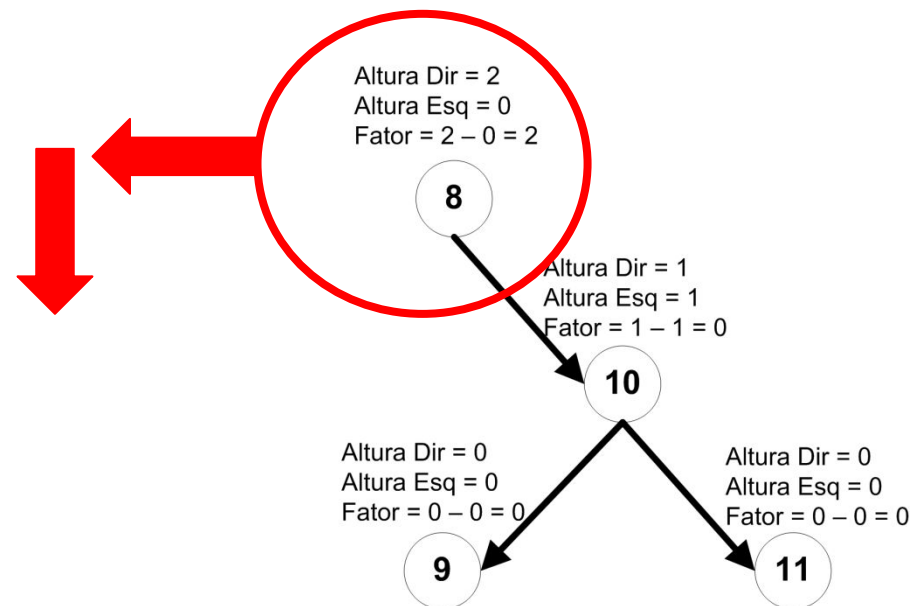
## Rotação simples à esquerda no nó com fator 2



## Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à direita com fator 0

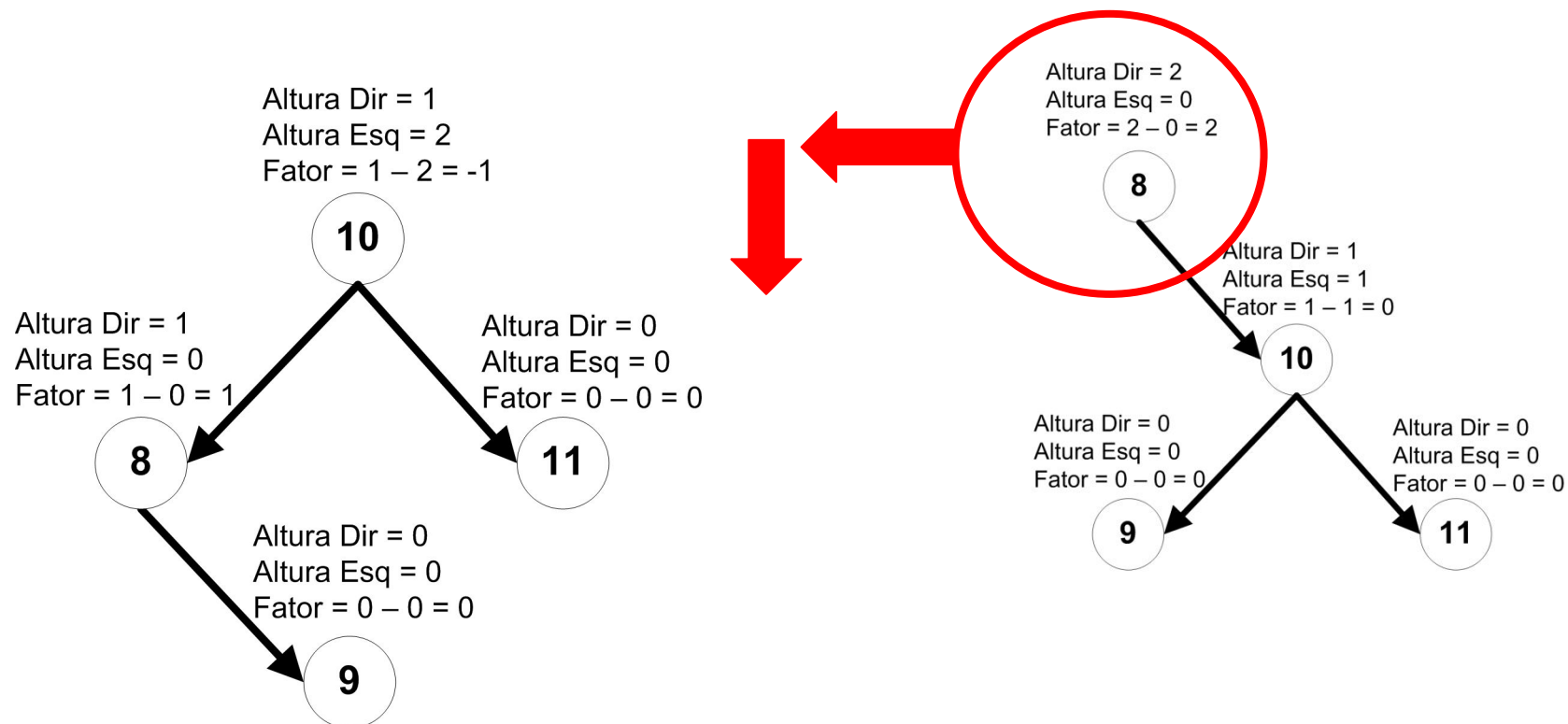
Rotação simples à esquerda no nó com fator 2



## Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à direita com fator 0

Rotação simples à esquerda no nó com fator 2



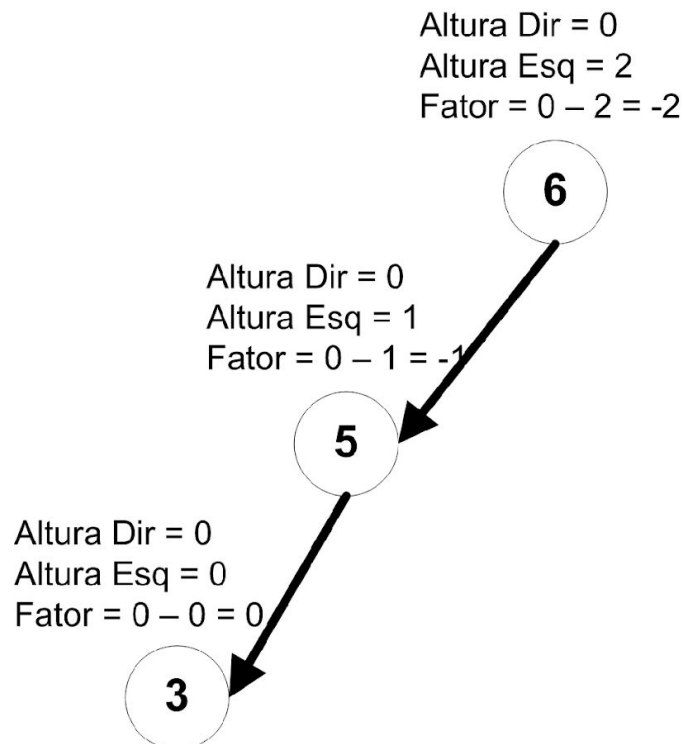
# Ideia Básica

Fator do nó	Fator do filho à direita	Fator do filho à esquerda	Tipo de rotação
2	1		Simples à esquerda
	0		Dupla dir-esq
<b>-2</b>		<b>-1</b>	<b>Simples à direita</b>
		0	
		1	Dupla esq-dir

## Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à esquerda com fator -1

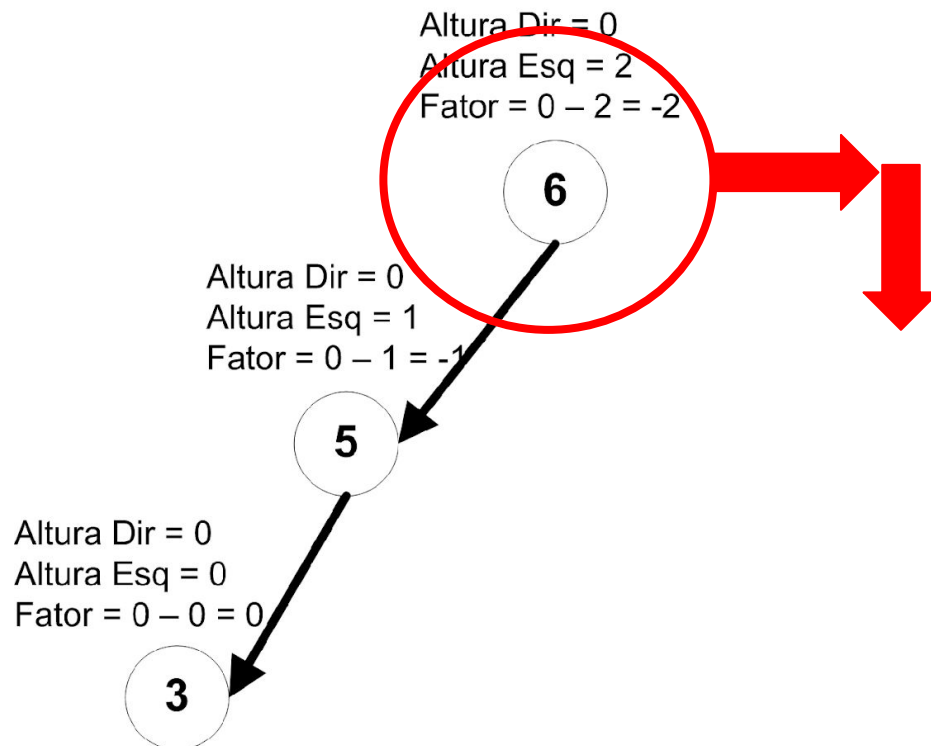
Rotação simples à direita no nó com fator -2



## Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à esquerda com fator -1

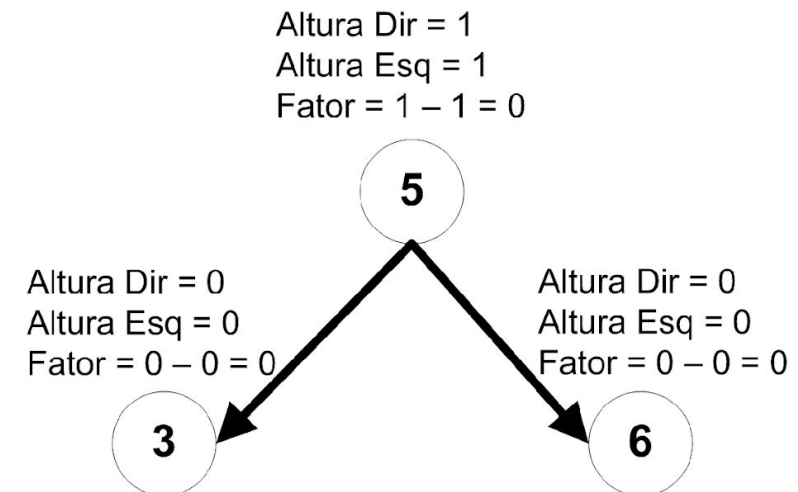
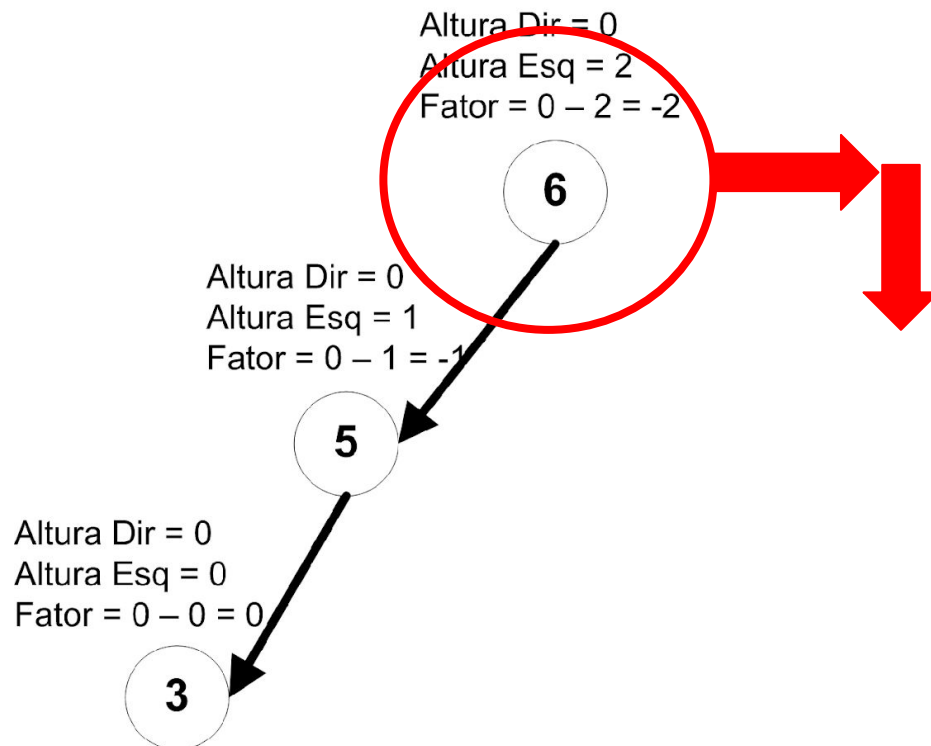
Rotação simples à direita no nó com fator -2



## Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à esquerda com fator -1

Rotação simples à direita no nó com fator -2





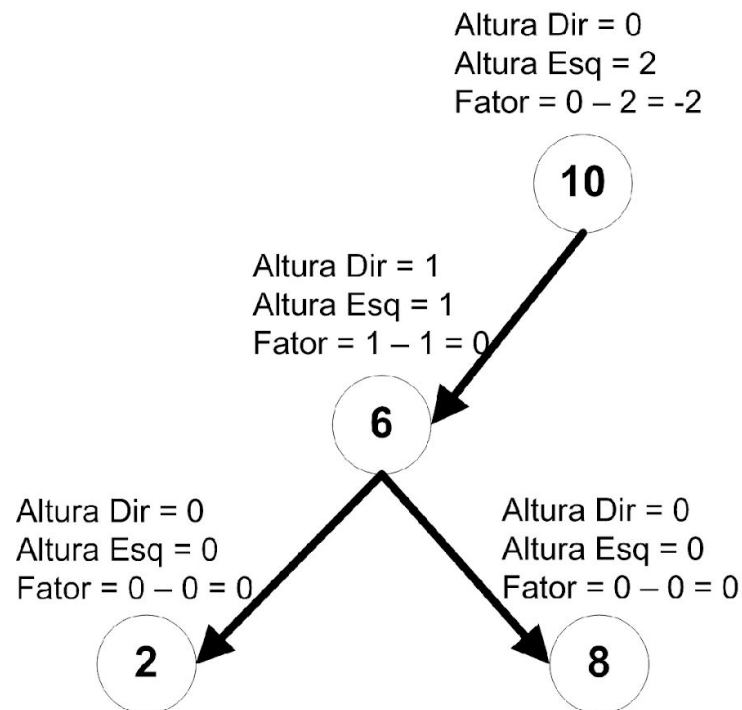
# Ideia Básica

Fator do nó	Fator do filho à direita	Fator do filho à esquerda	Tipo de rotação
2	1		Simples à esquerda
	0		Dupla dir-esq
<b>-2</b>		-1	<b>Simples à direita</b>
		<b>0</b>	
		1	Dupla esq-dir

## Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à esquerda com fator -1

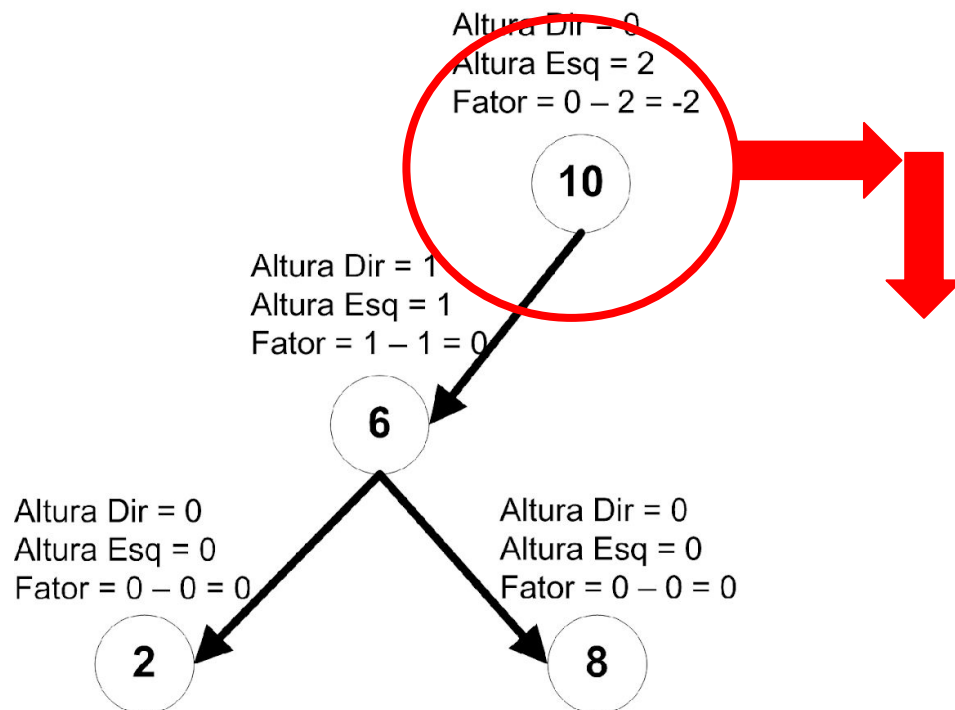
Rotação simples à direita no nó com fator -2



## Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à esquerda com fator -1

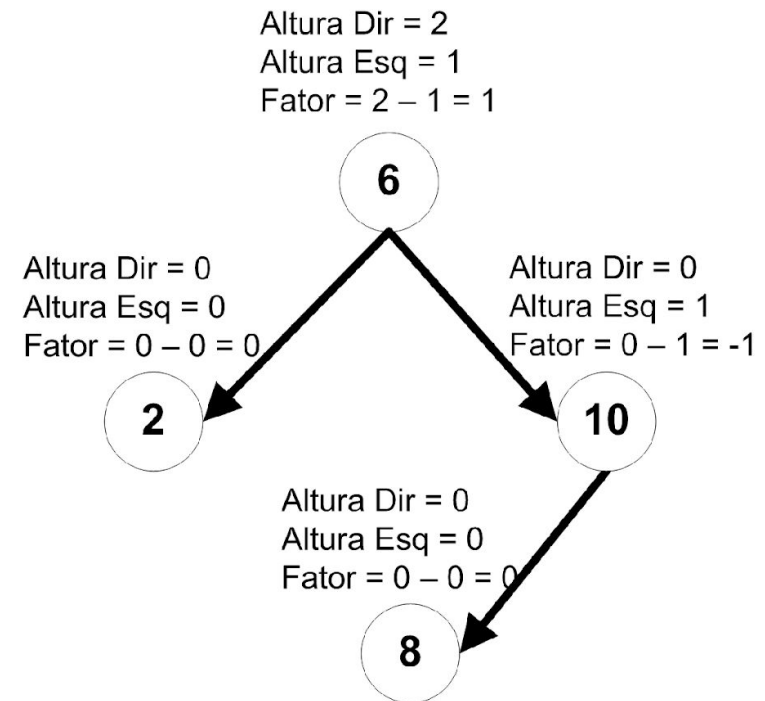
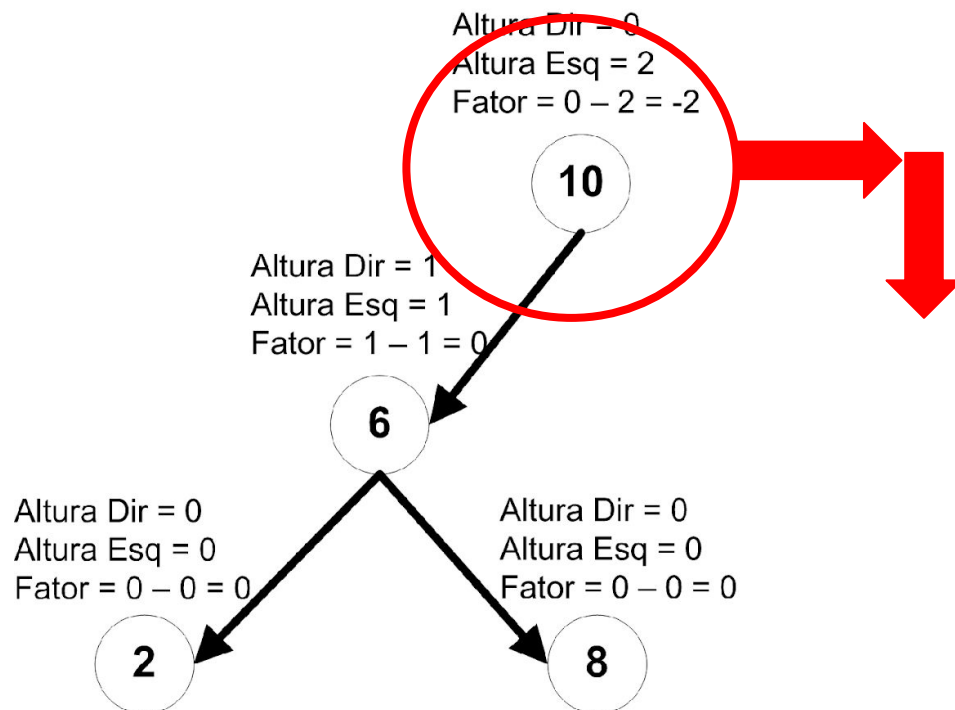
Rotação simples à direita no nó com fator -2



## Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à esquerda com fator -1

Rotação simples à direita no nó com fator -2



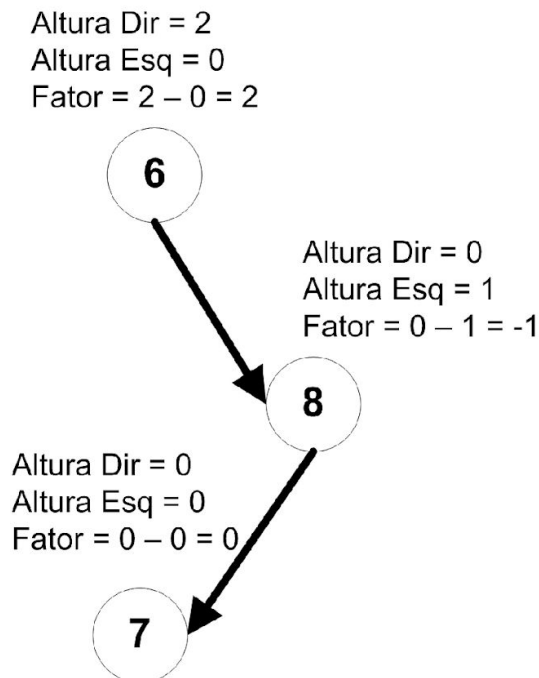
# Ideia Básica

Fator do nó	Fator do filho à direita	Fator do filho à esquerda	Tipo de rotação
2	1 0		Simples à esquerda
	-1		Dupla dir-esq
-2		-1 0	Simples à direita
		1	Dupla esq-dir

## Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à esquerda com fator -1

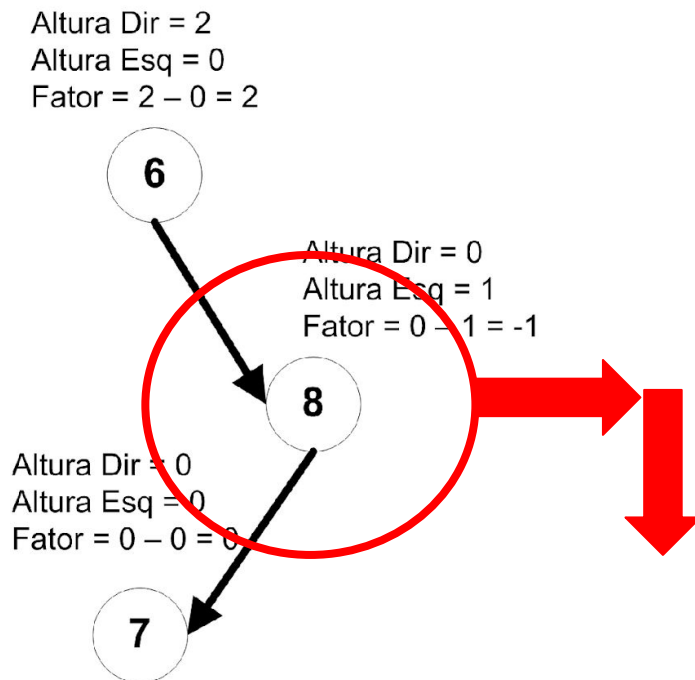
Rotação à direita no nó com fator -1 e à esquerda no com 2



## Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à esquerda com fator -1

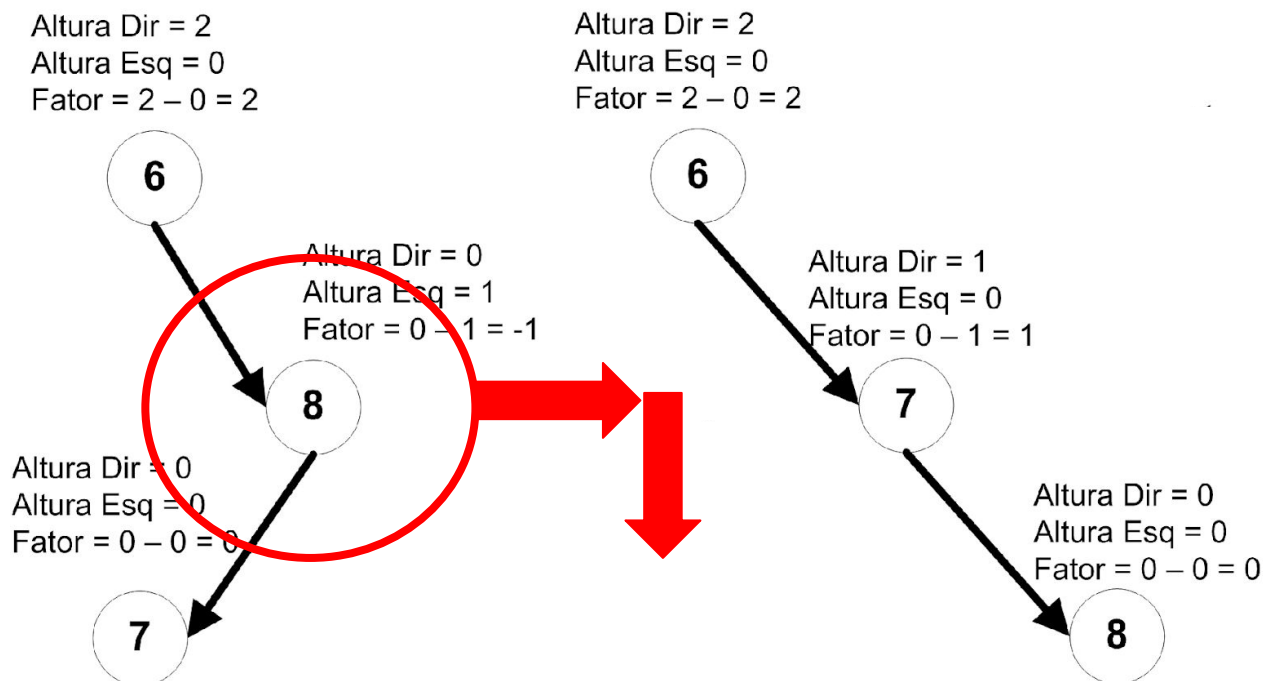
Rotação à direita no nó com fator -1 e à esquerda no com 2



## Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à esquerda com fator -1

Rotação à direita no nó com fator -1 e à esquerda no com 2

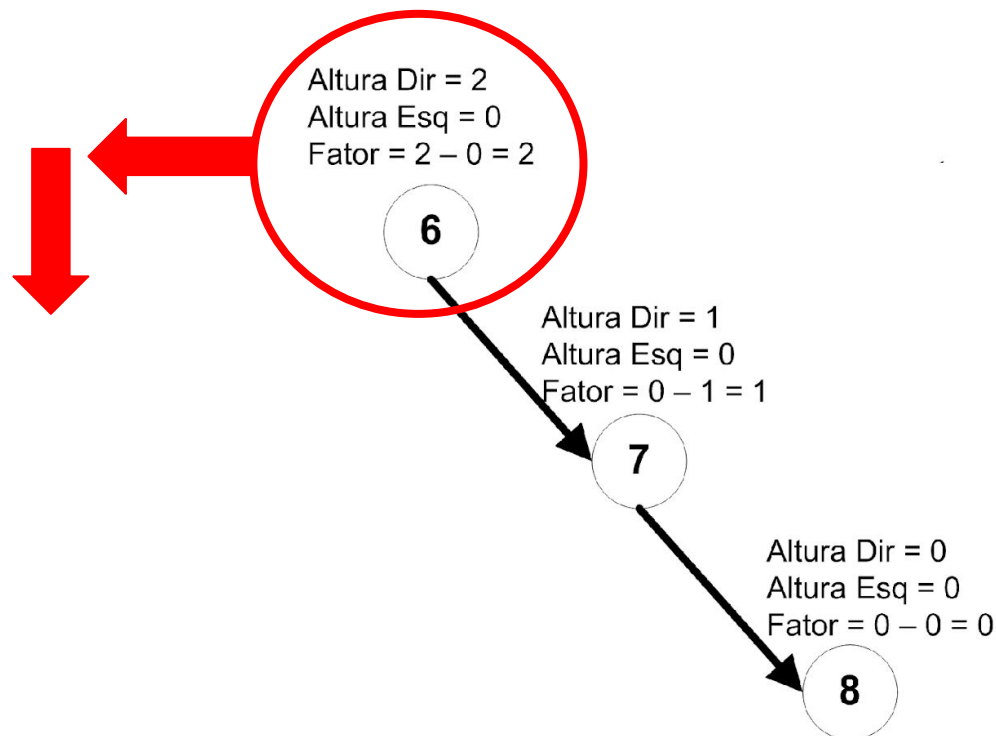




## Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à esquerda com fator -1

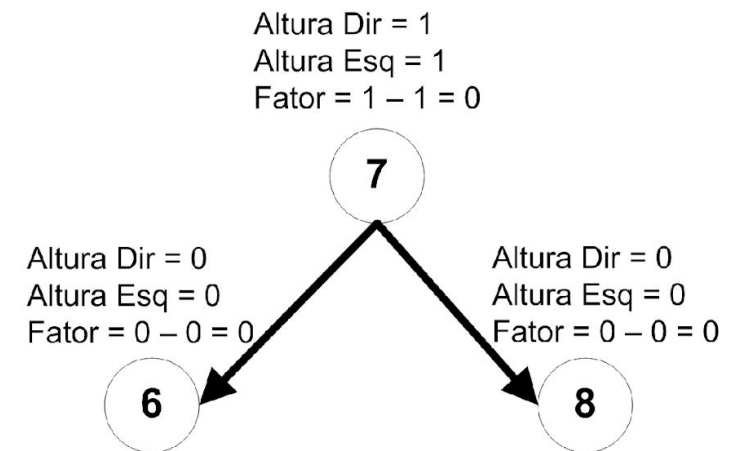
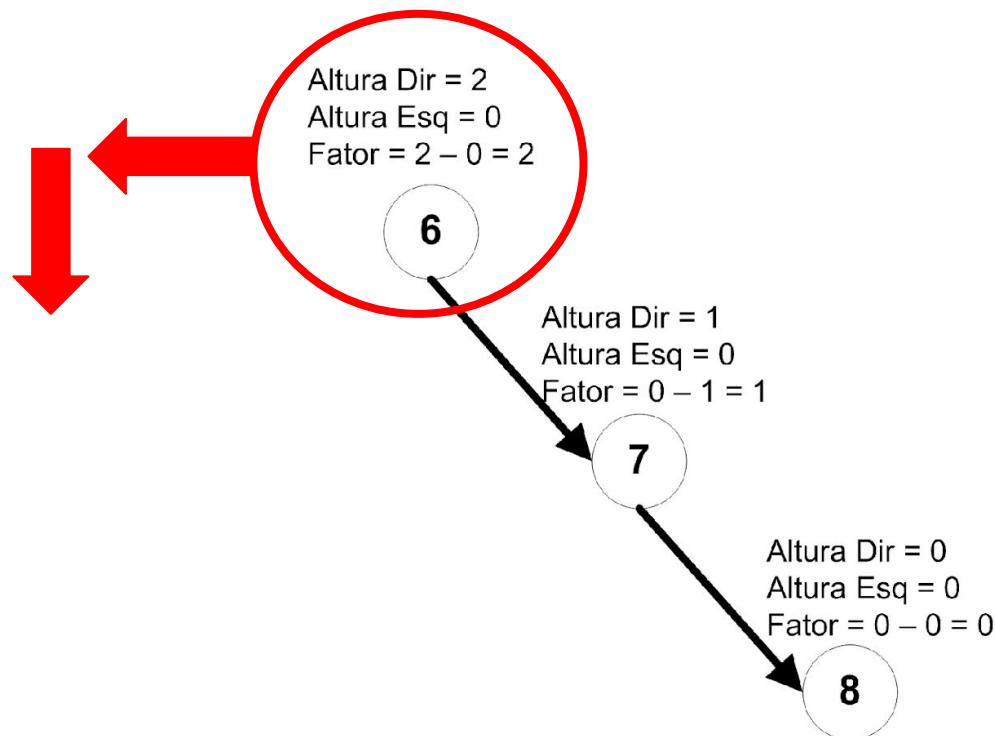
Rotação à direita no nó com fator -1 e à esquerda no com 2



## Ideia Básica

- Nó com fator 2 (maior subárvore à direita) e seu filho à esquerda com fator -1

Rotação à direita no nó com fator -1 e à esquerda no com 2



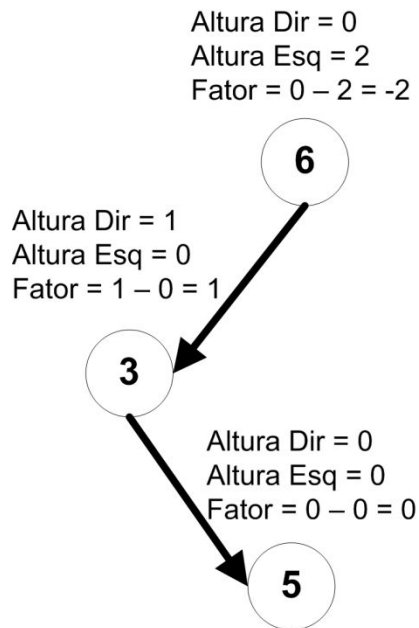
# Ideia Básica

Fator do nó	Fator do filho à direita	Fator do filho à esquerda	Tipo de rotação
2	1 0		Simples à esquerda
	-1		Dupla dir-esq
<b>-2</b>		-1 0	Simples à direita
		<b>1</b>	<b>Dupla esq-dir</b>

## Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à direita com fator 1

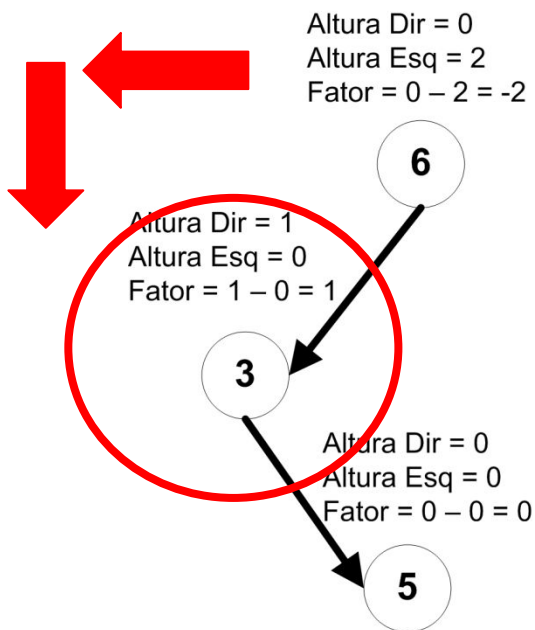
Rotação à esquerda no nó com fator 1 e à direita no com -2



## Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à direita com fator 1

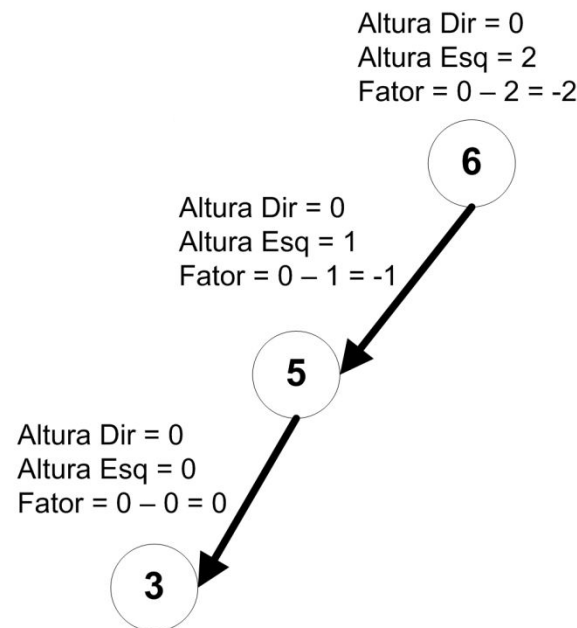
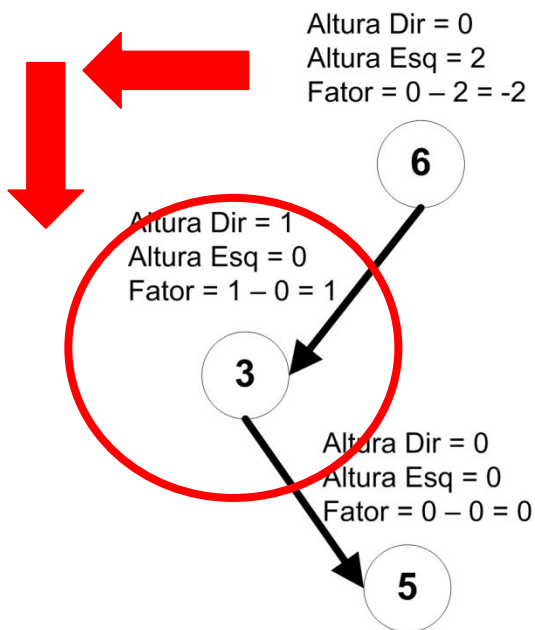
Rotação à esquerda no nó com fator 1 e à direita no com -2



## Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à direita com fator 1

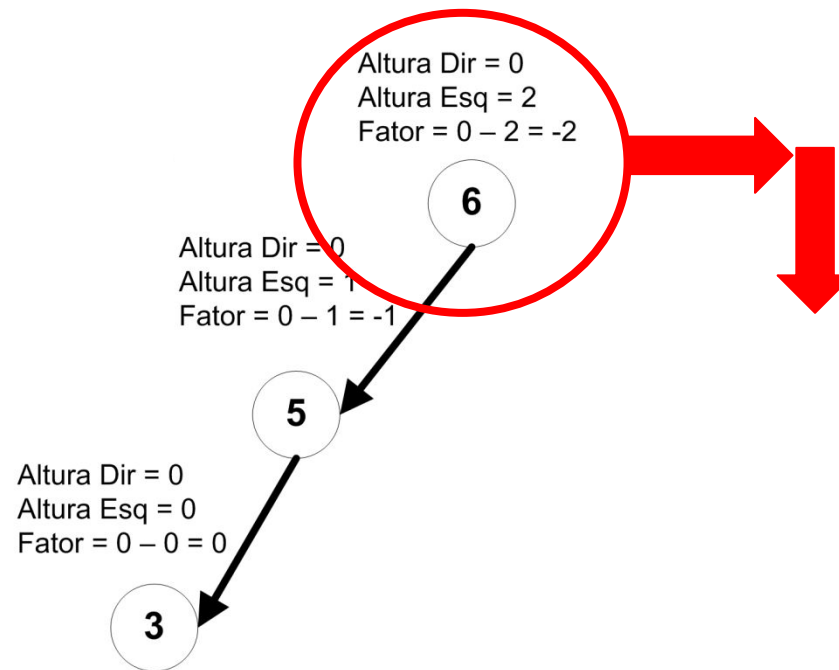
Rotação à esquerda no nó com fator 1 e à direita no com -2



## Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à direita com fator 1

Rotação à esquerda no nó com fator 1 e à direita no com -2

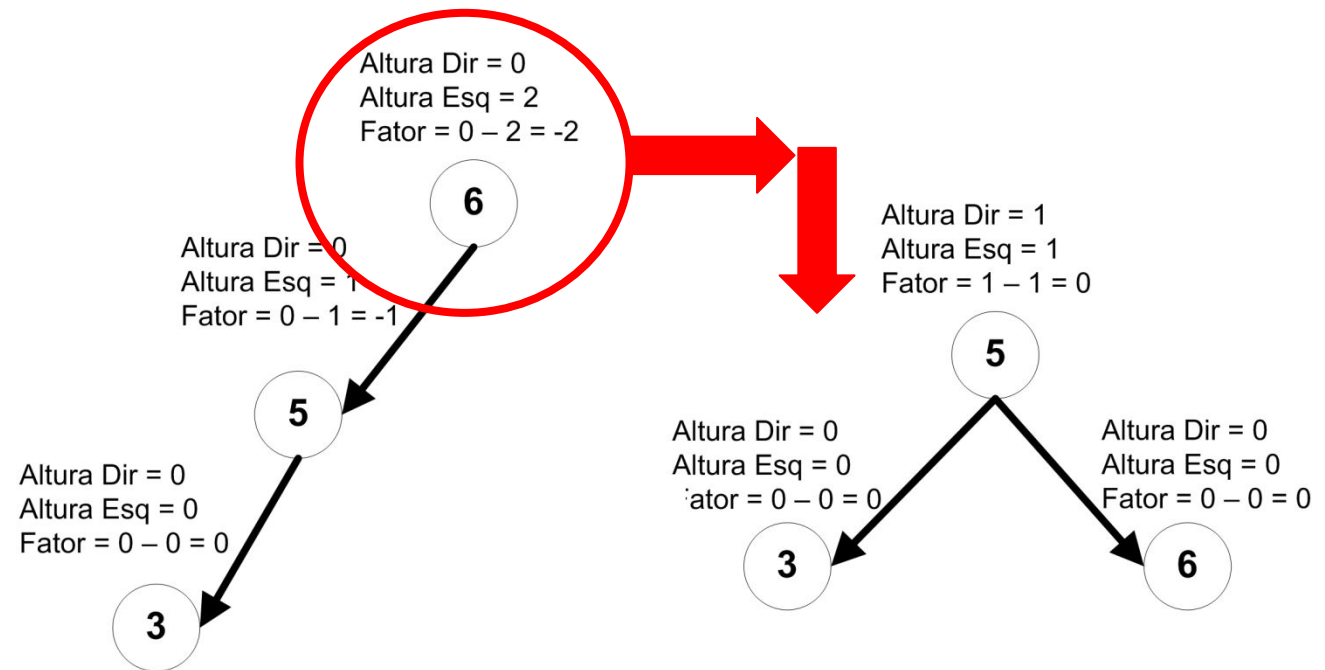


## Ideia Básica

- Nó com fator -2 (maior subárvore à esquerda) e seu filho à direita com fator

1

Rotação à esquerda no nó com fator 1 e à direita no com -2



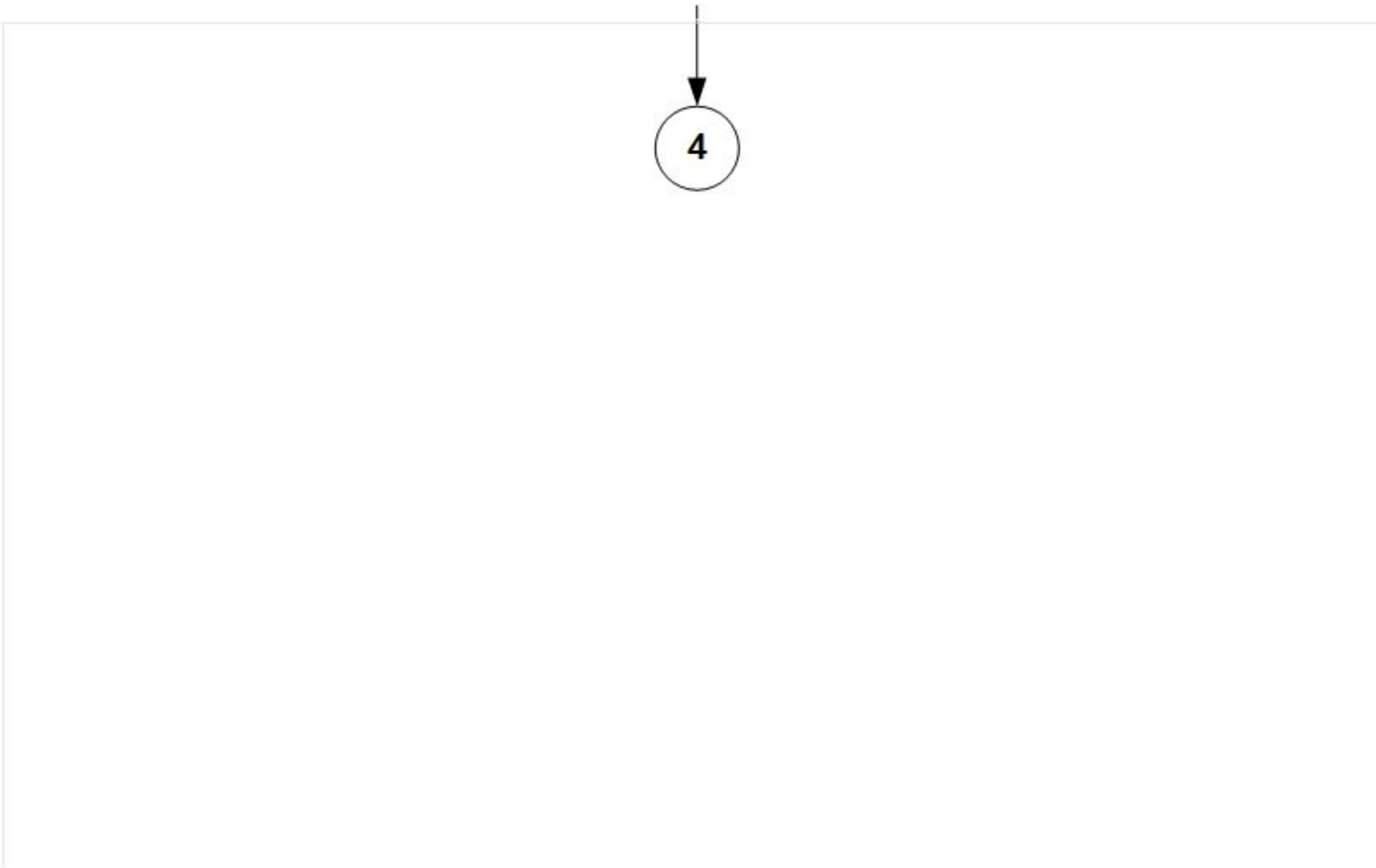


## Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente.

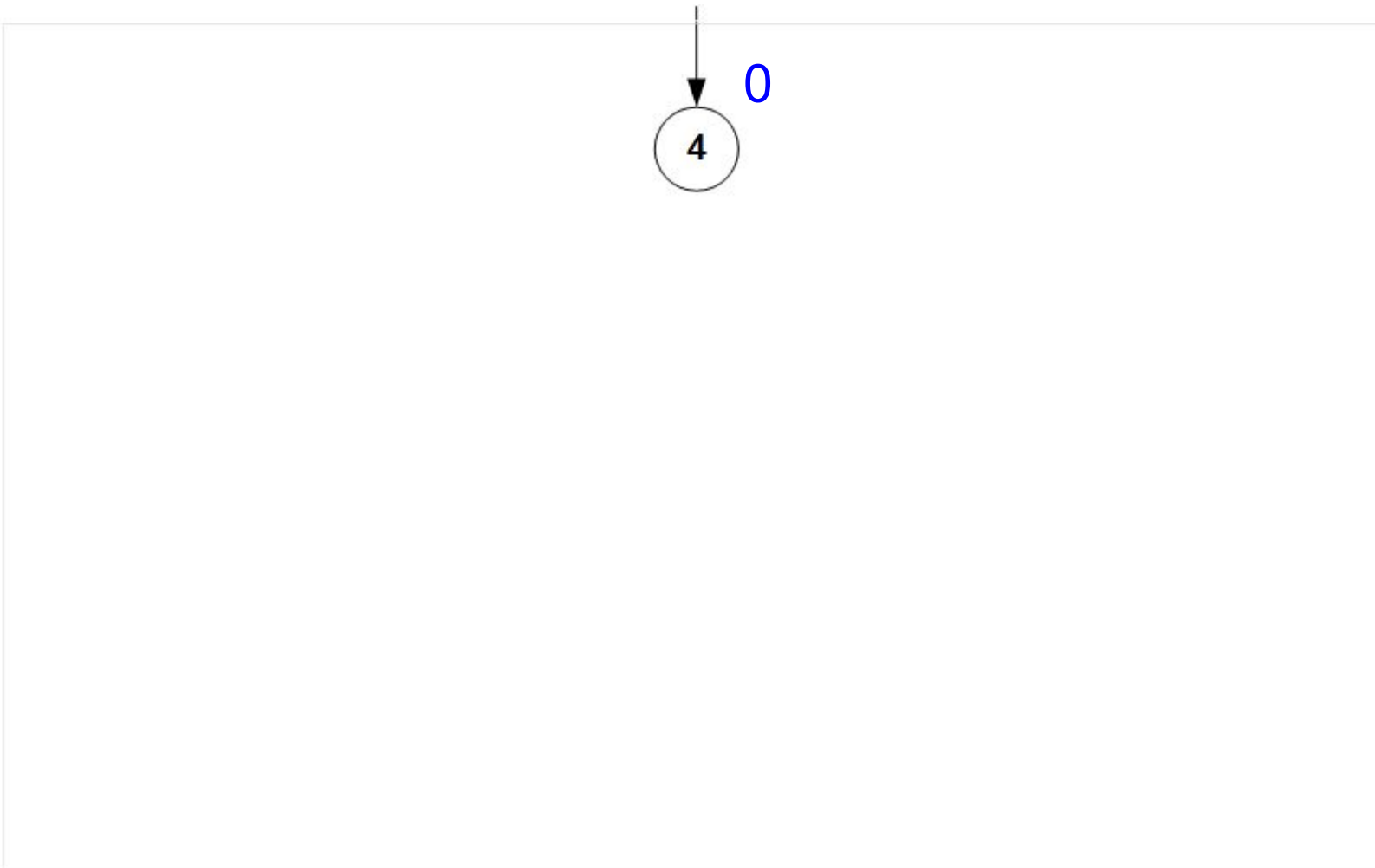
## Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente.



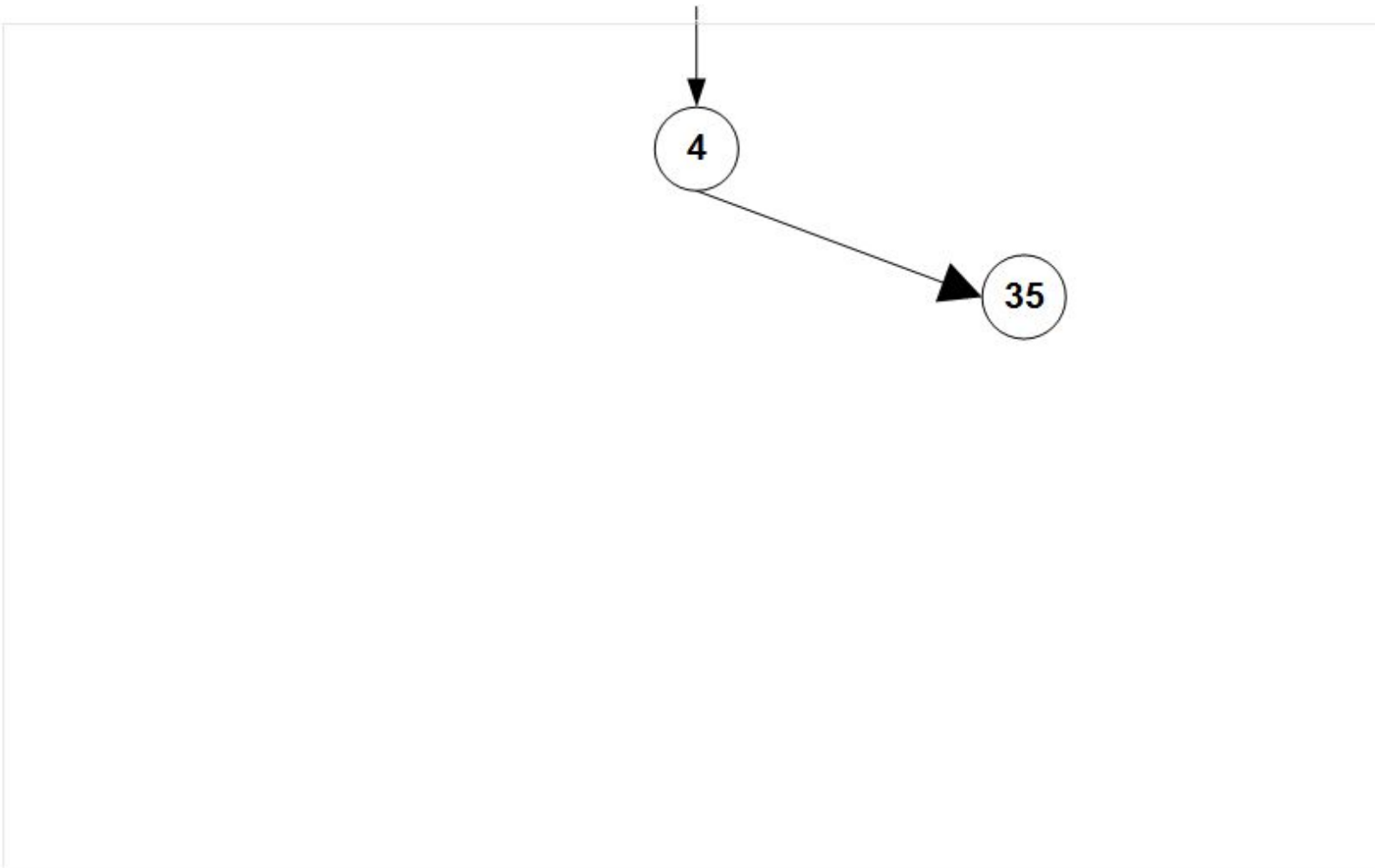
## Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



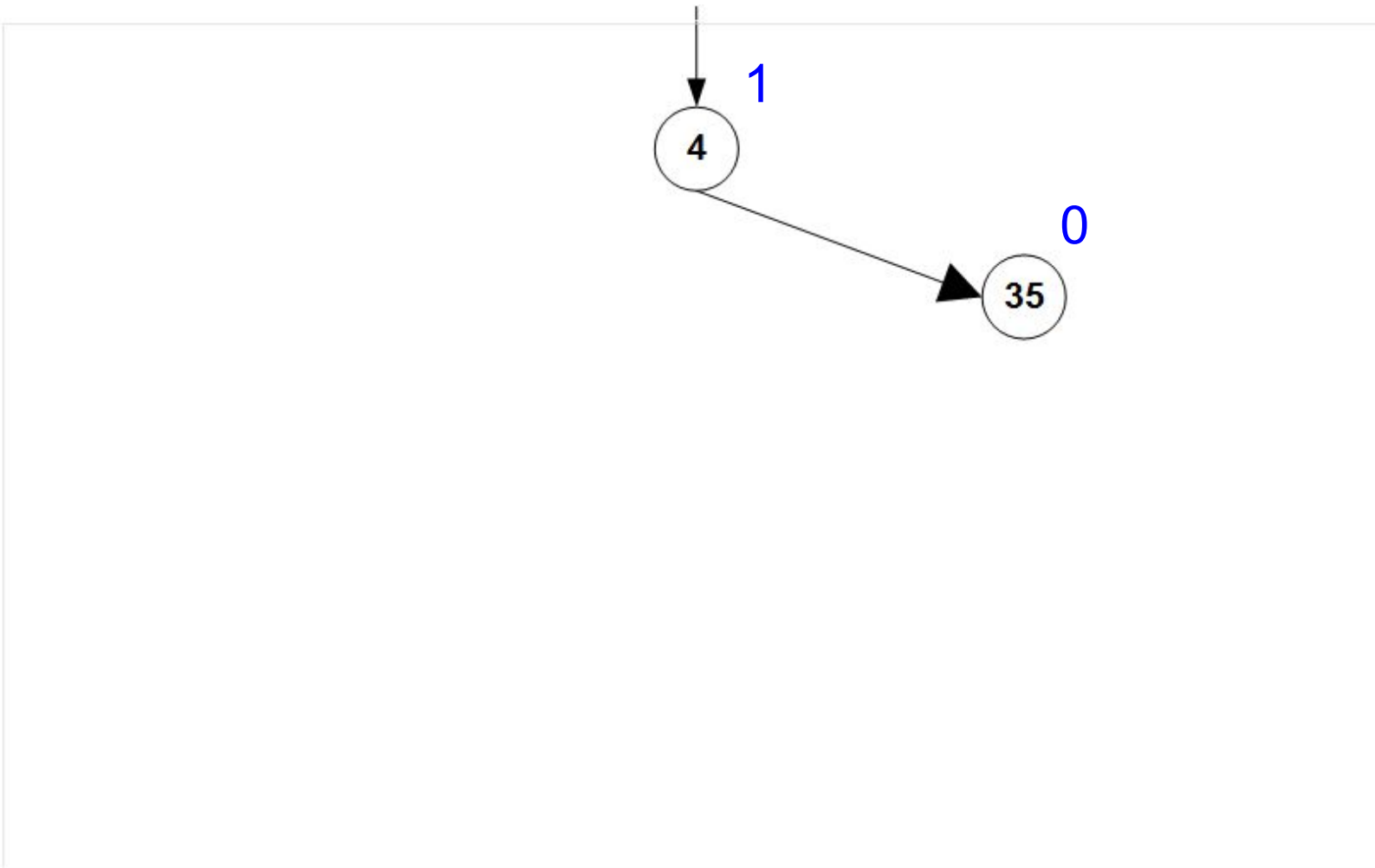
## Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



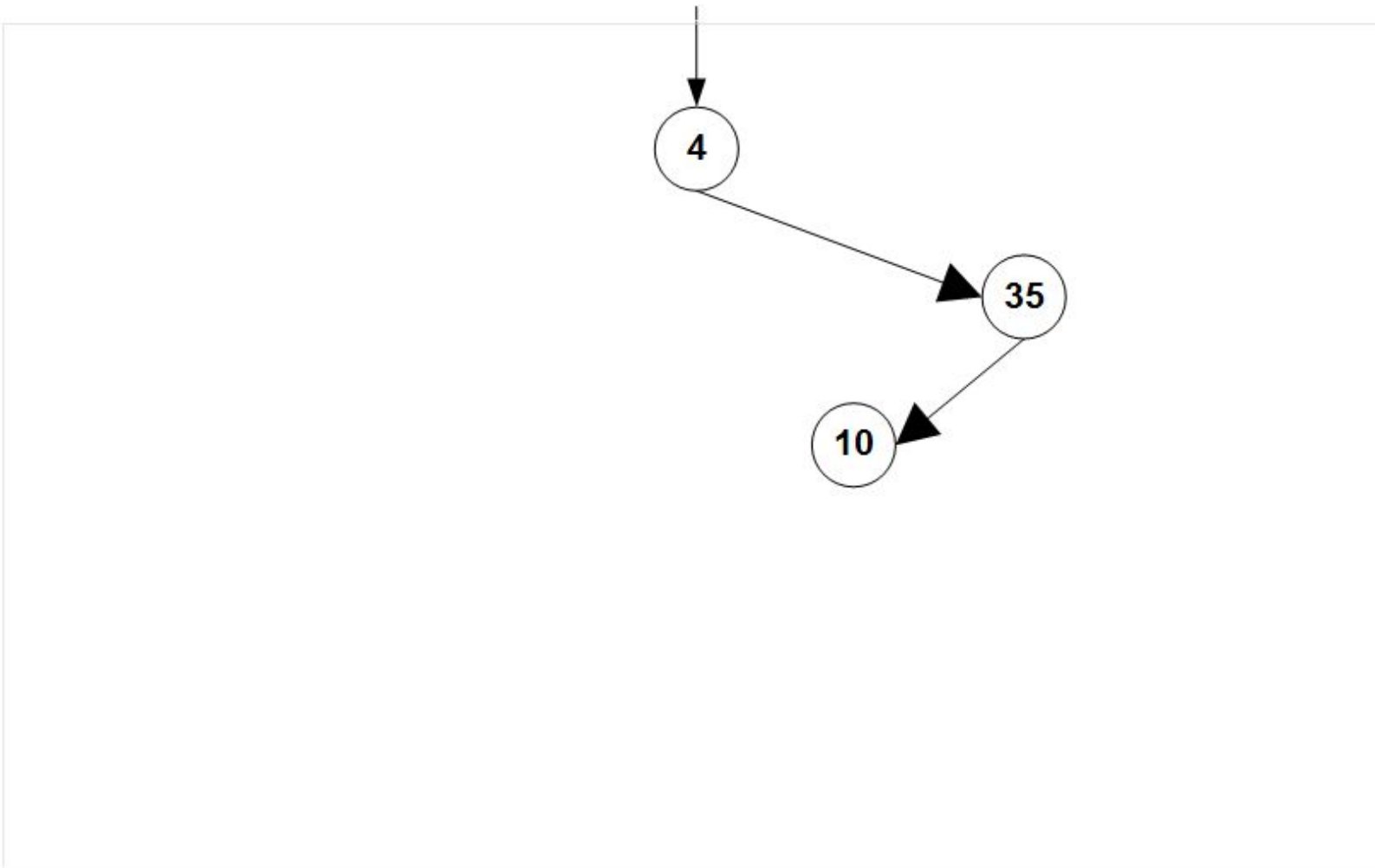
## Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



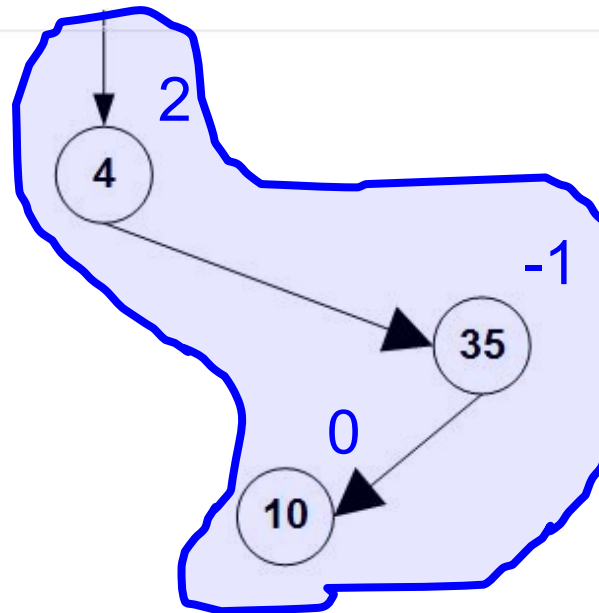
## Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



## Exemplo

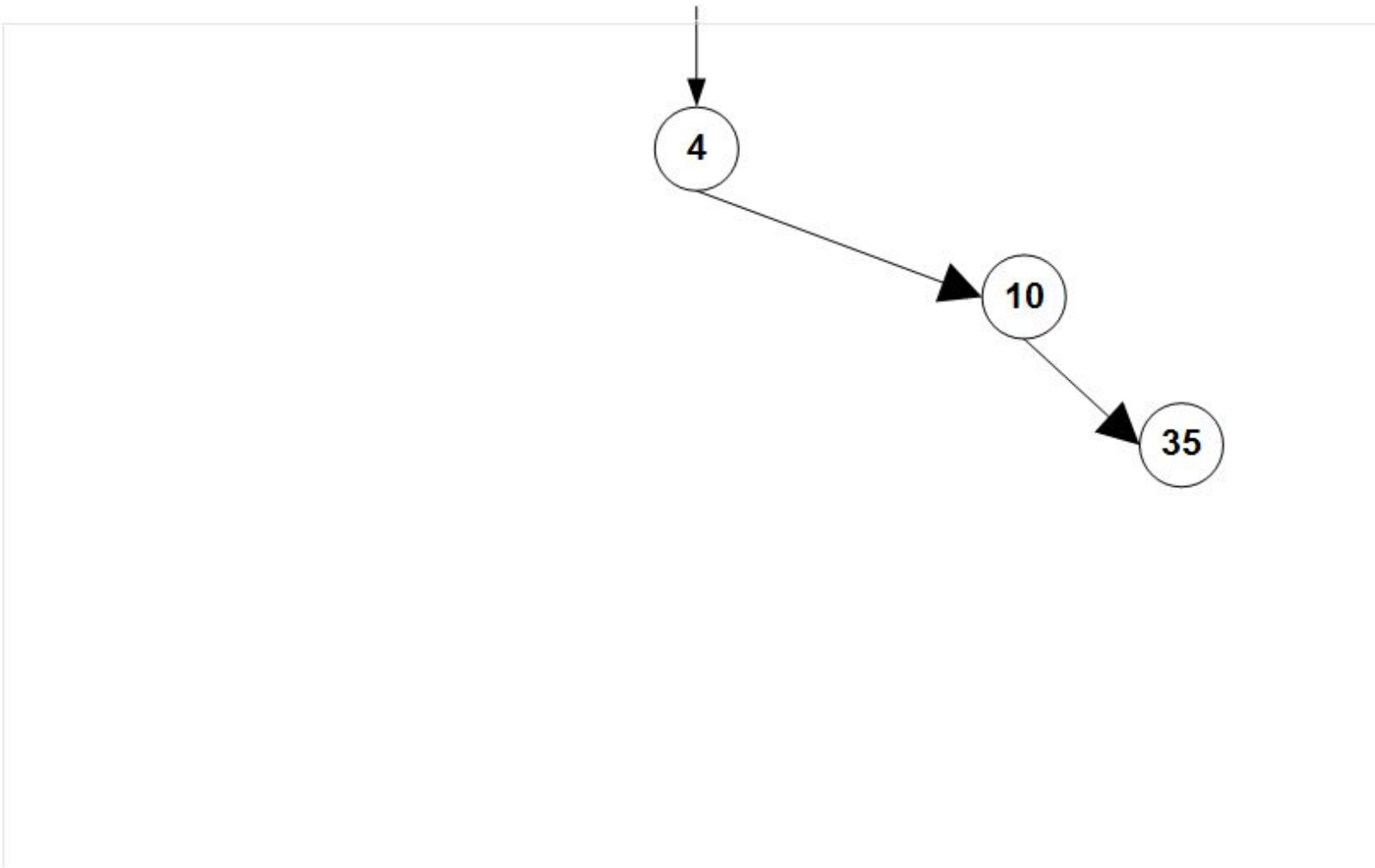
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente      rotação Dir (35) Esq (4)



Como o fator(4) = 2 e seu filho à direita -1, faremos uma rotação DirEsq

## Exemplo

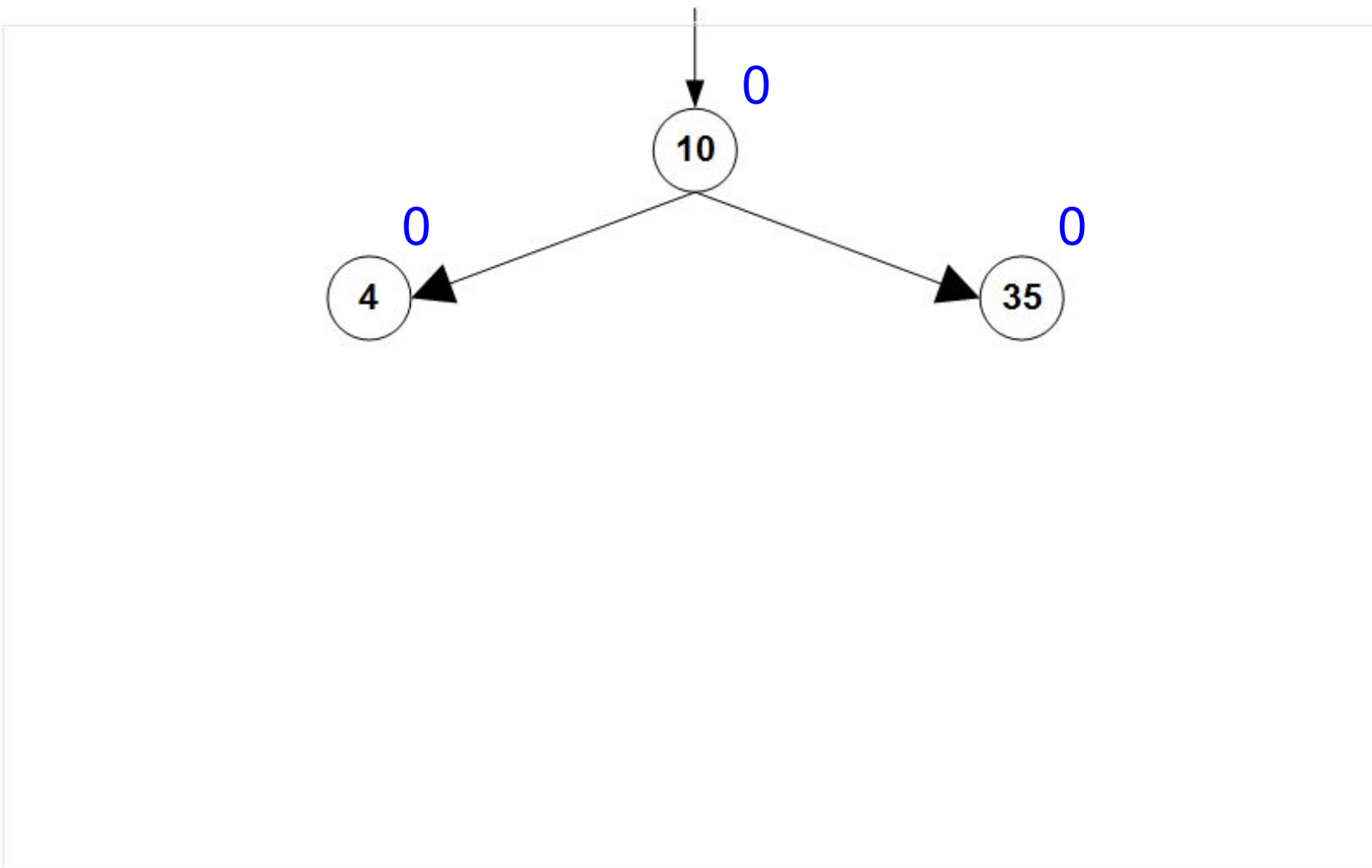
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente      **rotação Dir (35) Esq (4)**





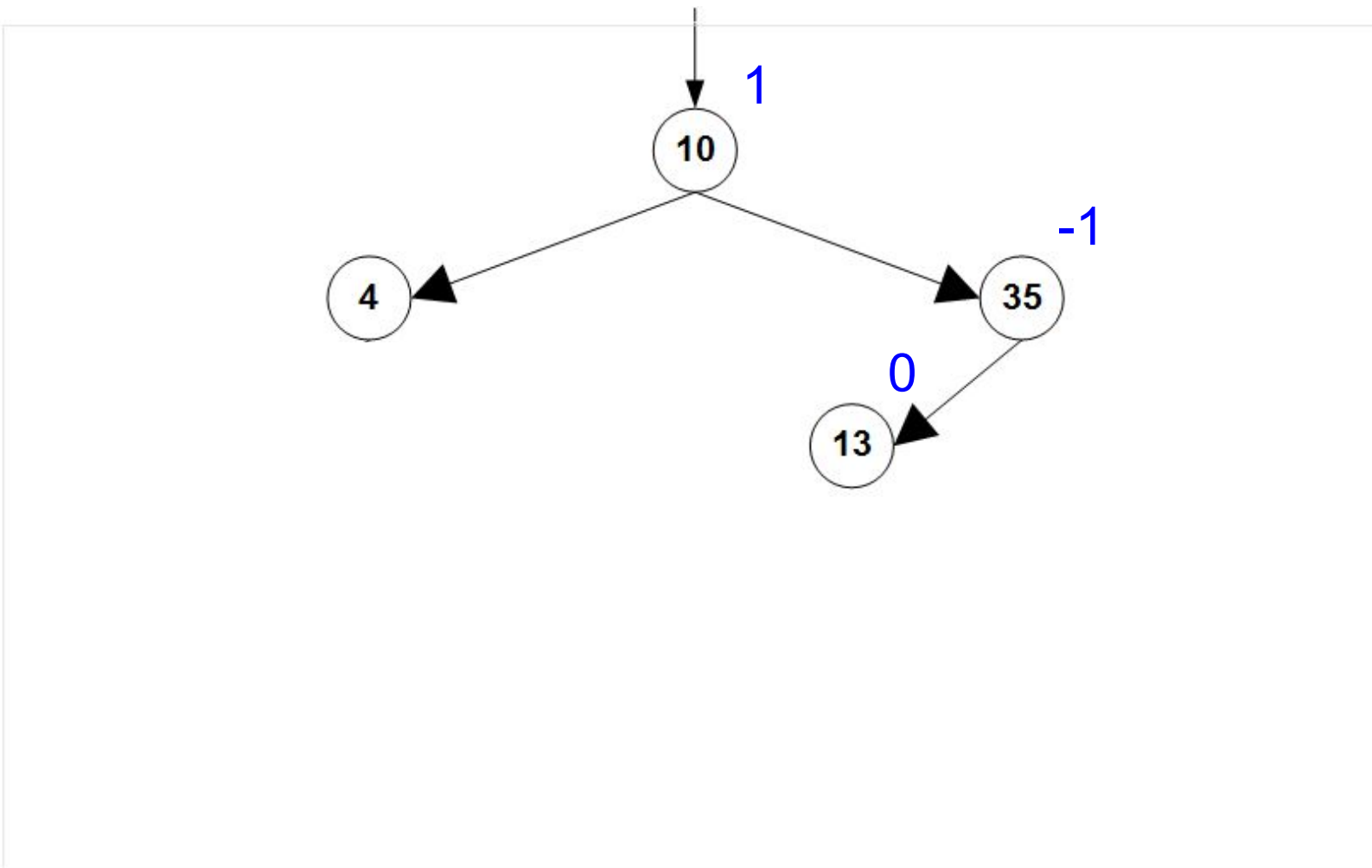
## Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente      rotação Dir (35) Esq (4)



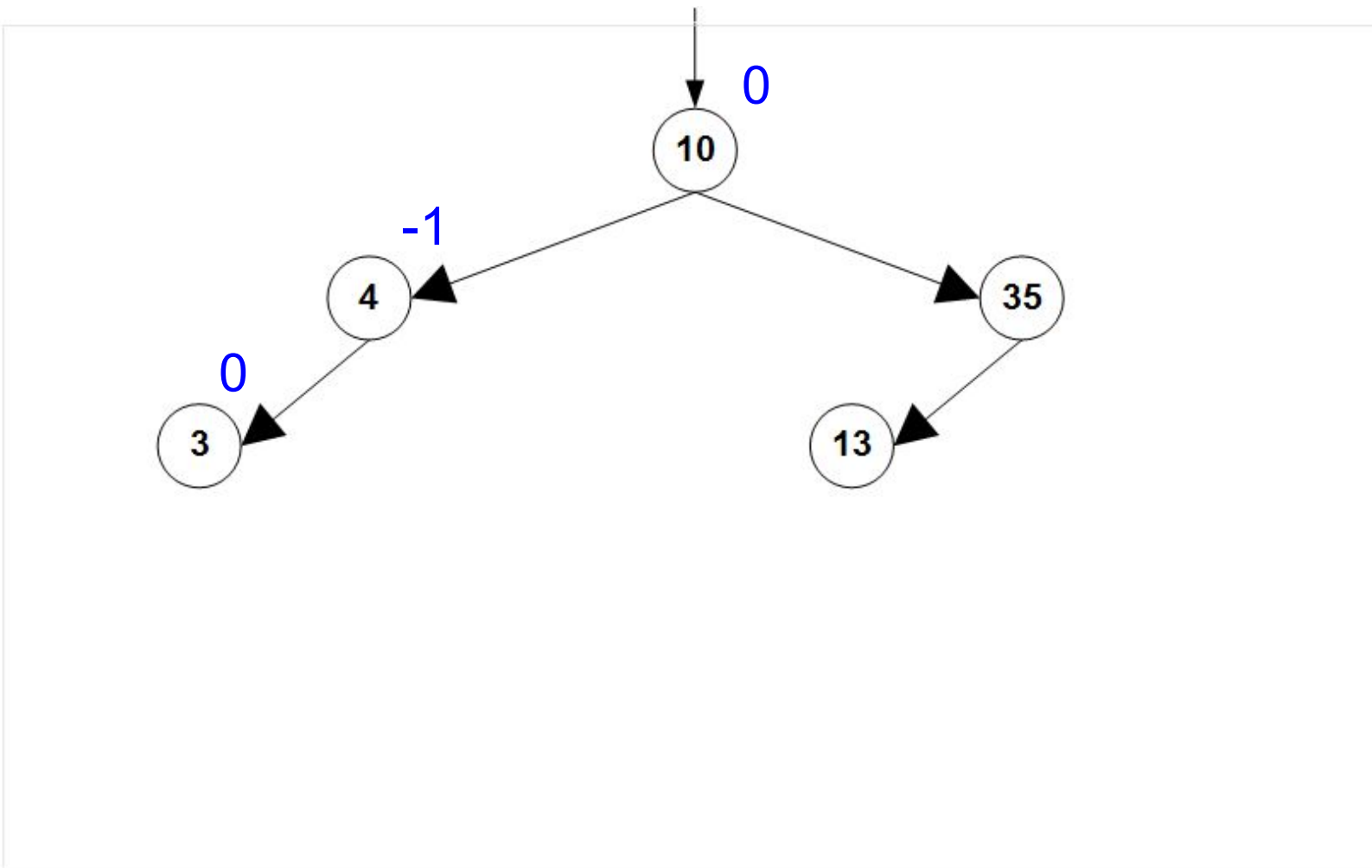
## Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



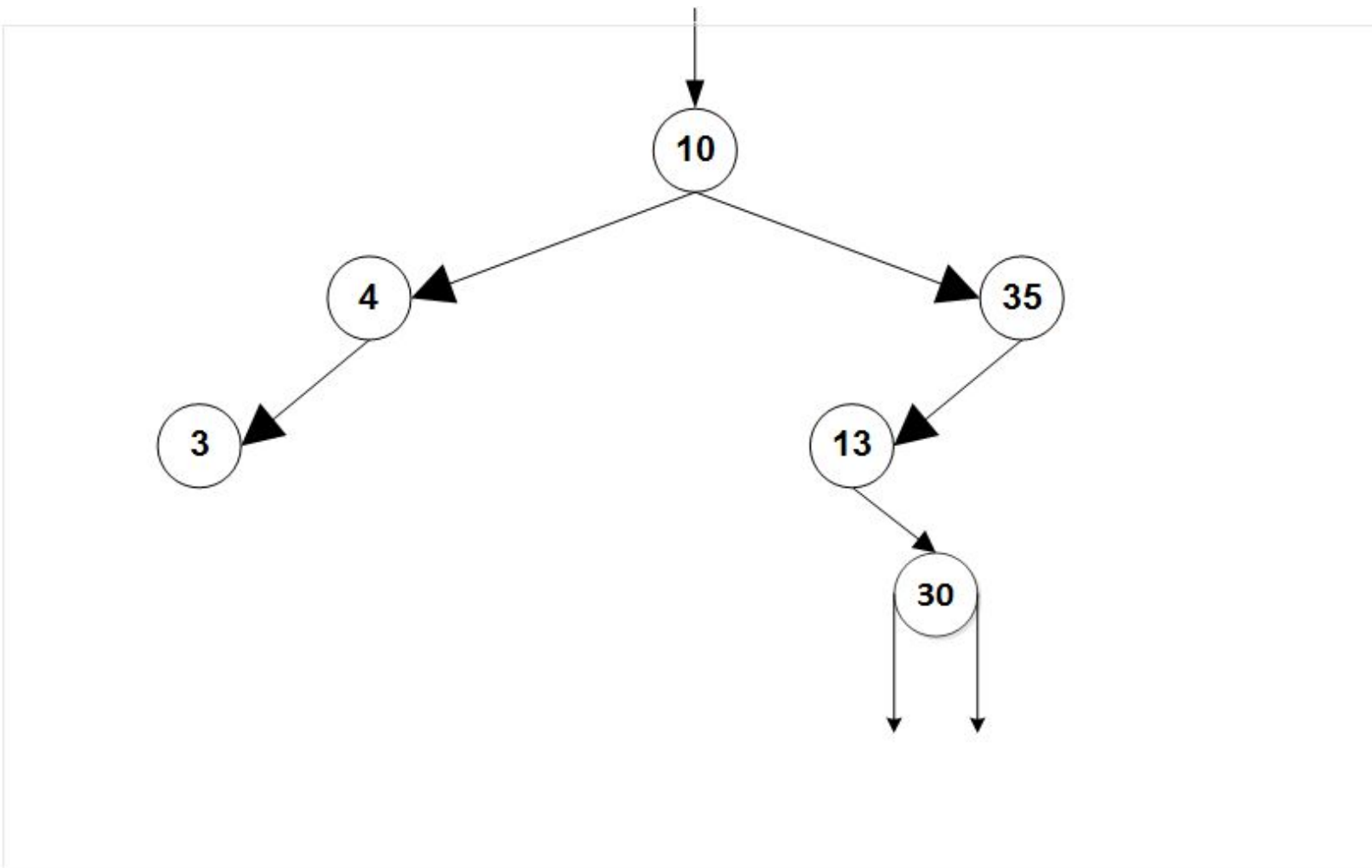
## Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



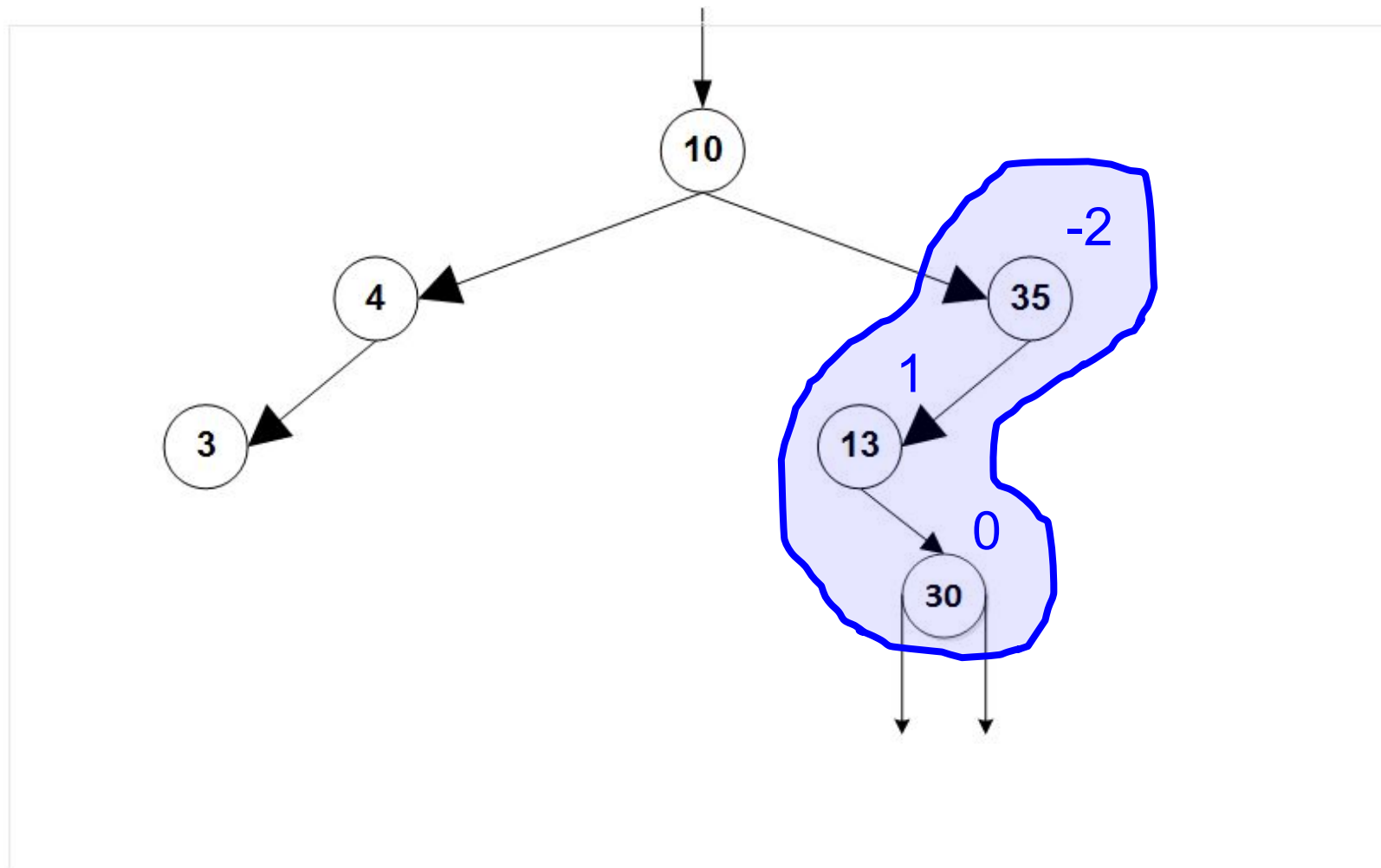
## Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



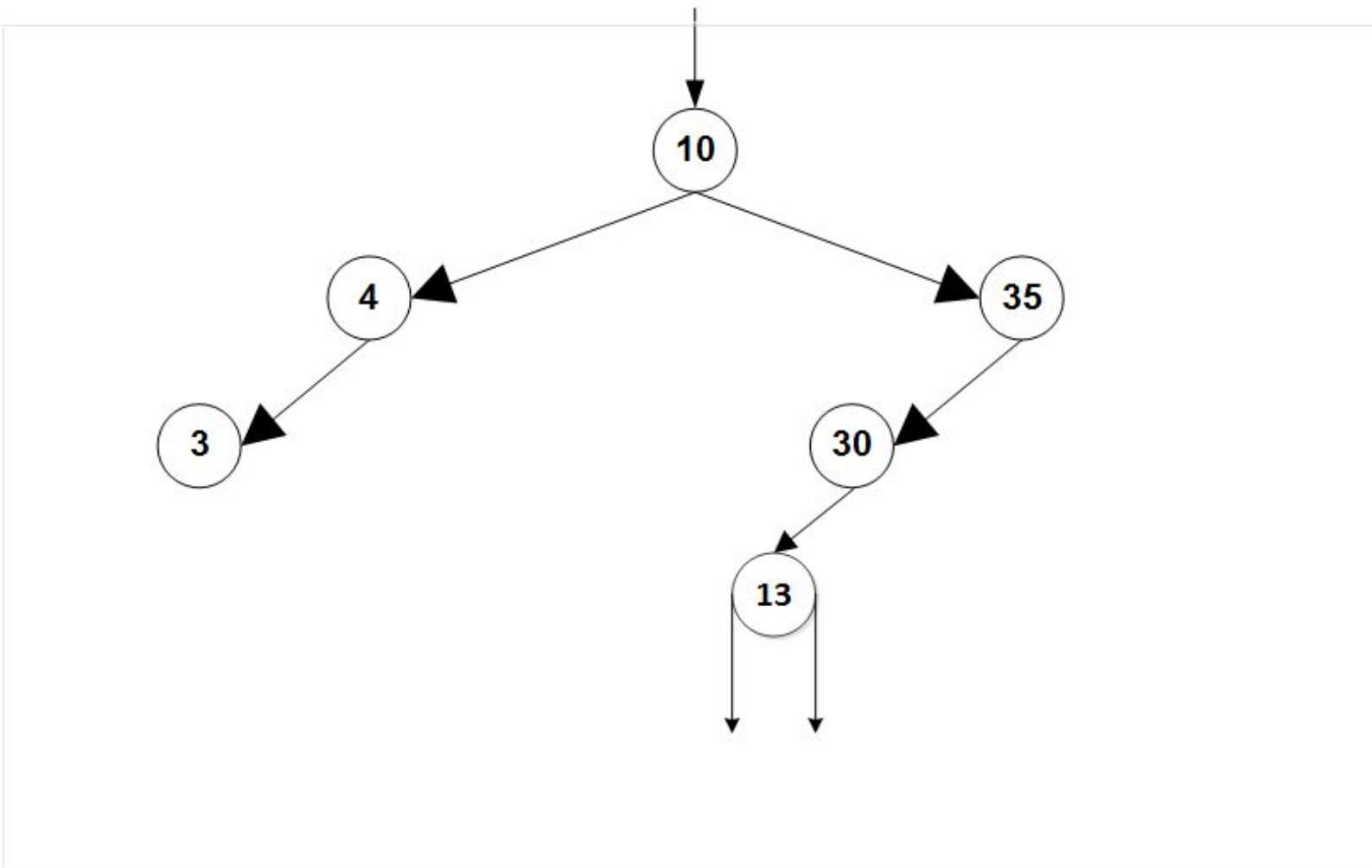
## Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente      rotação Esq (13) Dir (35)



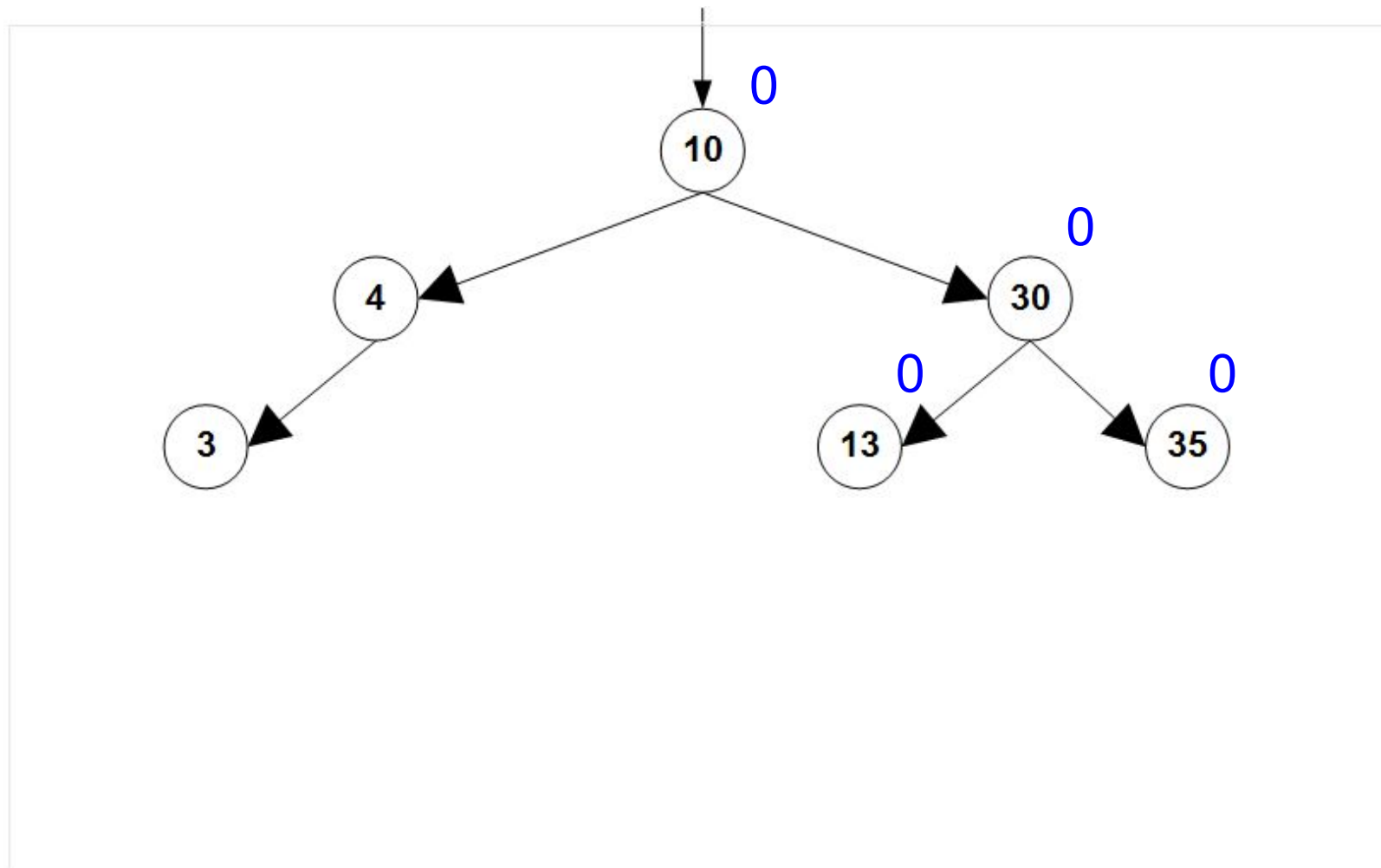
## Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente      rotação Esq (13) Dir (35)



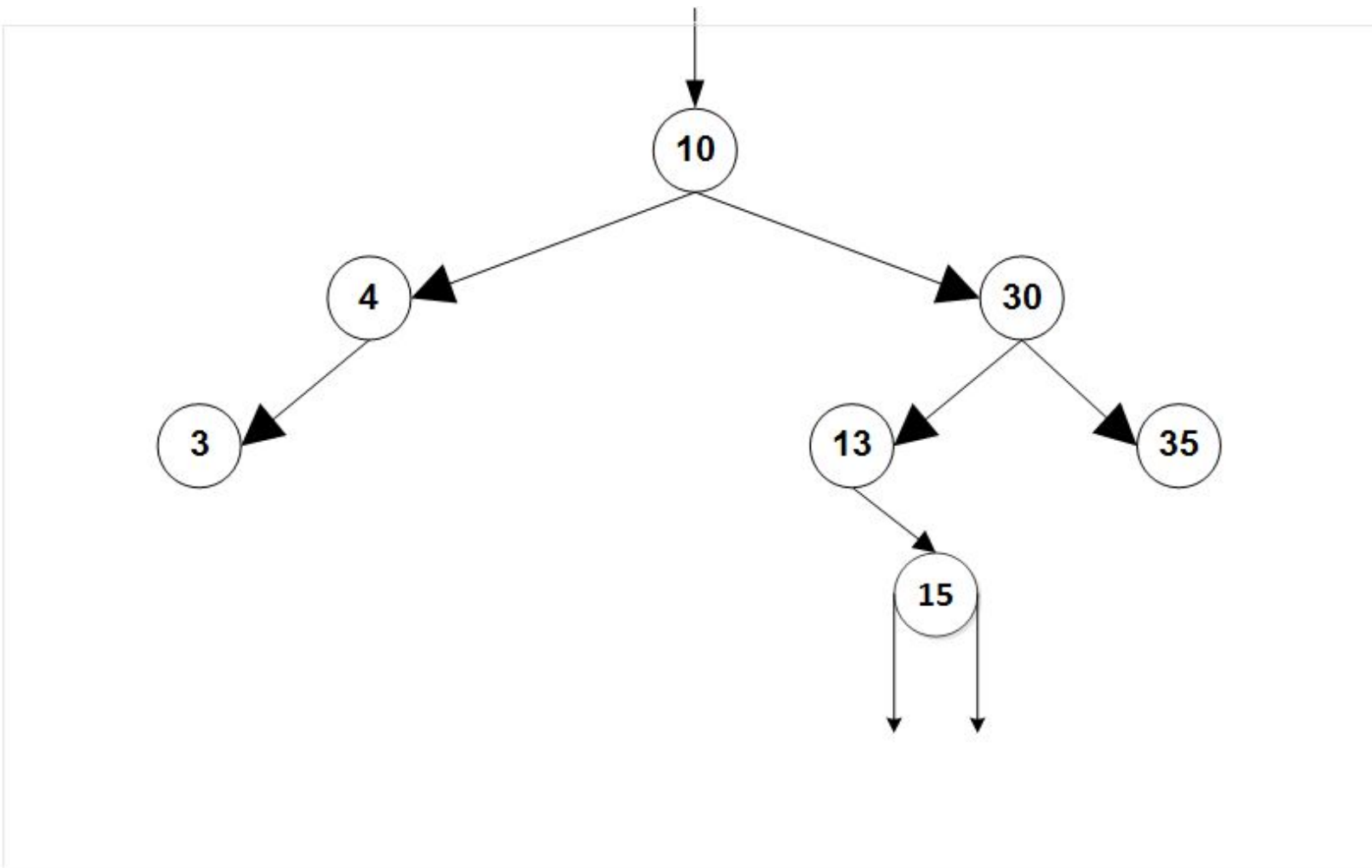
## Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente      rotação Esq (13) Dir (35)



## Exemplo

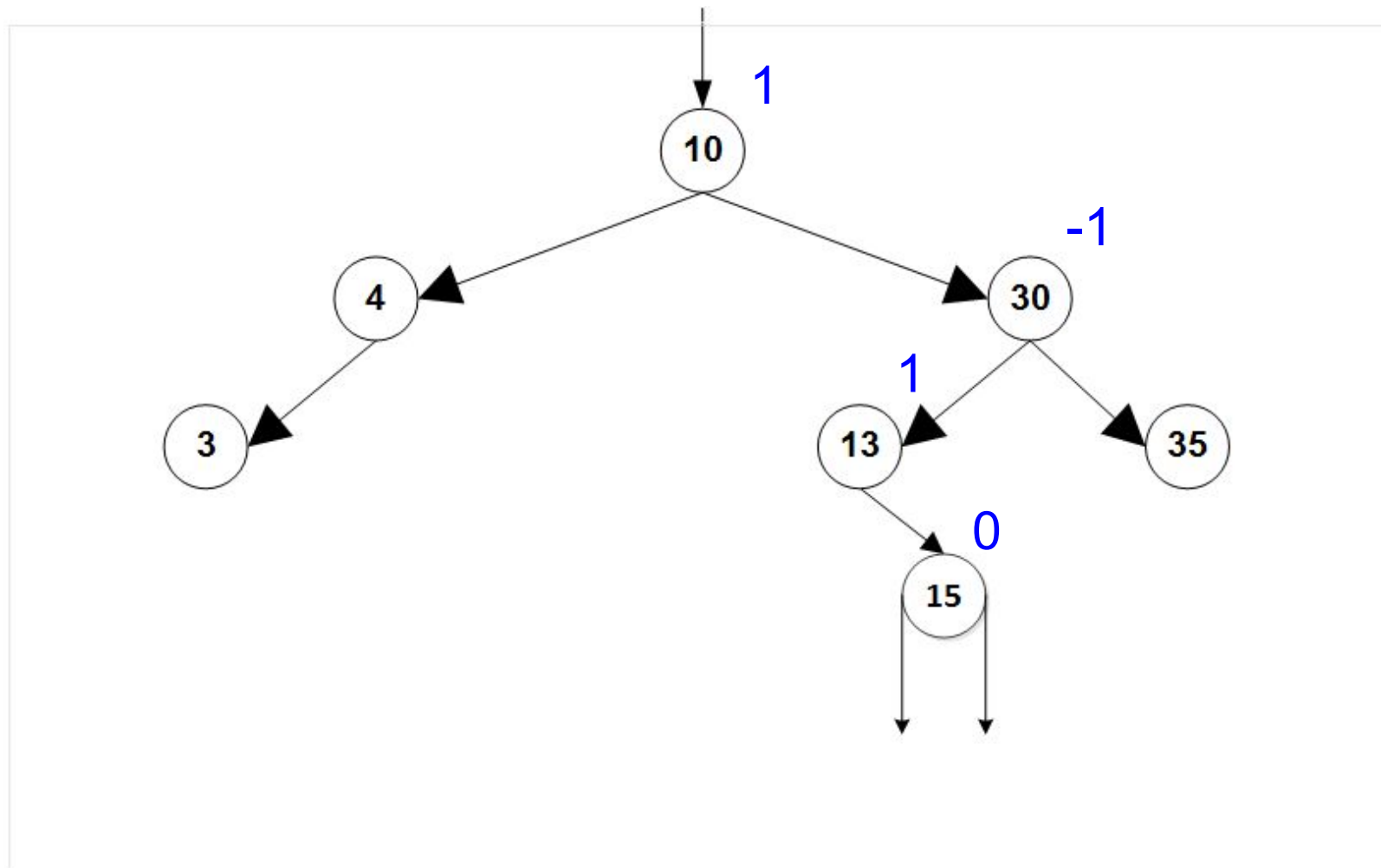
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, **15**, 12, 7, 40 e 20 respectivamente





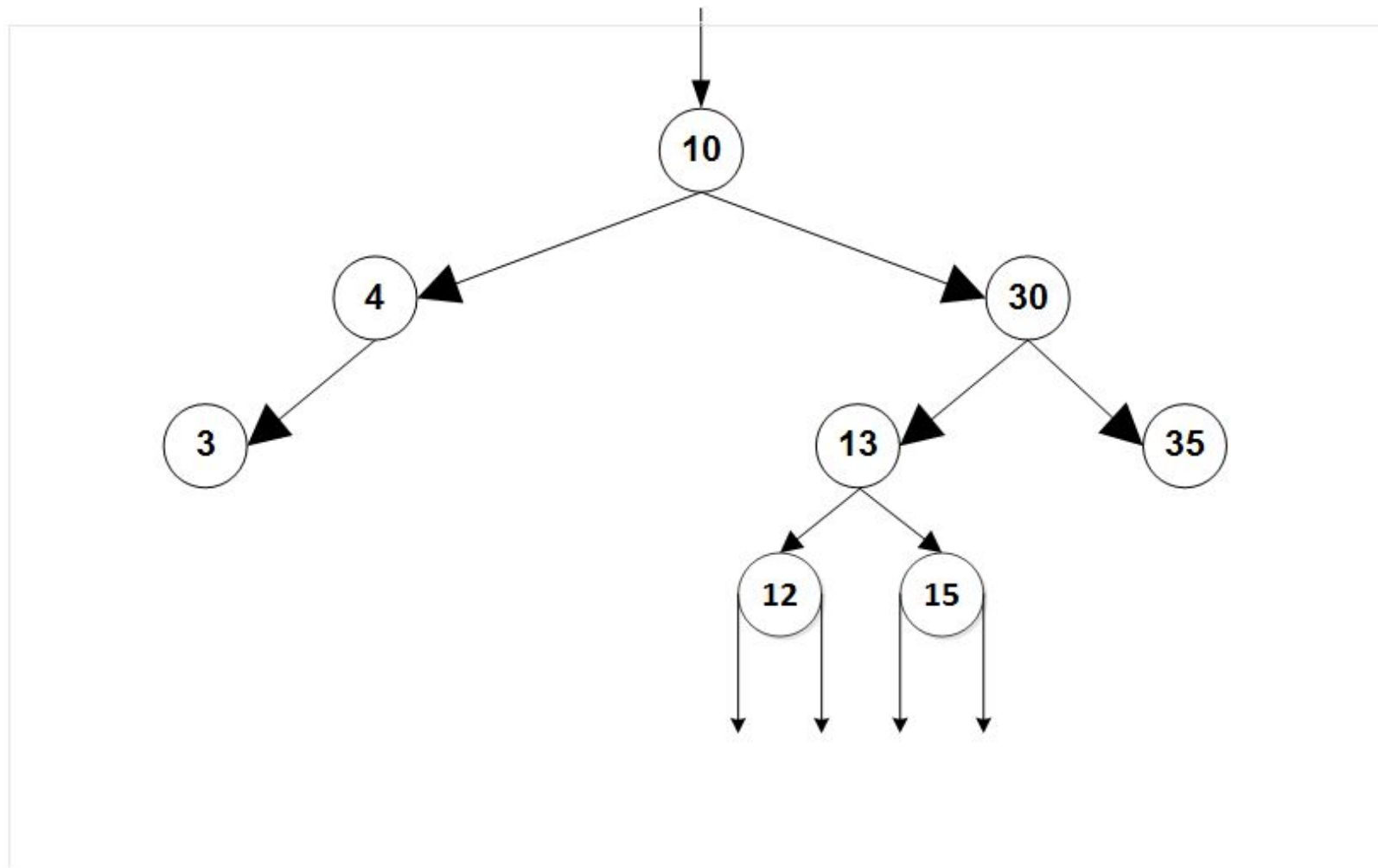
## Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, **15**, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



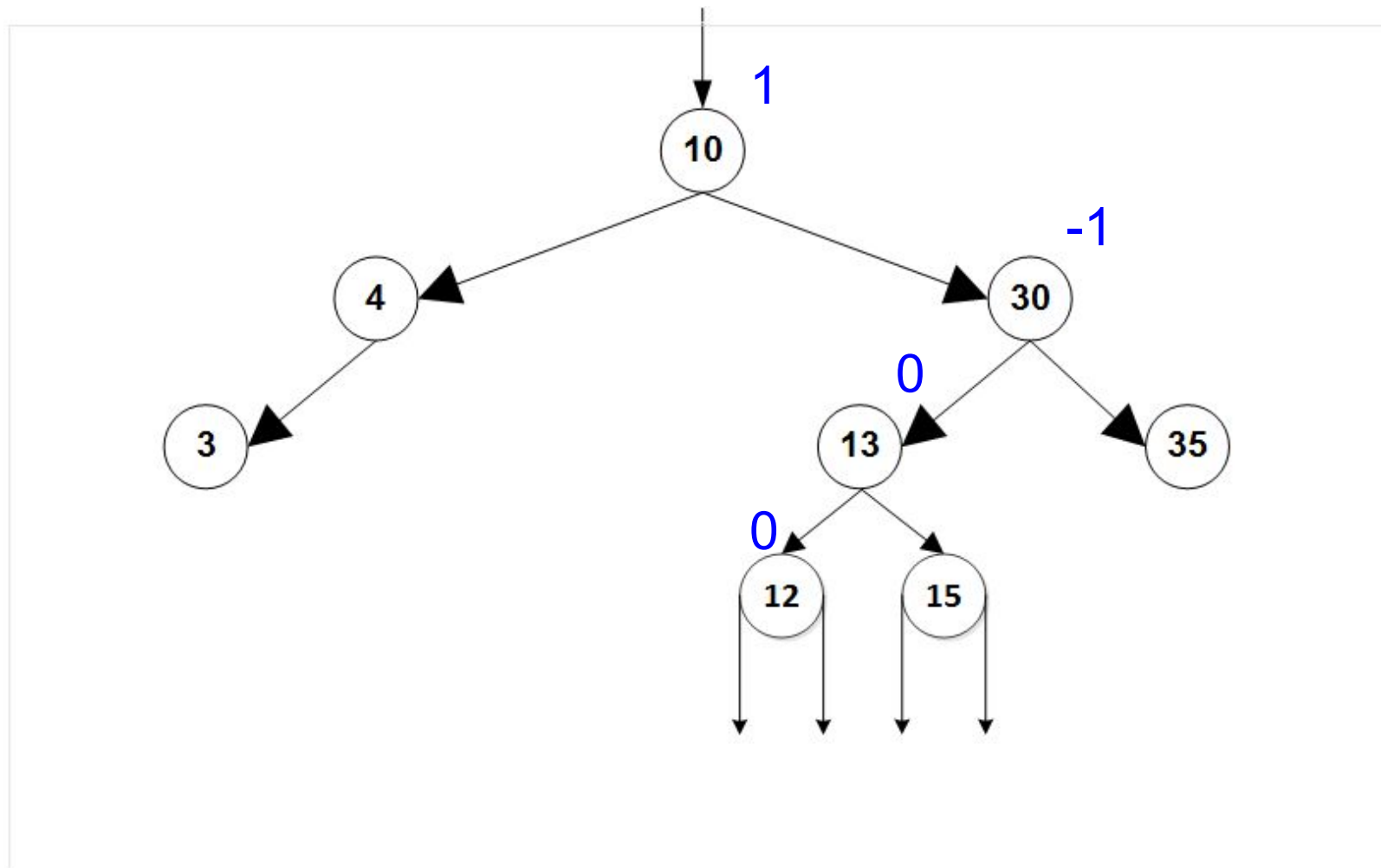
## Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



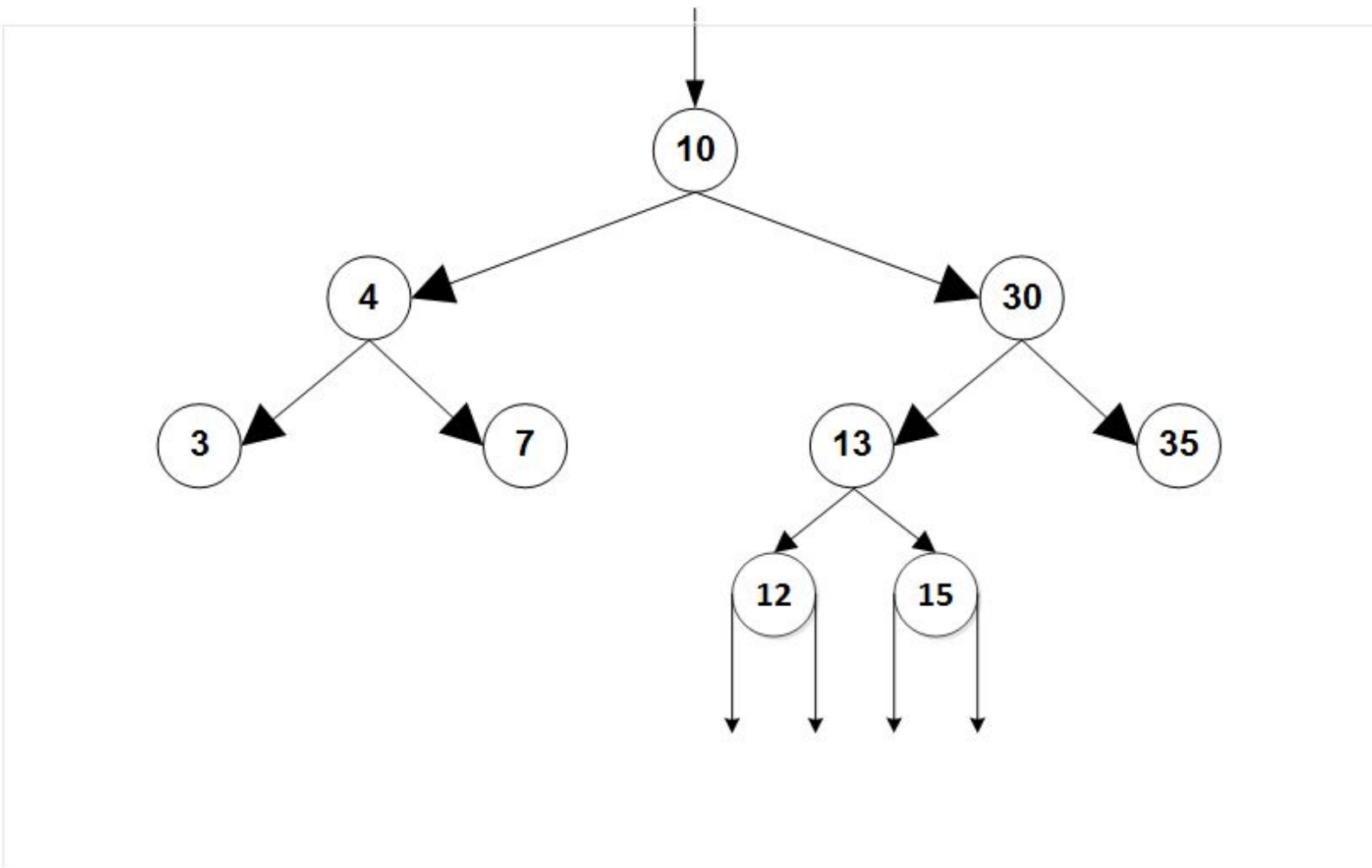
## Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, **15**, **12**, 7, 40 e 20 respectivamente



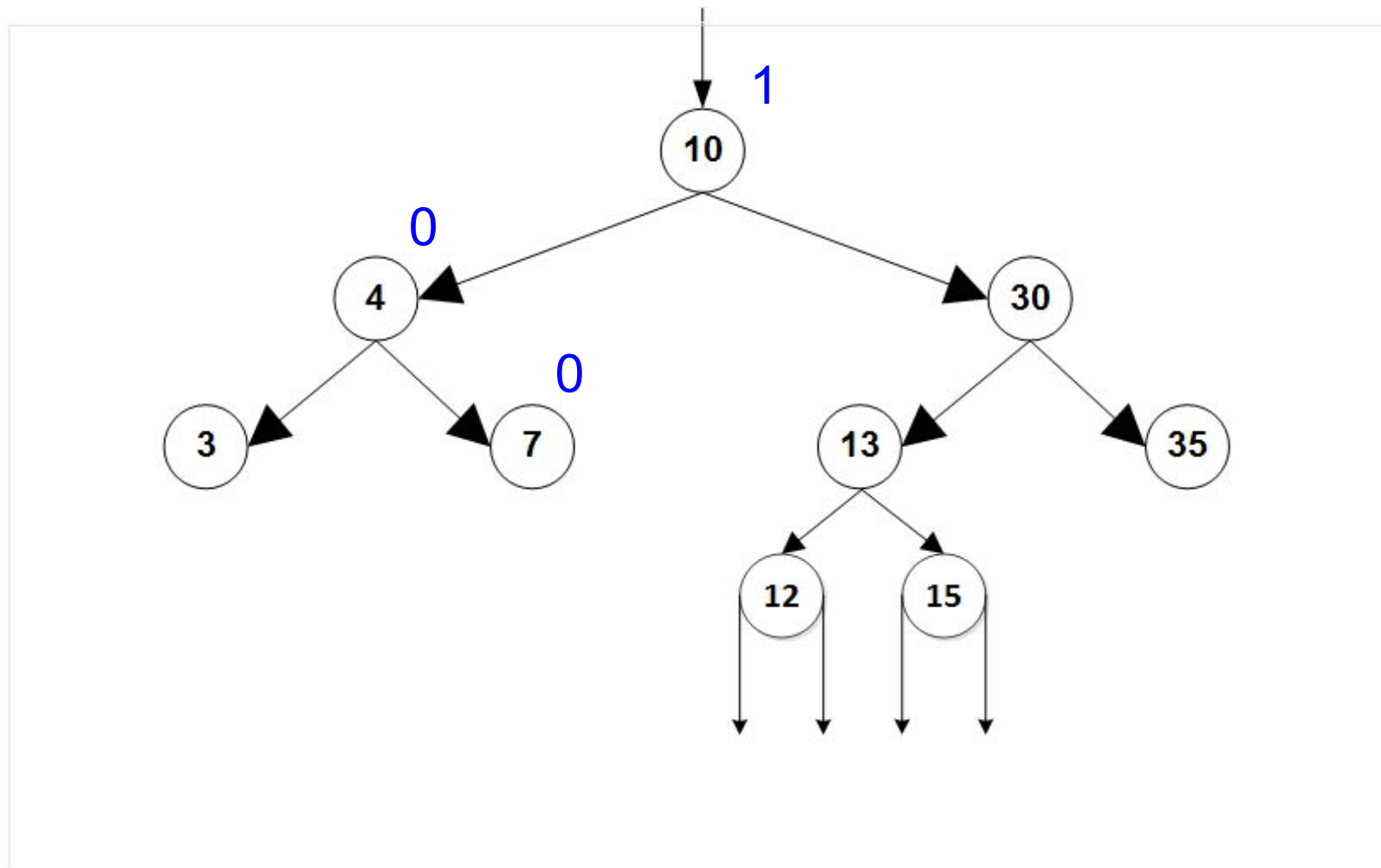
## Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, **15**, **12**, **7**, 40 e 20 respectivamente



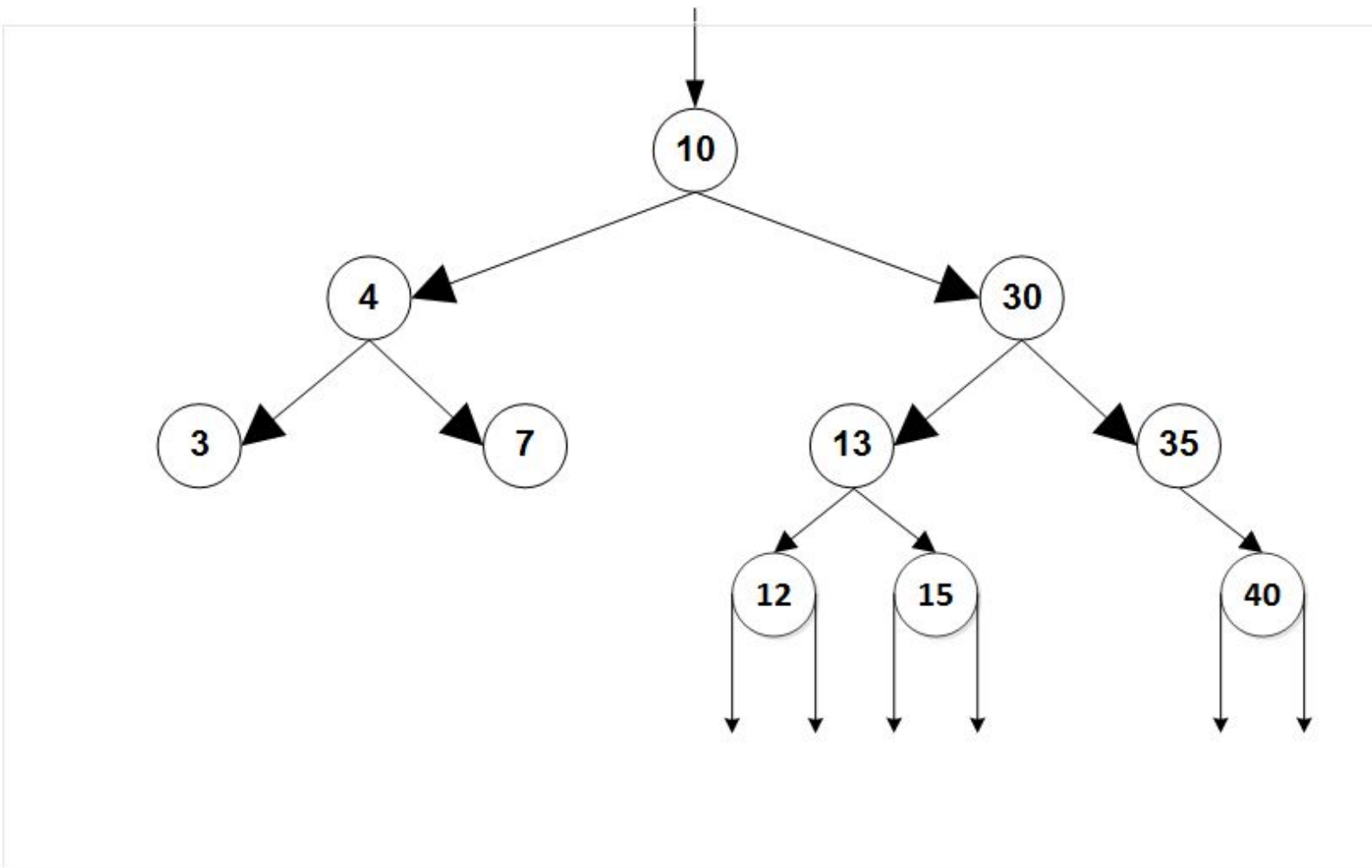
## Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



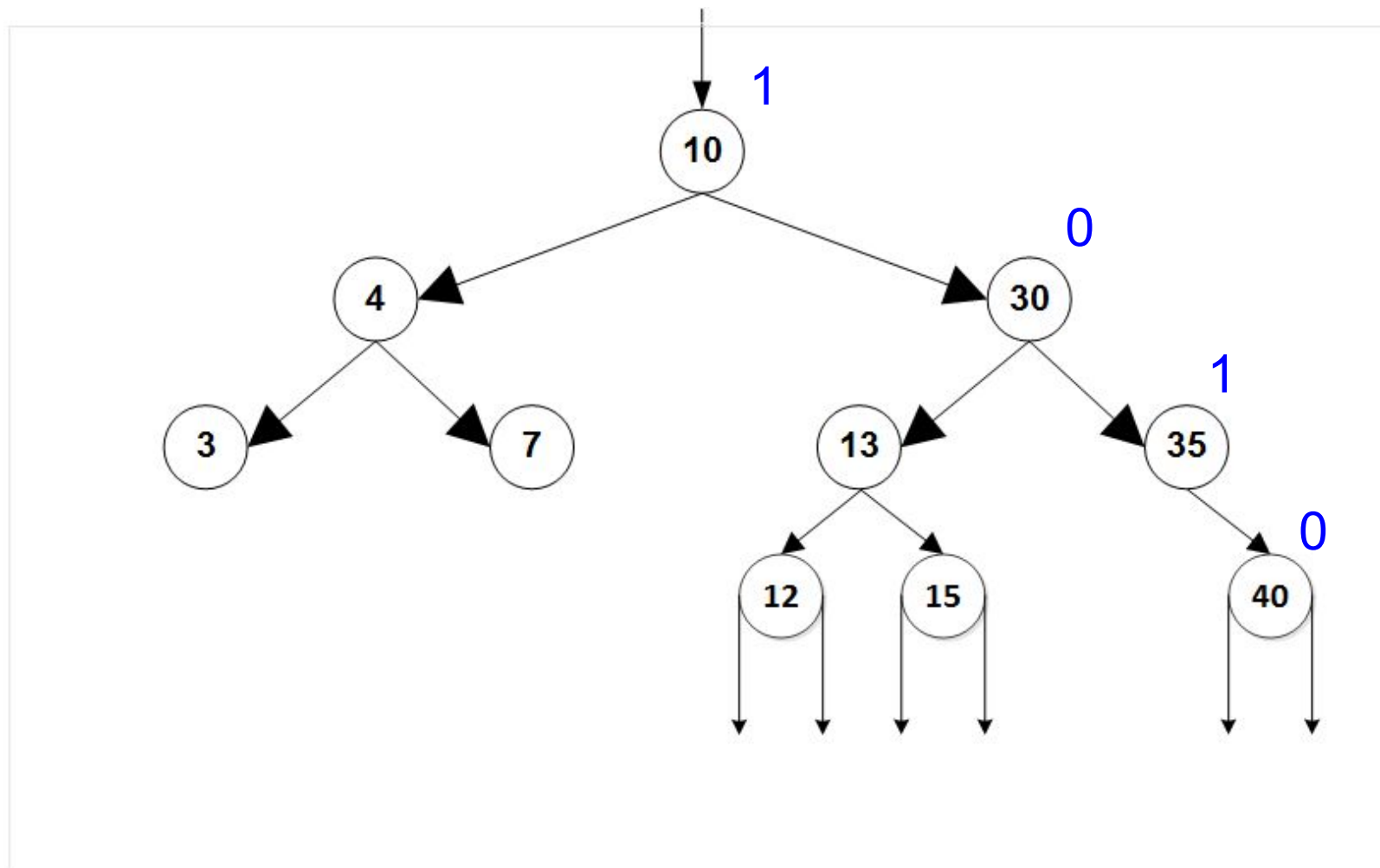
## Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



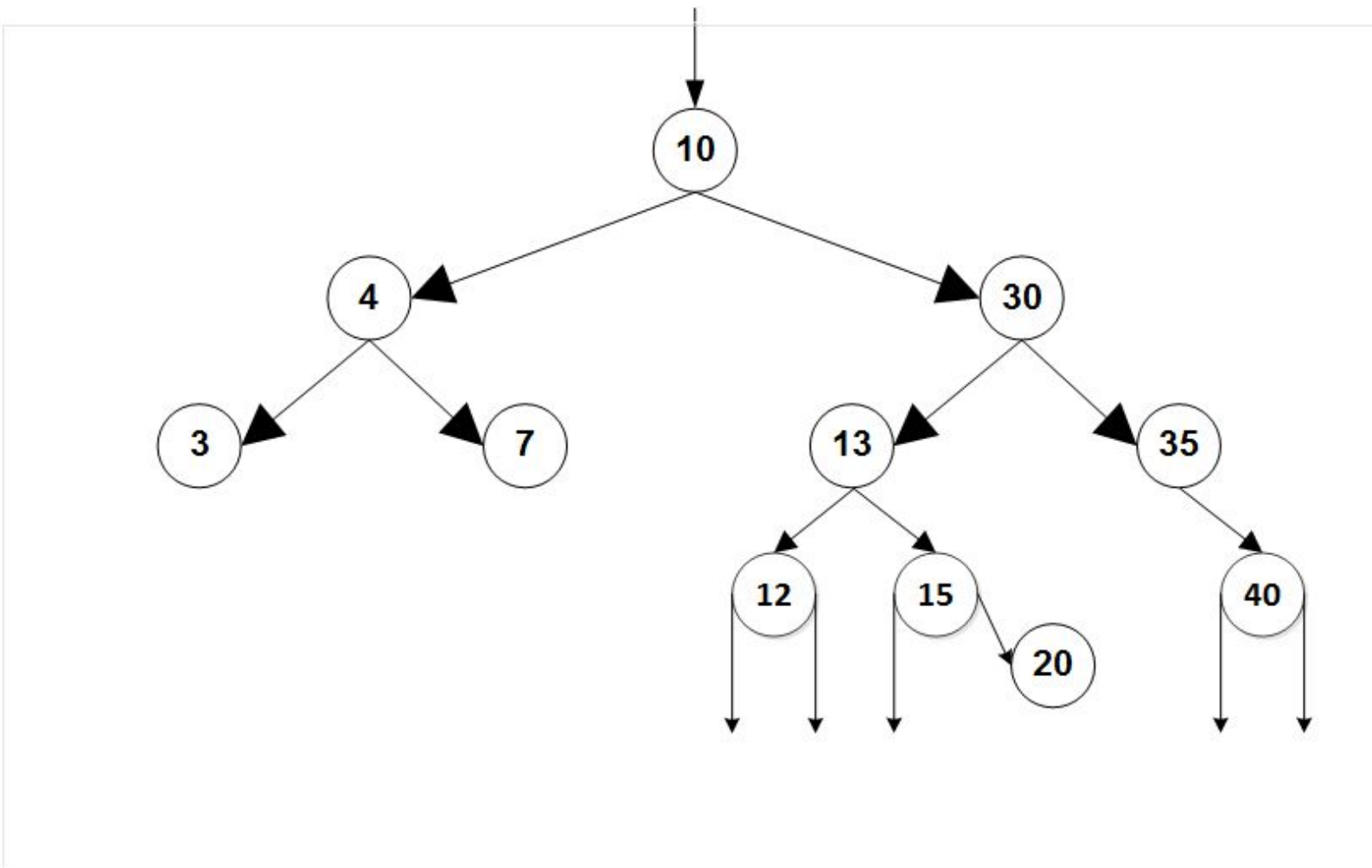
## Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



## Exemplo

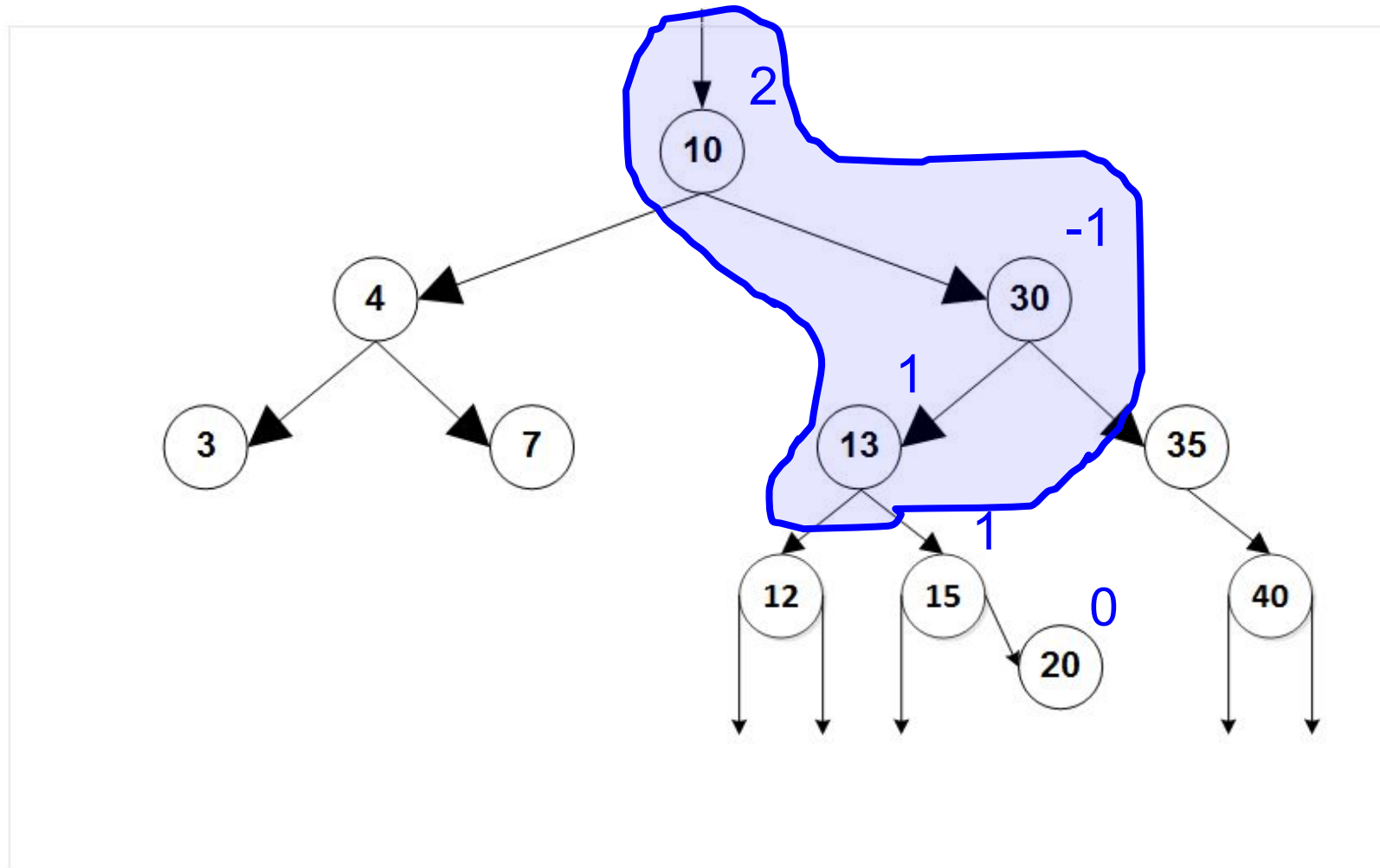
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente





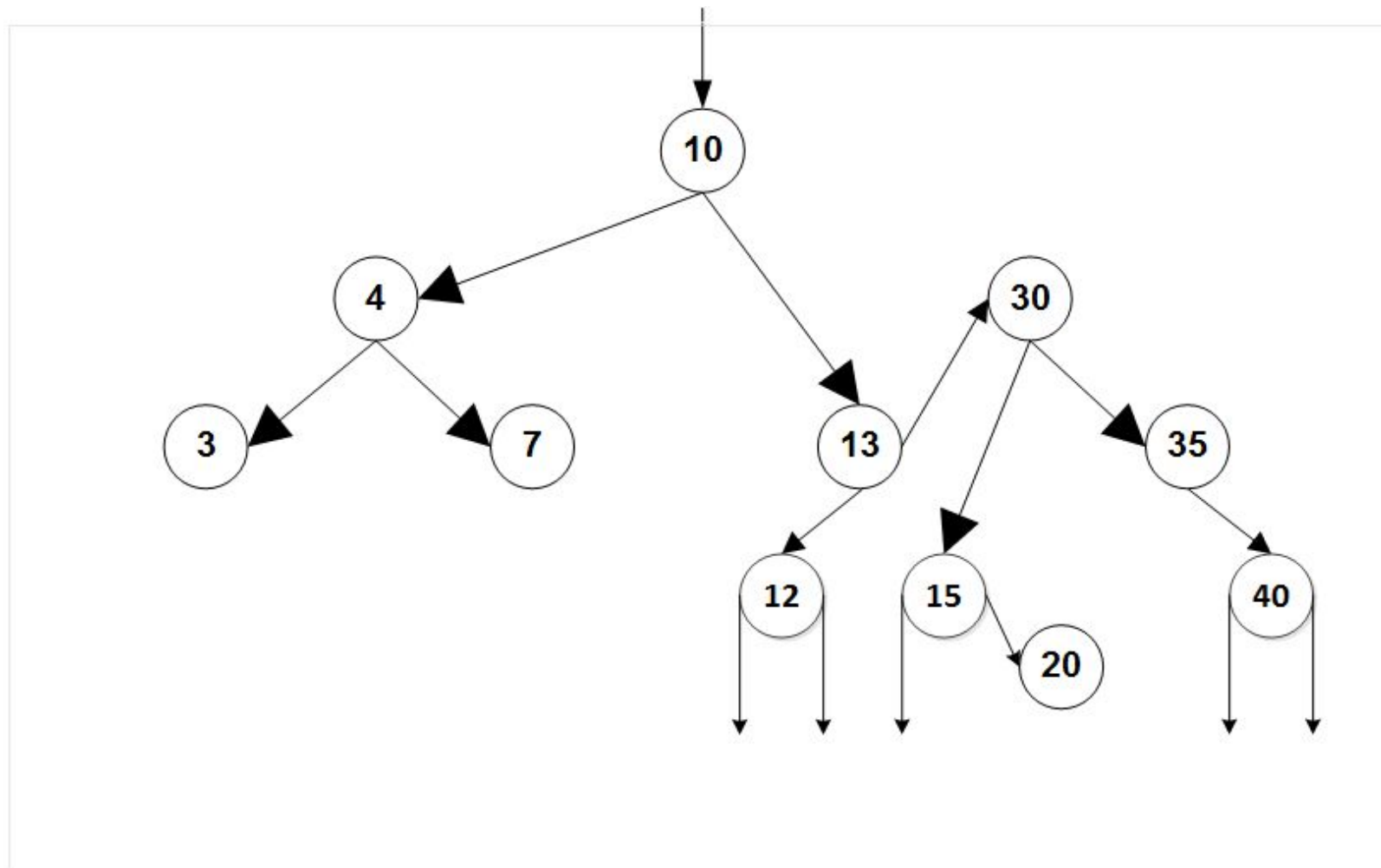
## Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, **15**, **12**, **7**, **40** e **20** respectivamente      rotação Dir (30) Esq (10)



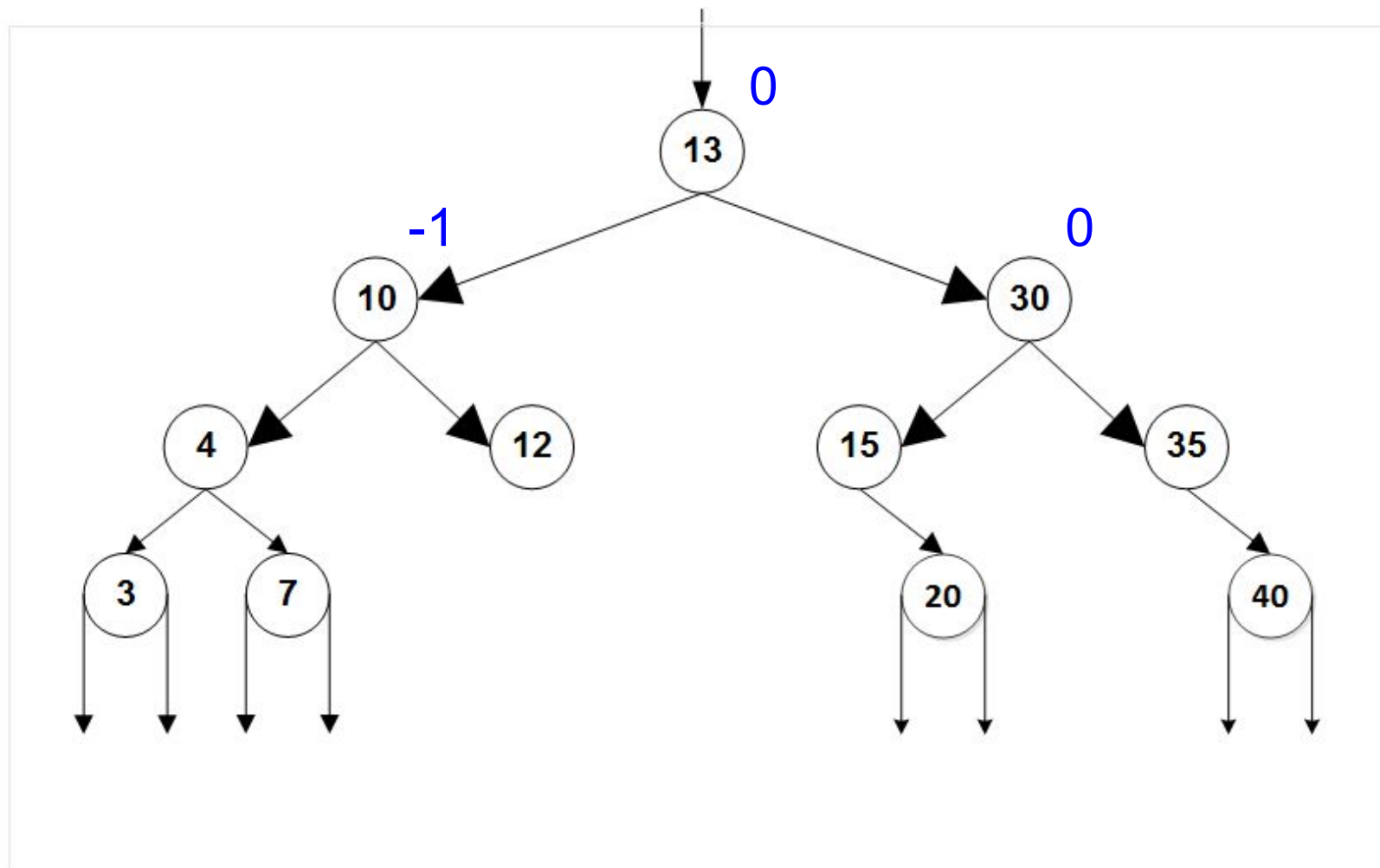
## Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do **4**, **35**, **10**, **13**, **3**, **30**, **15**, **12**, **7**, **40** e **20** respectivamente      rotação Dir (30) Esq (10)

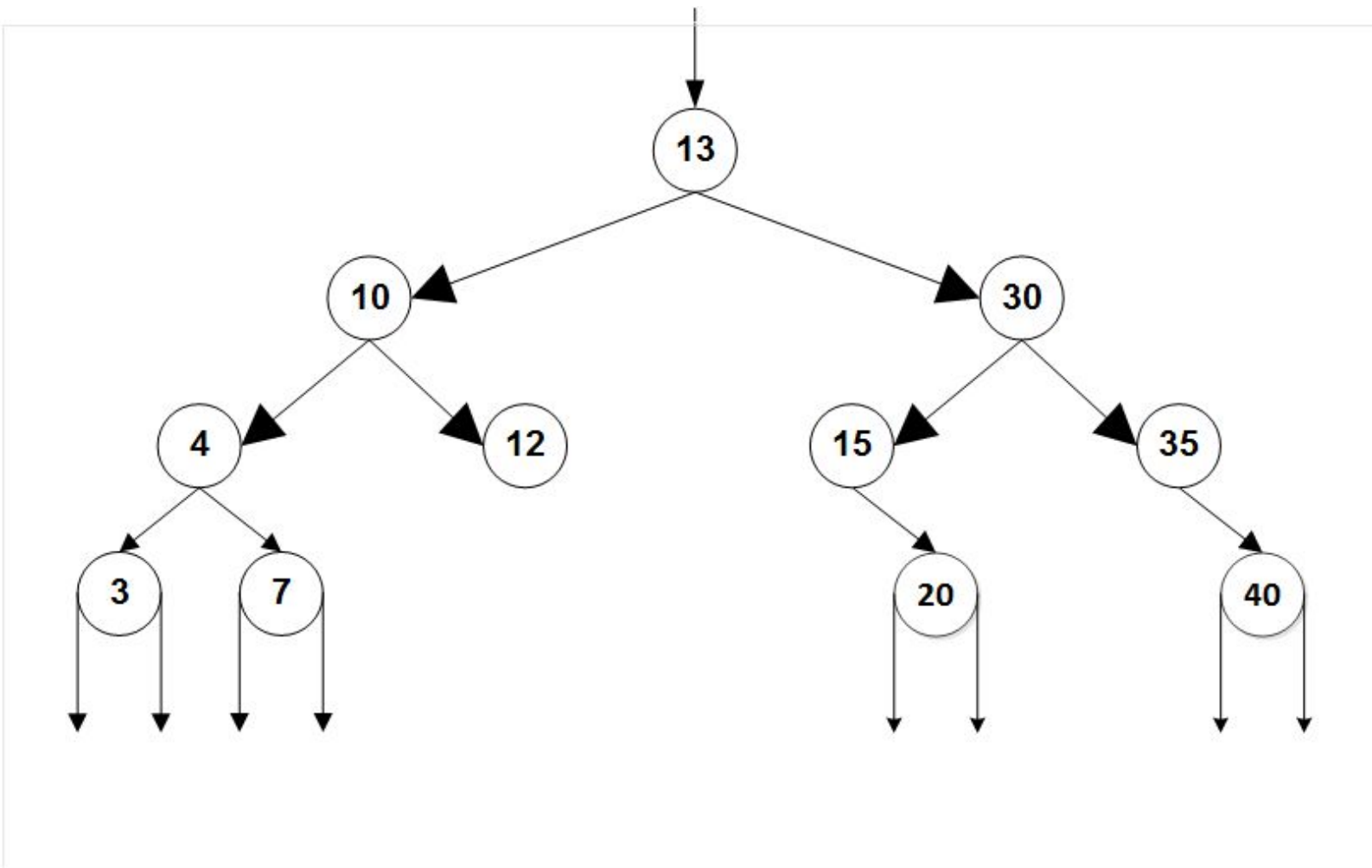


## Exemplo

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20 respectivamente



- Insira o 6 na AVL abaixo



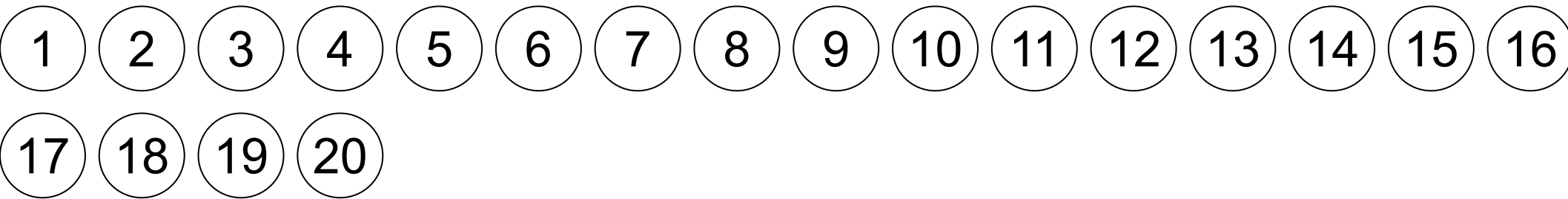
## Exercício

- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas dos números 1 a 20, respectivamente
- Crie uma árvore AVL através de inserções sucessivas dos números 20 a 1, respectivamente
- Para cada um dos dois exercícios anteriores, verifique sua resposta usando nosso código para a árvore AVL

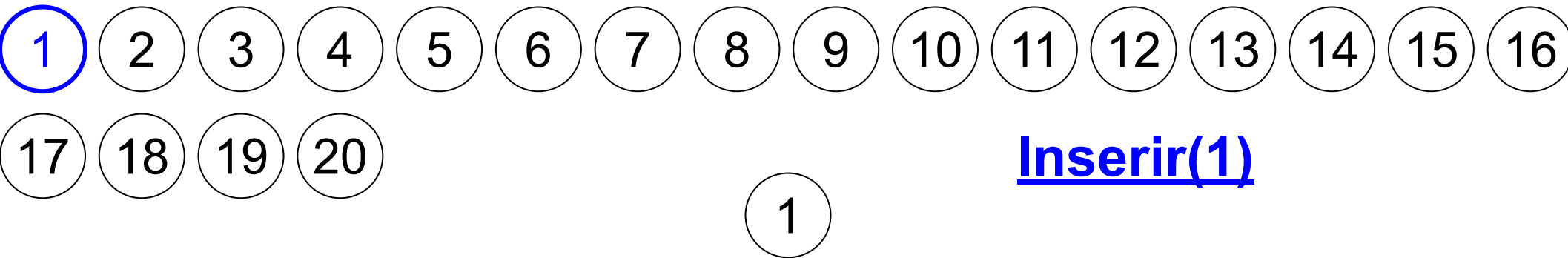
# Algoritmo em C-*like*

Ver código em: [fonte/08/avl/](#)

# Inserir os Números 1 à 20 na AVL

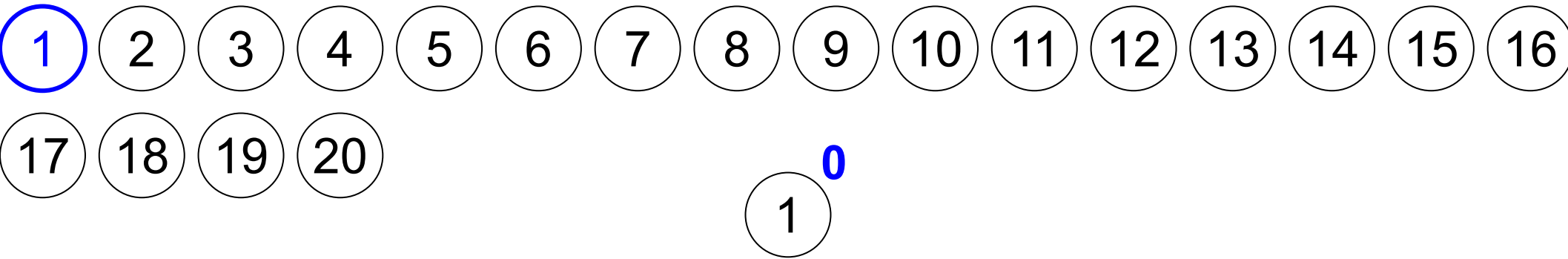


## Inserir os Números 1 à 20 na AVL

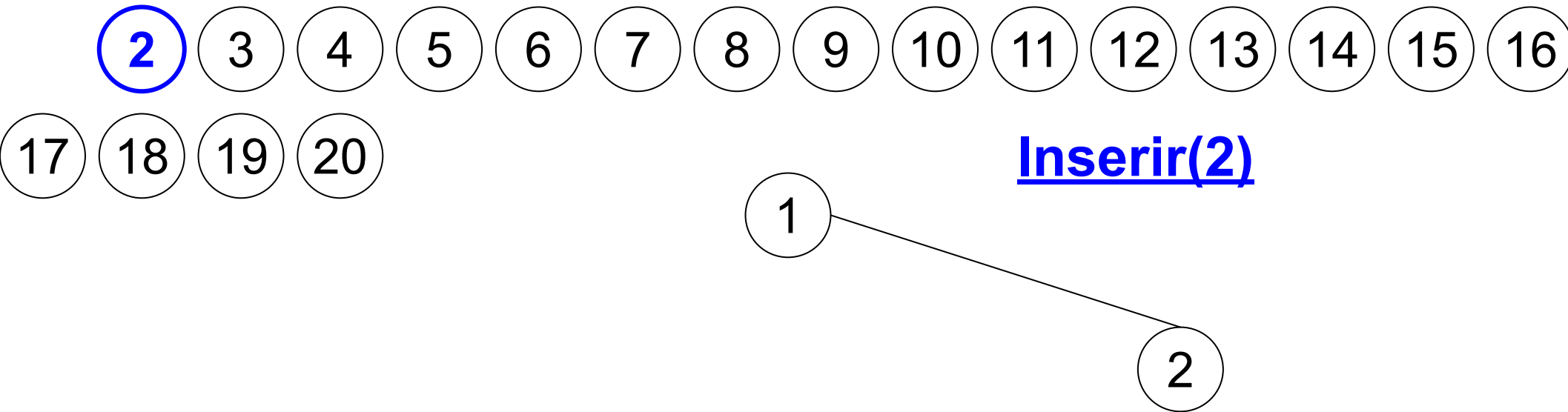




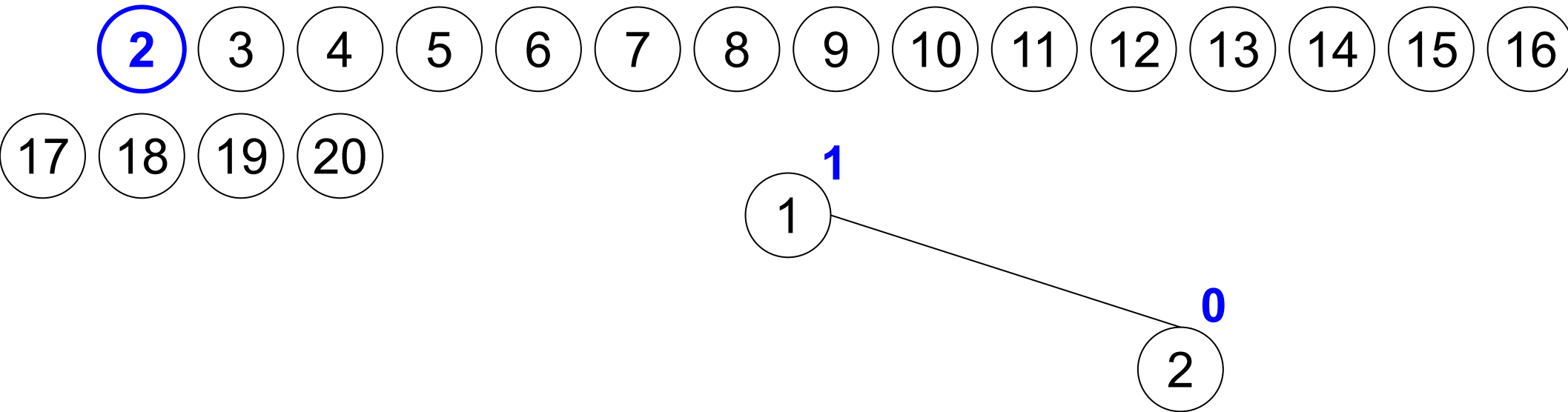
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



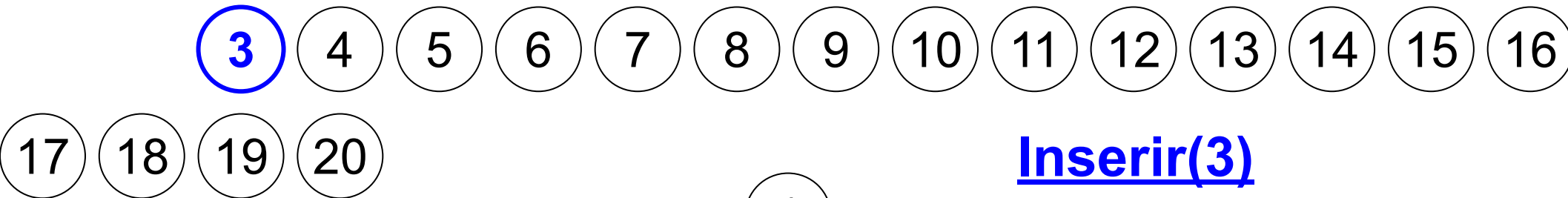
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



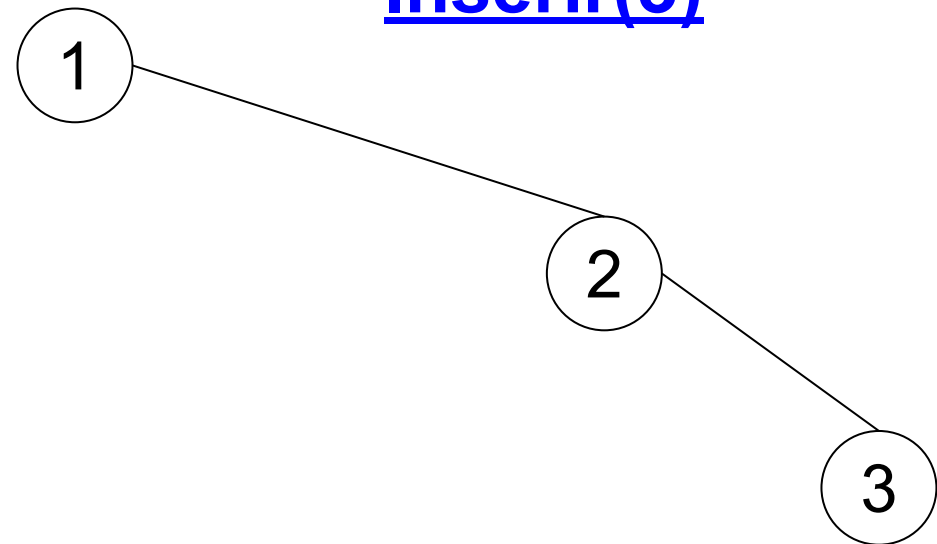
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



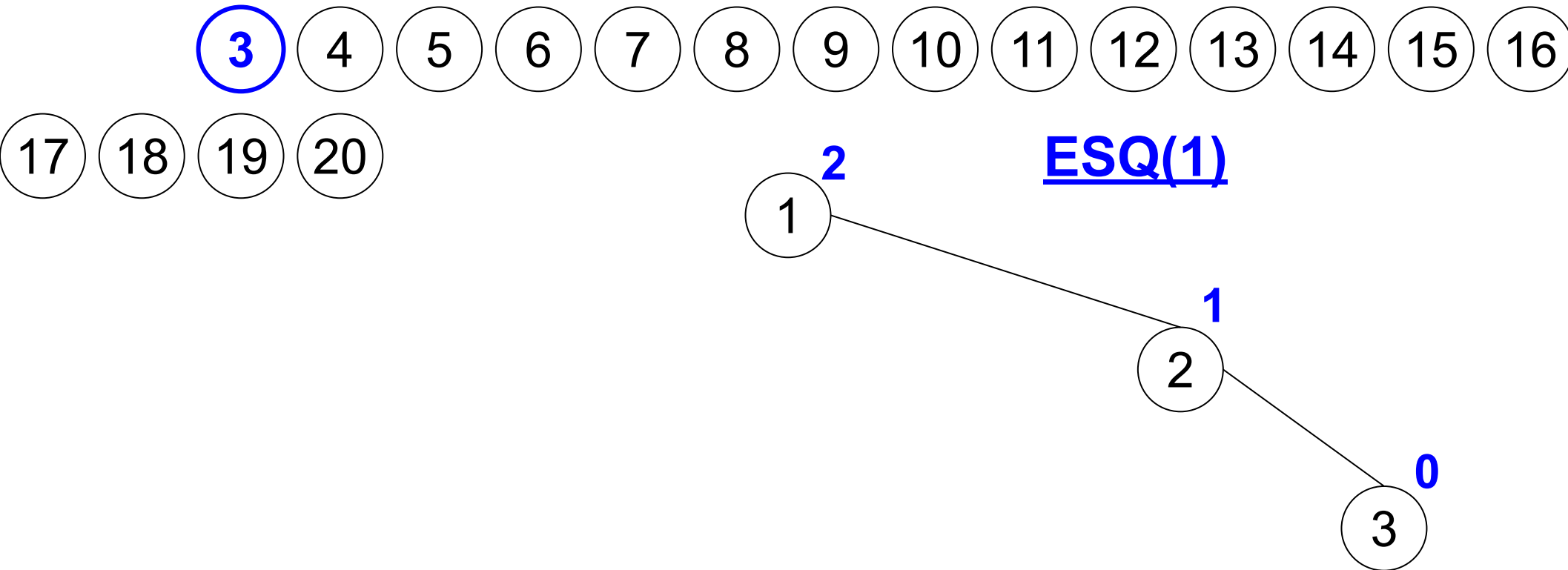
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



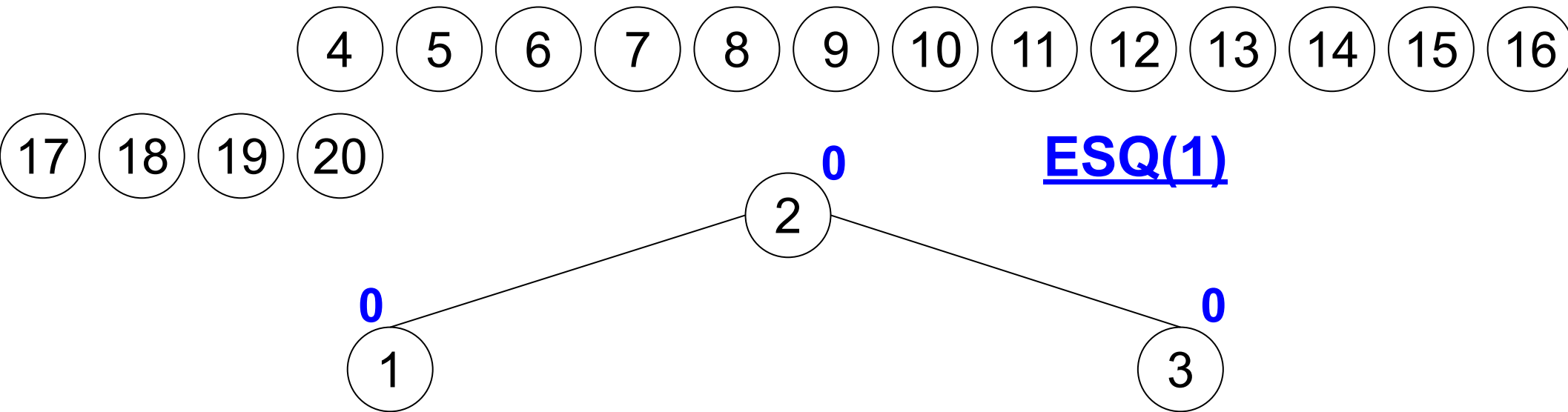
Inserir(3)



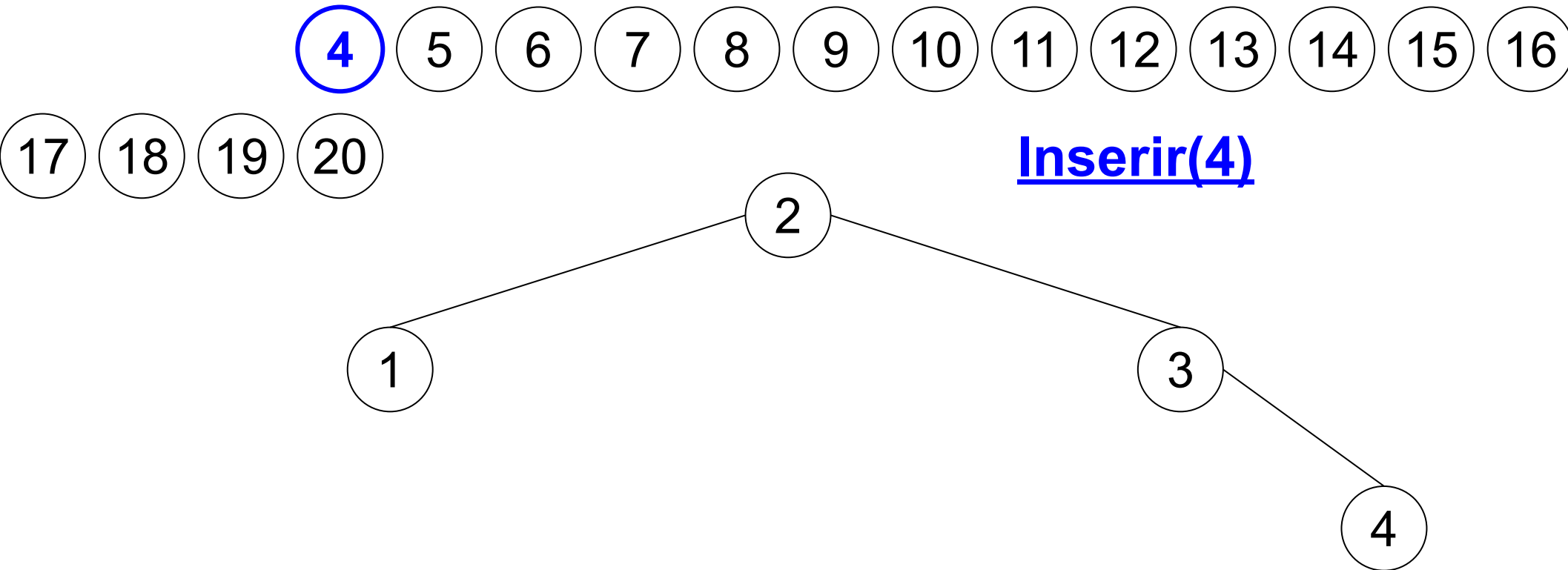
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



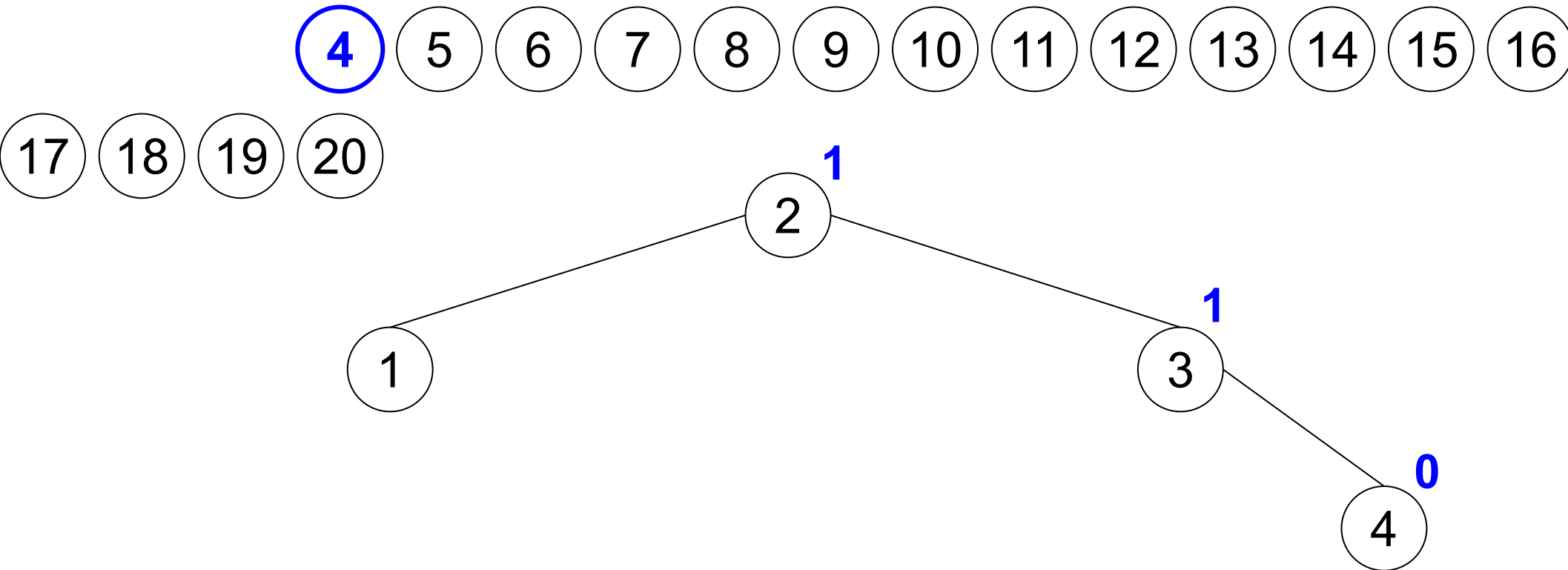
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



## Inserir os Números 1 à 20 na AVL

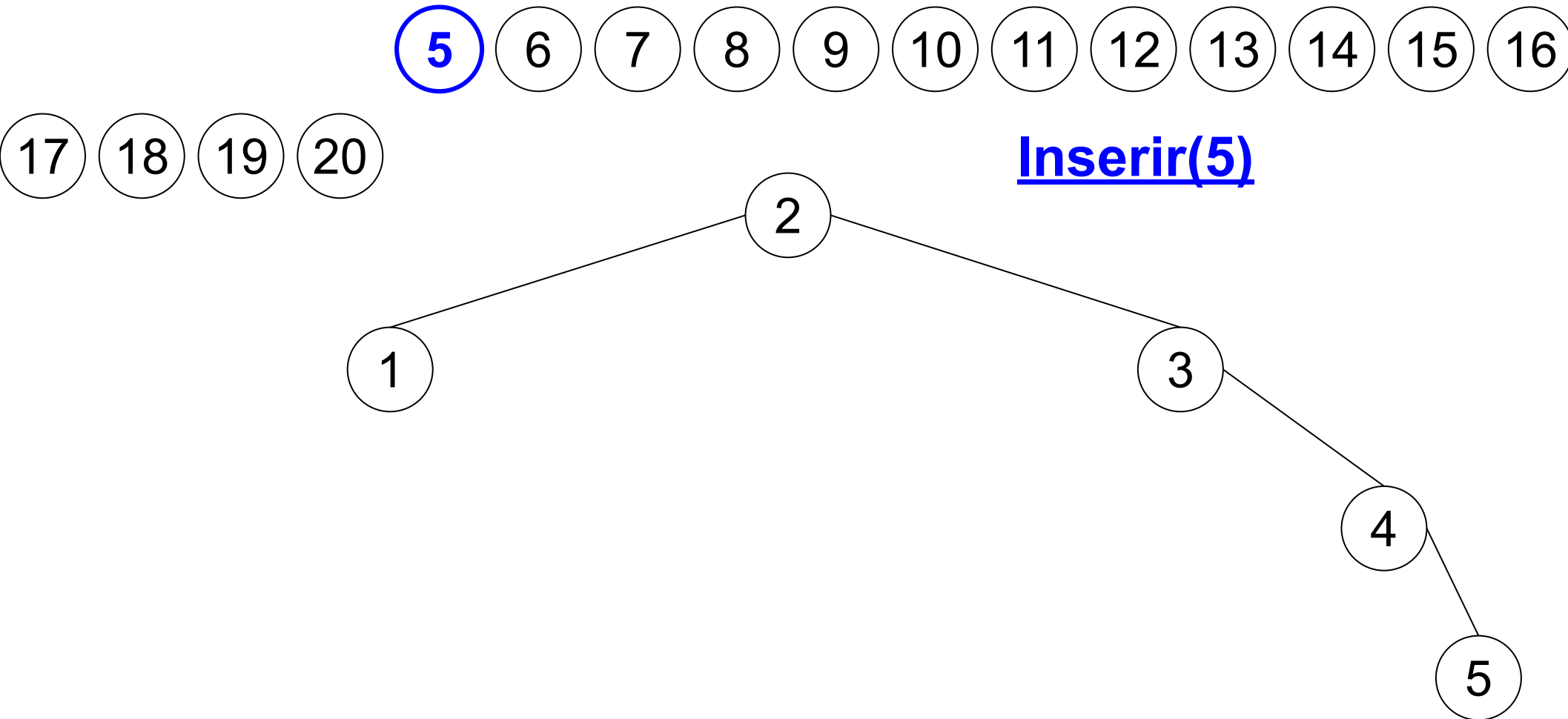


## Inserir os Números 1 à 20 na AVL

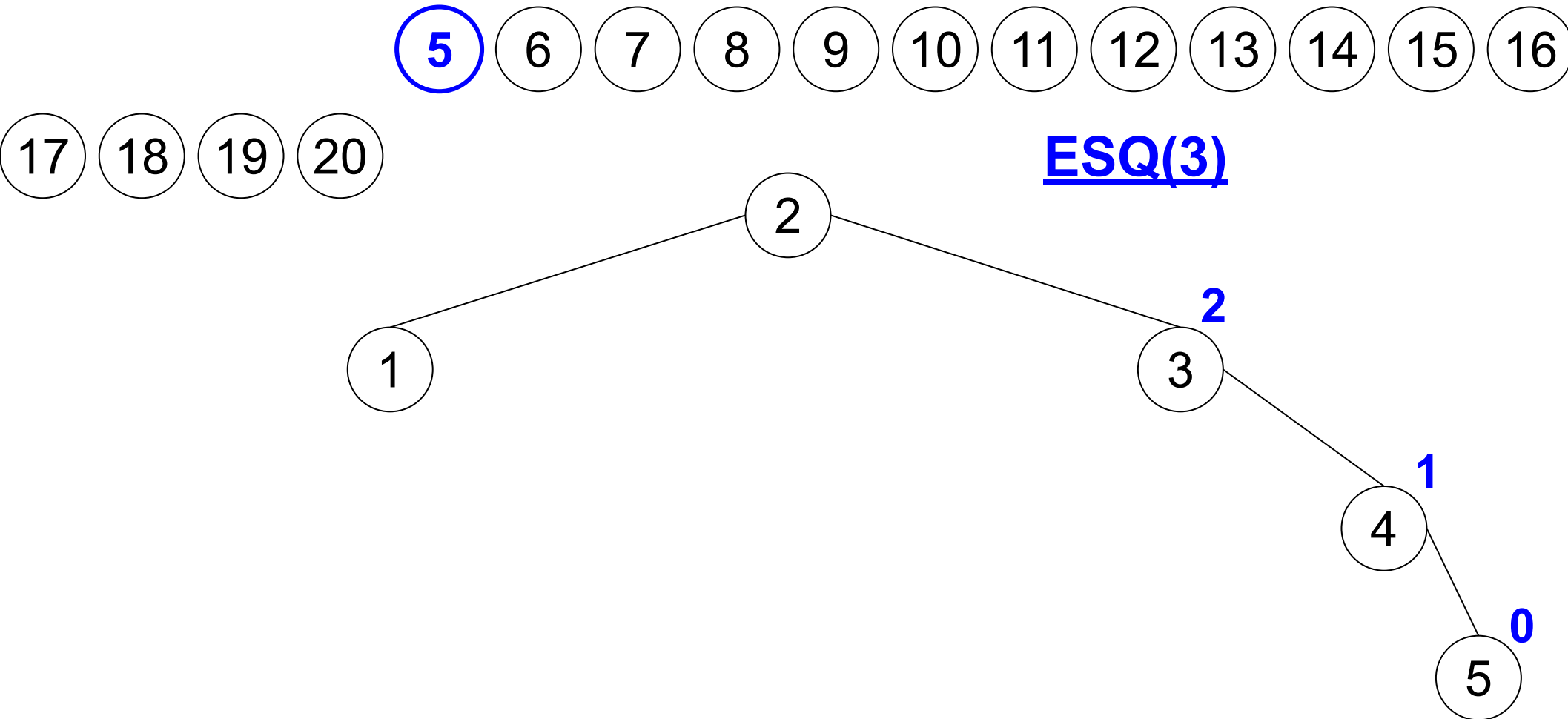




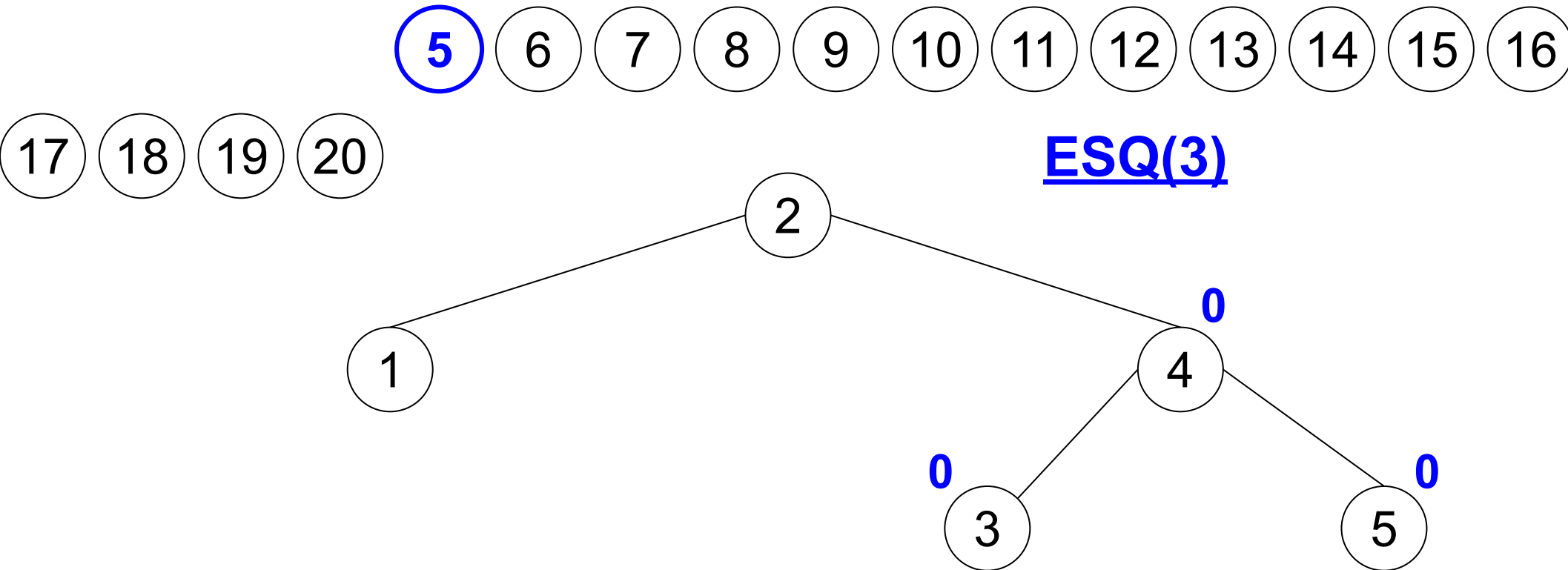
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



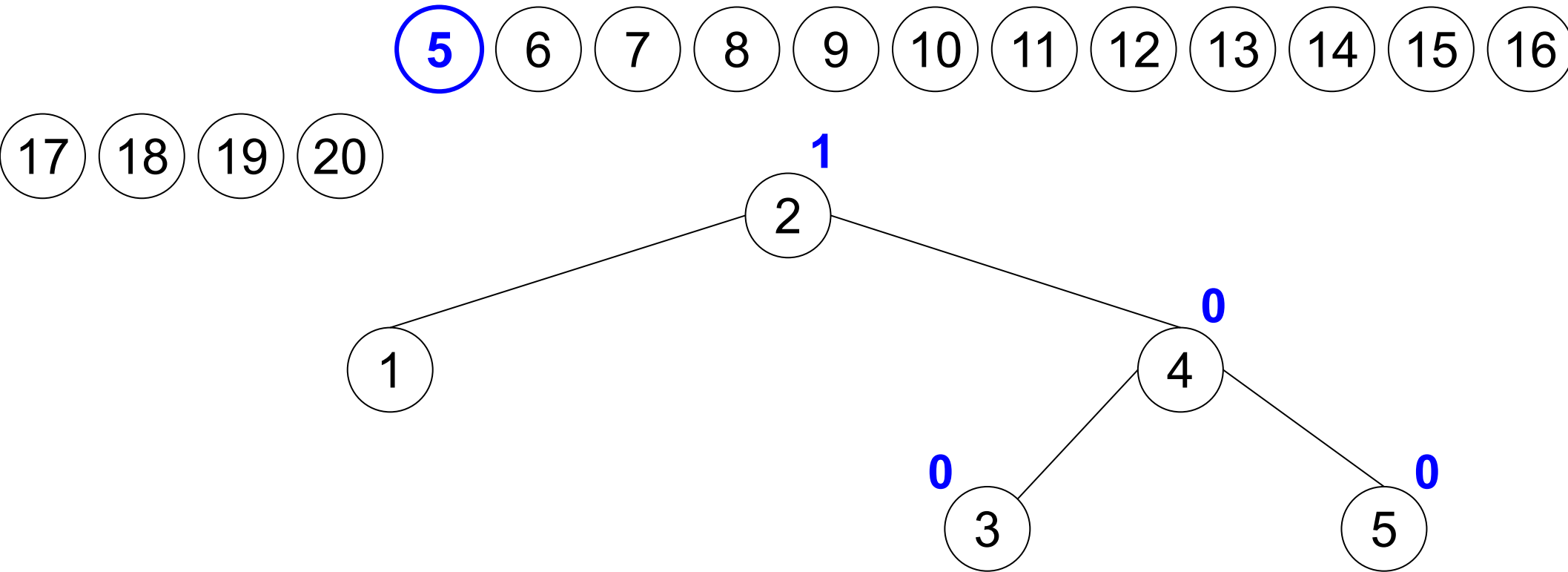
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



## Inserir os Números 1 à 20 na AVL

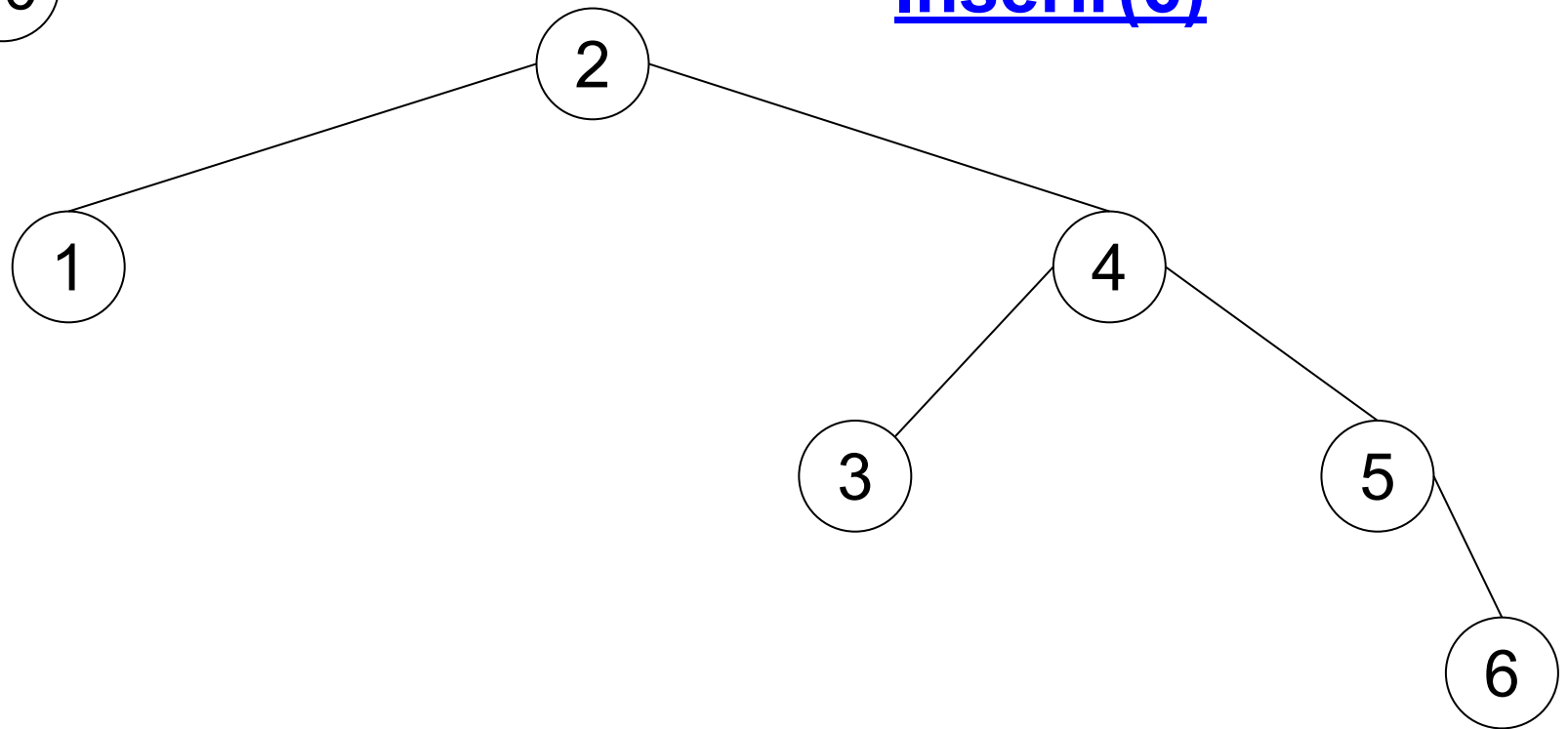


## Inserir os Números 1 à 20 na AVL

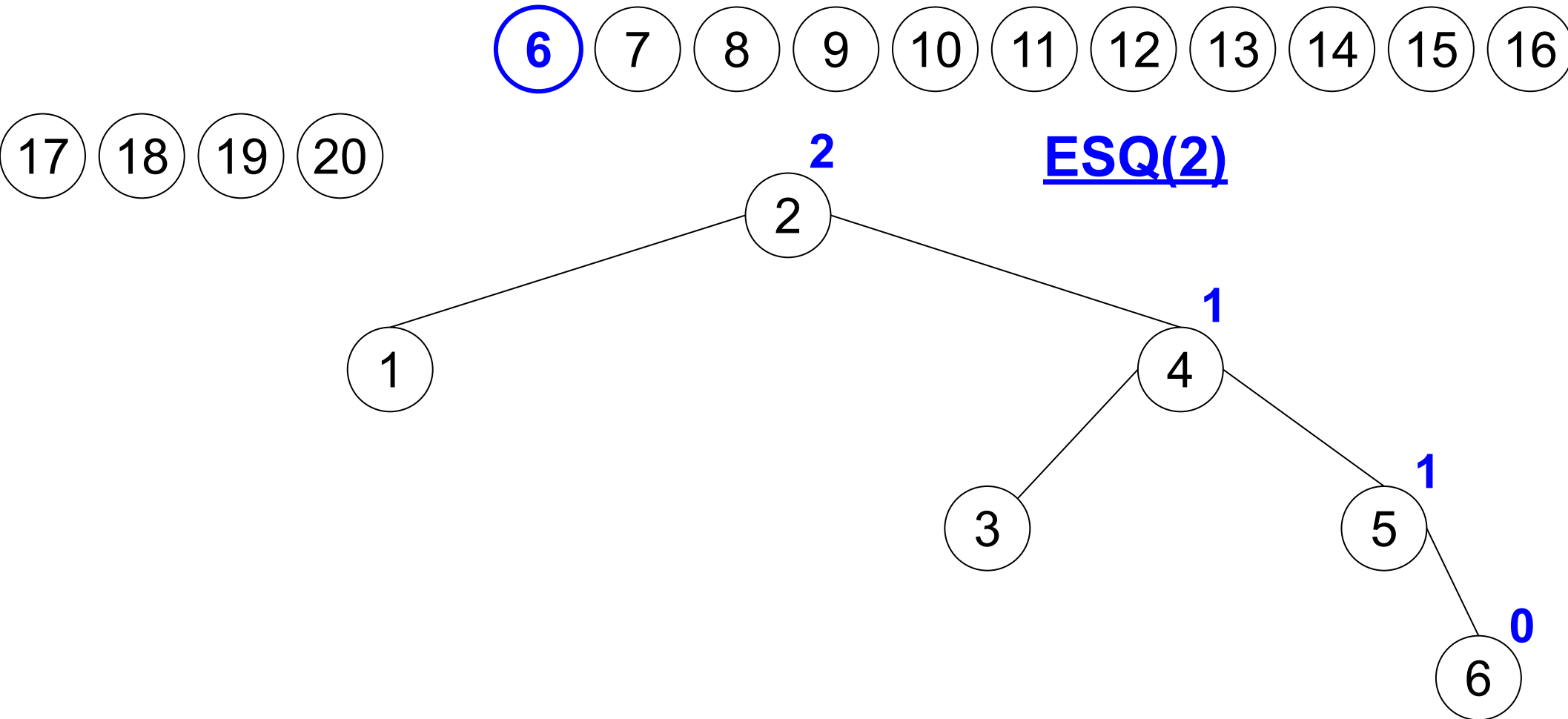
6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

17 18 19 20

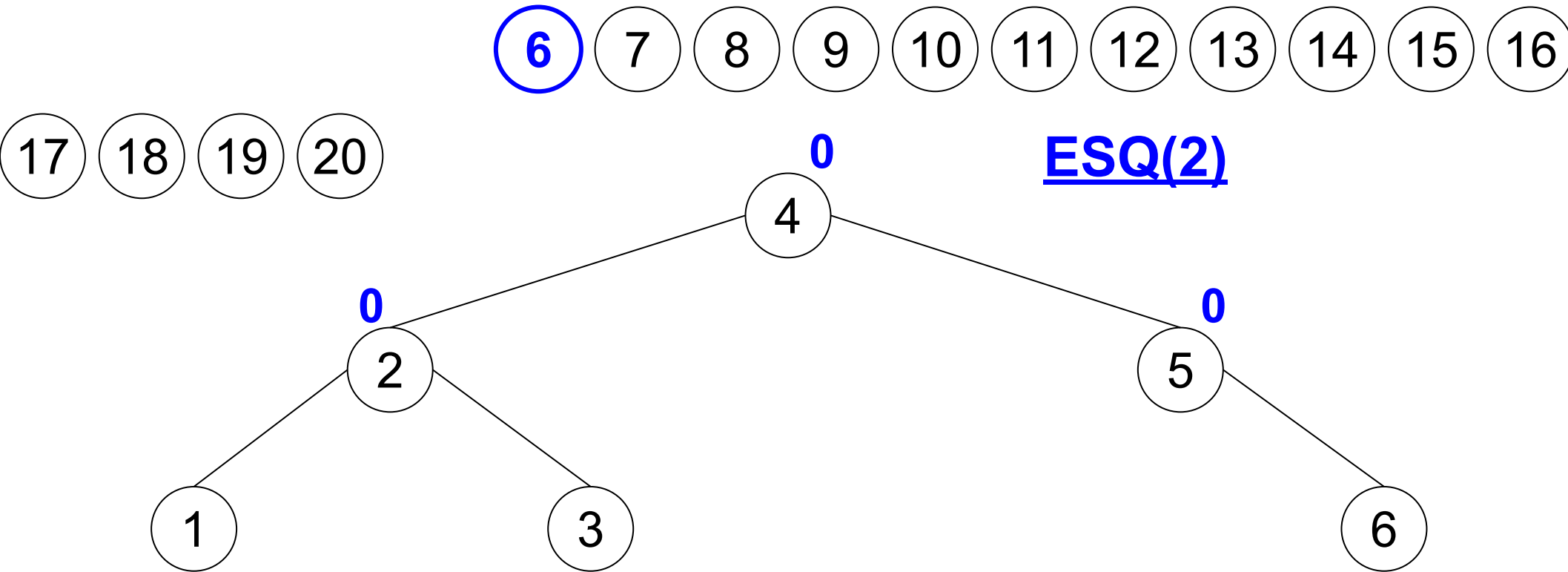
Inserir(6)



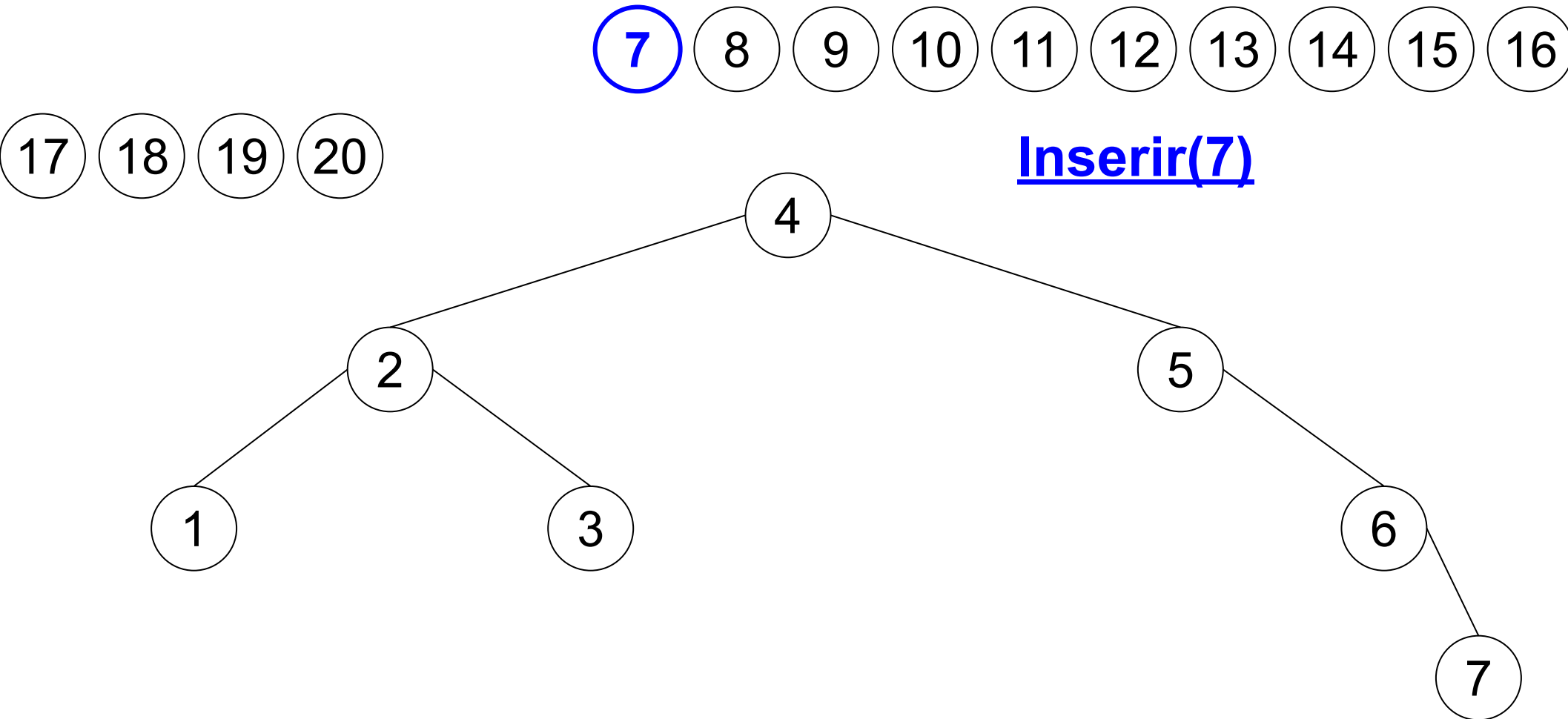
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



## Inserir os Números 1 à 20 na AVL

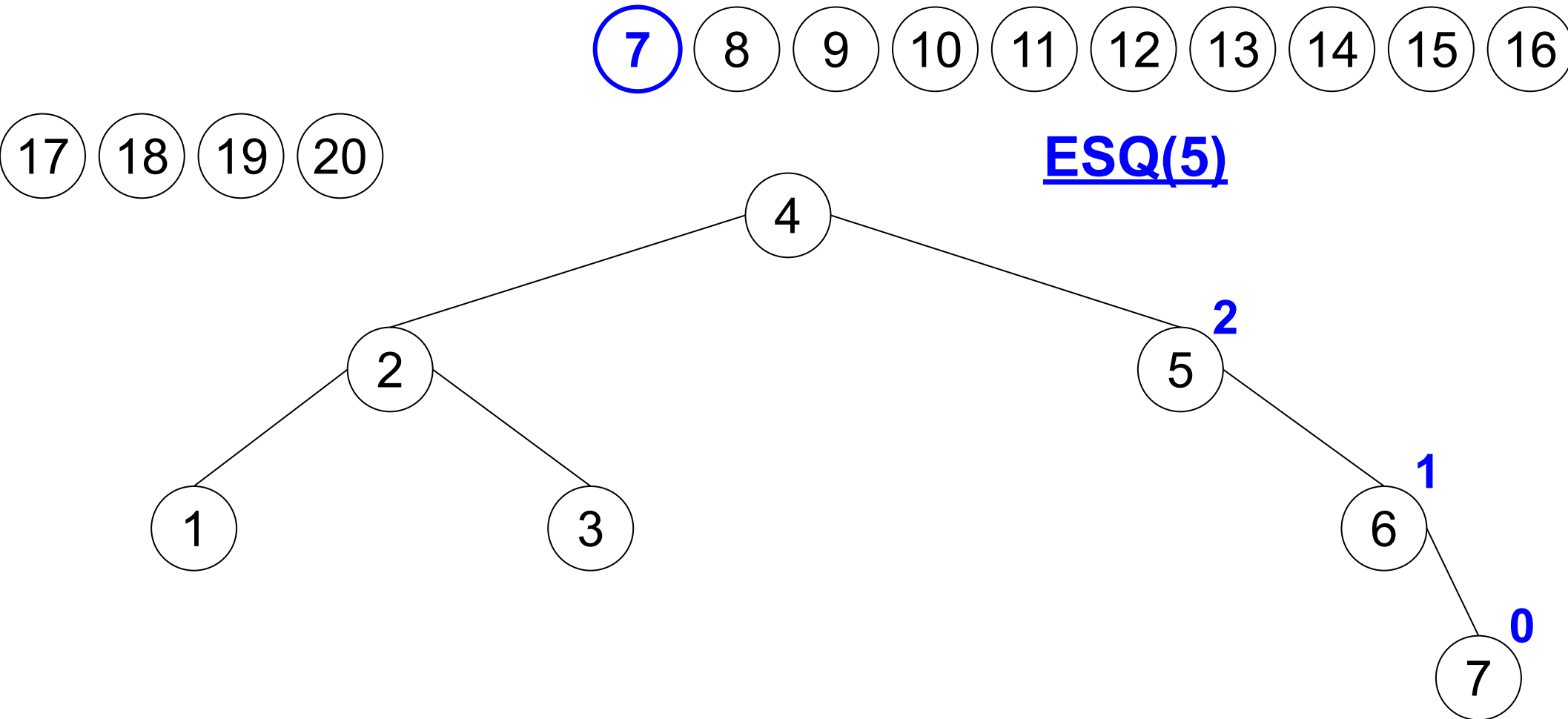


## Inserir os Números 1 à 20 na AVL

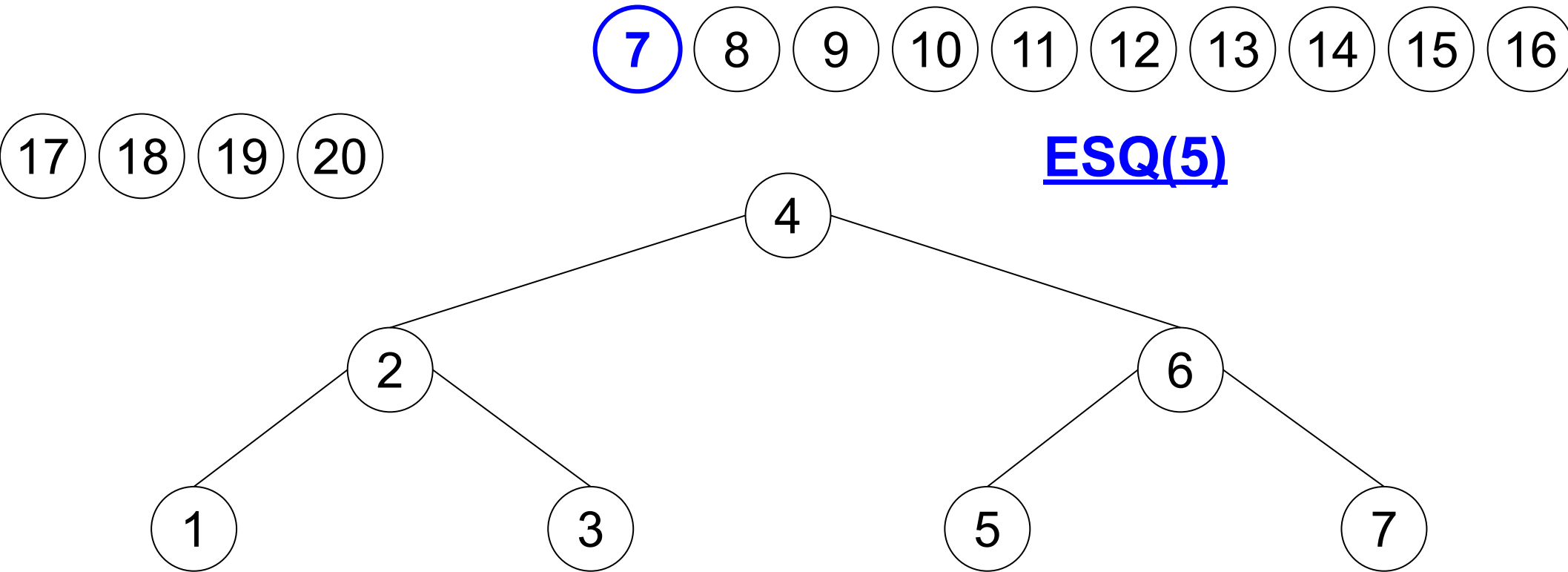




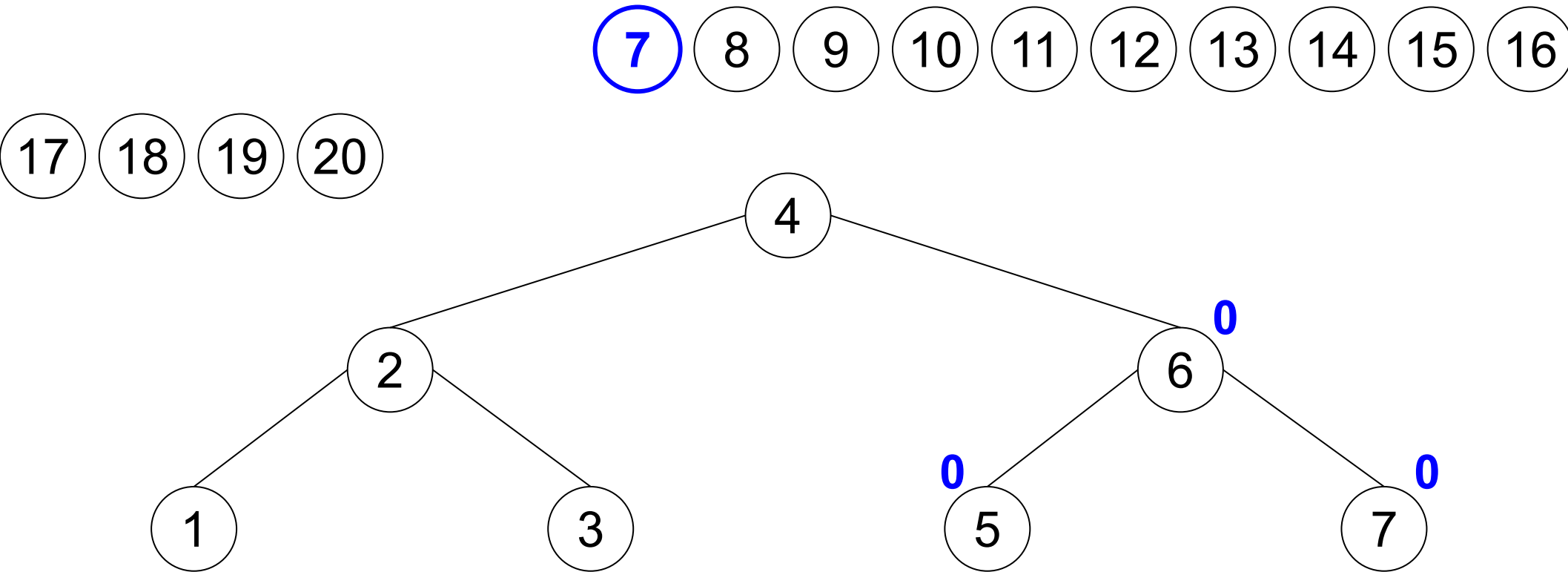
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



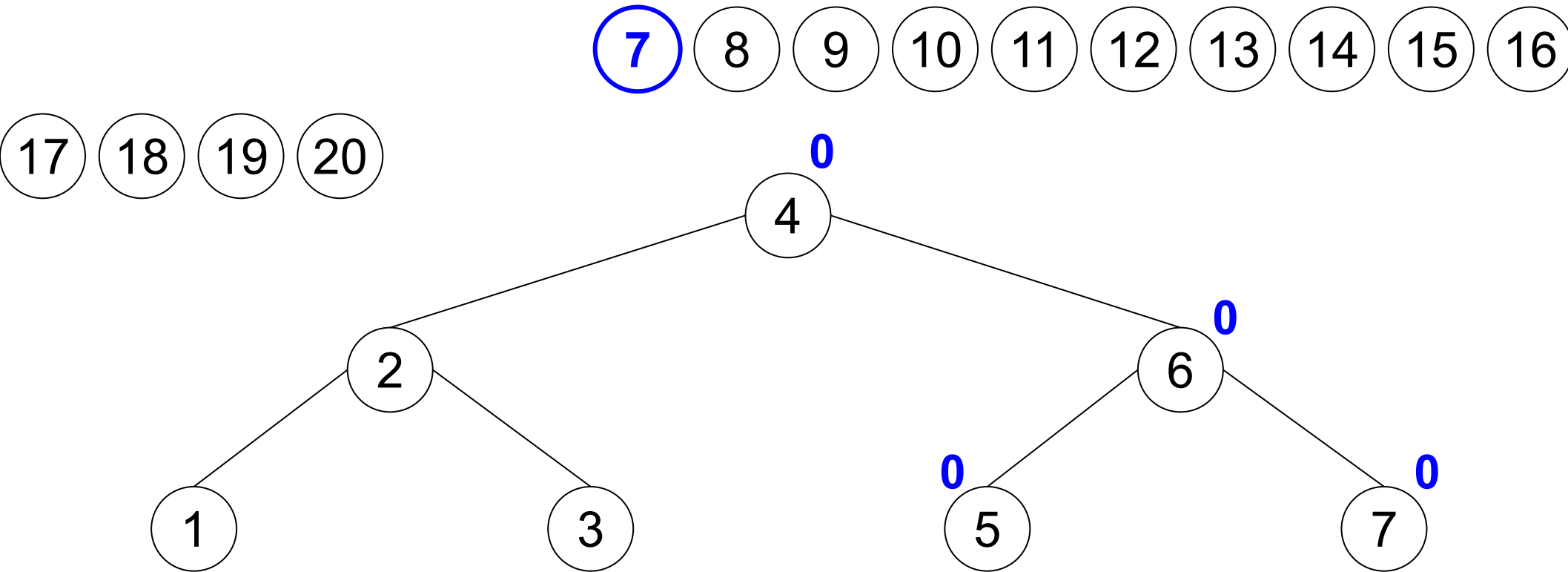
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



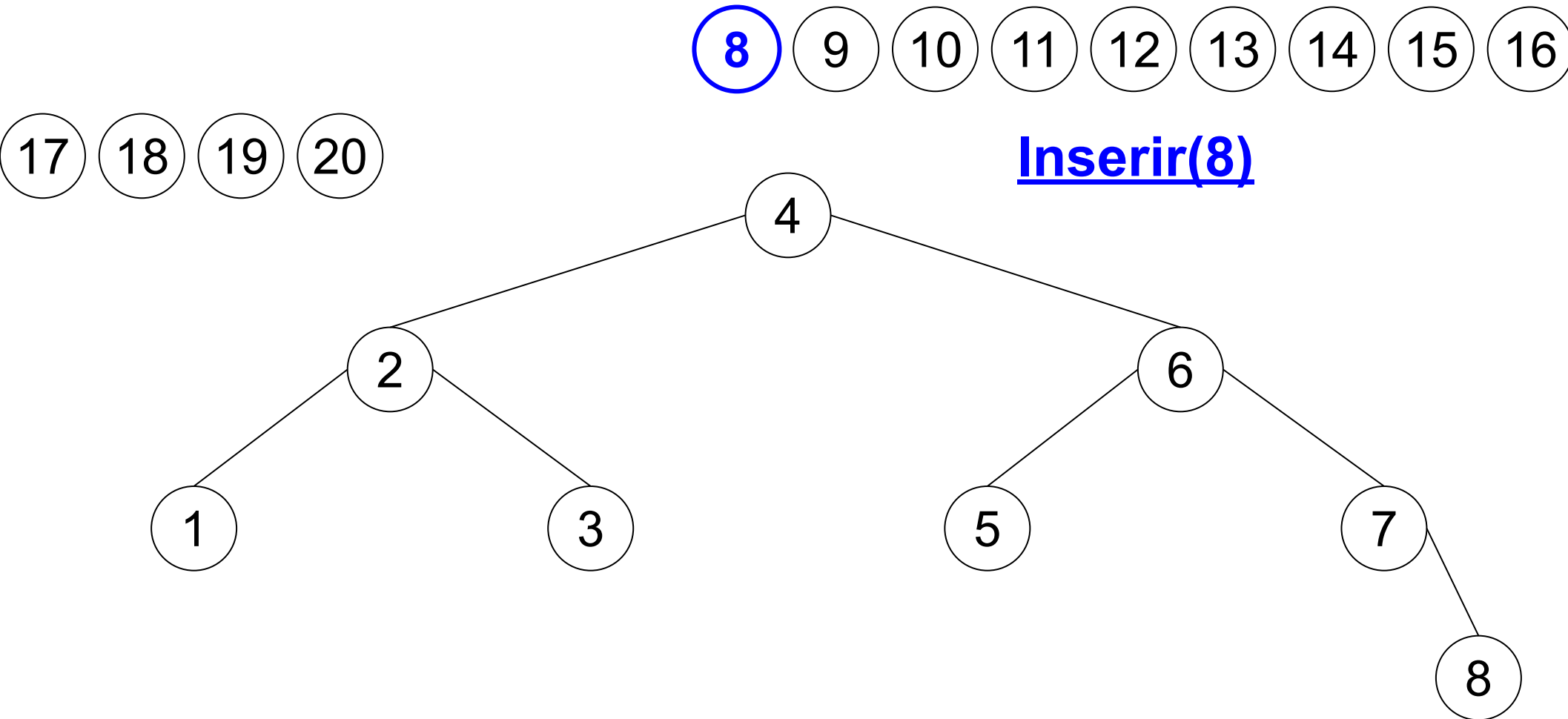
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



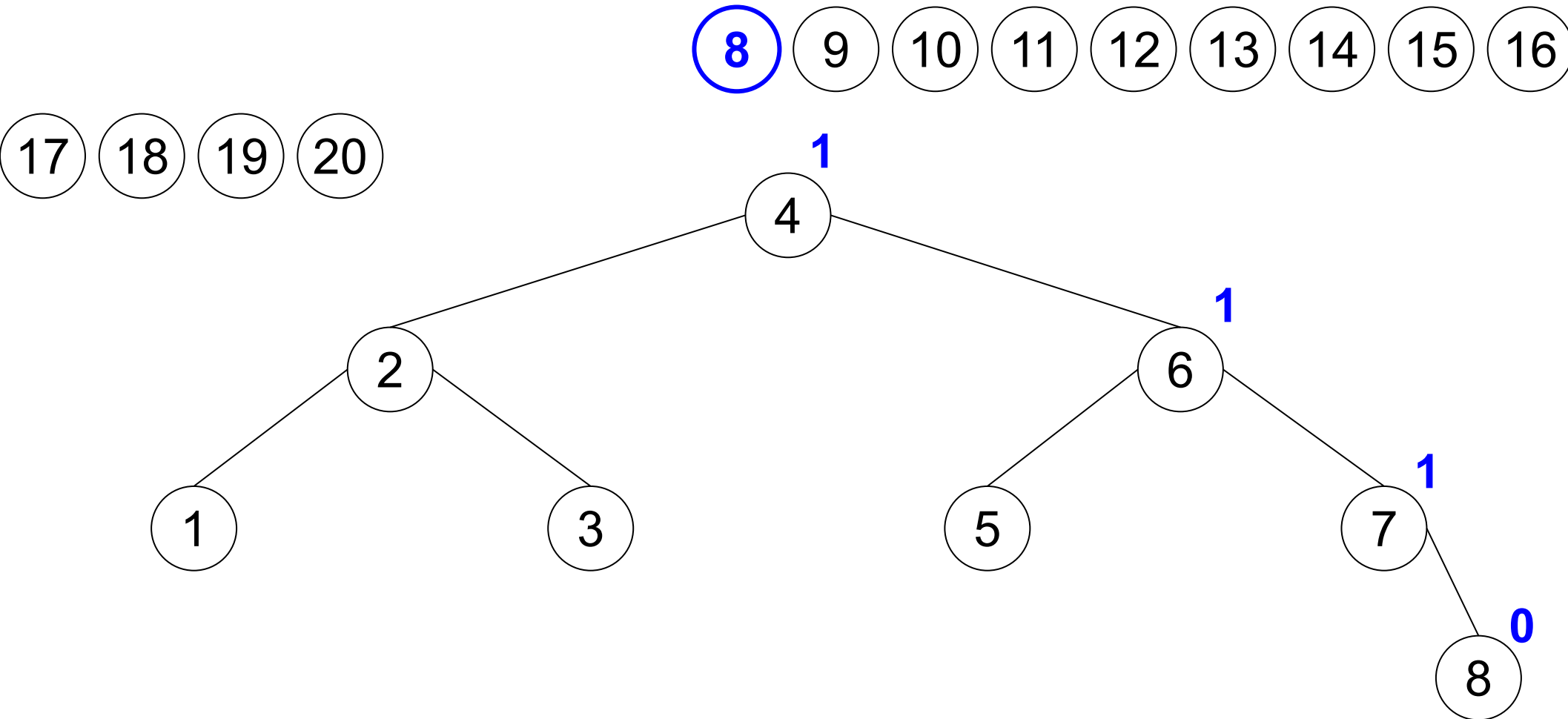
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



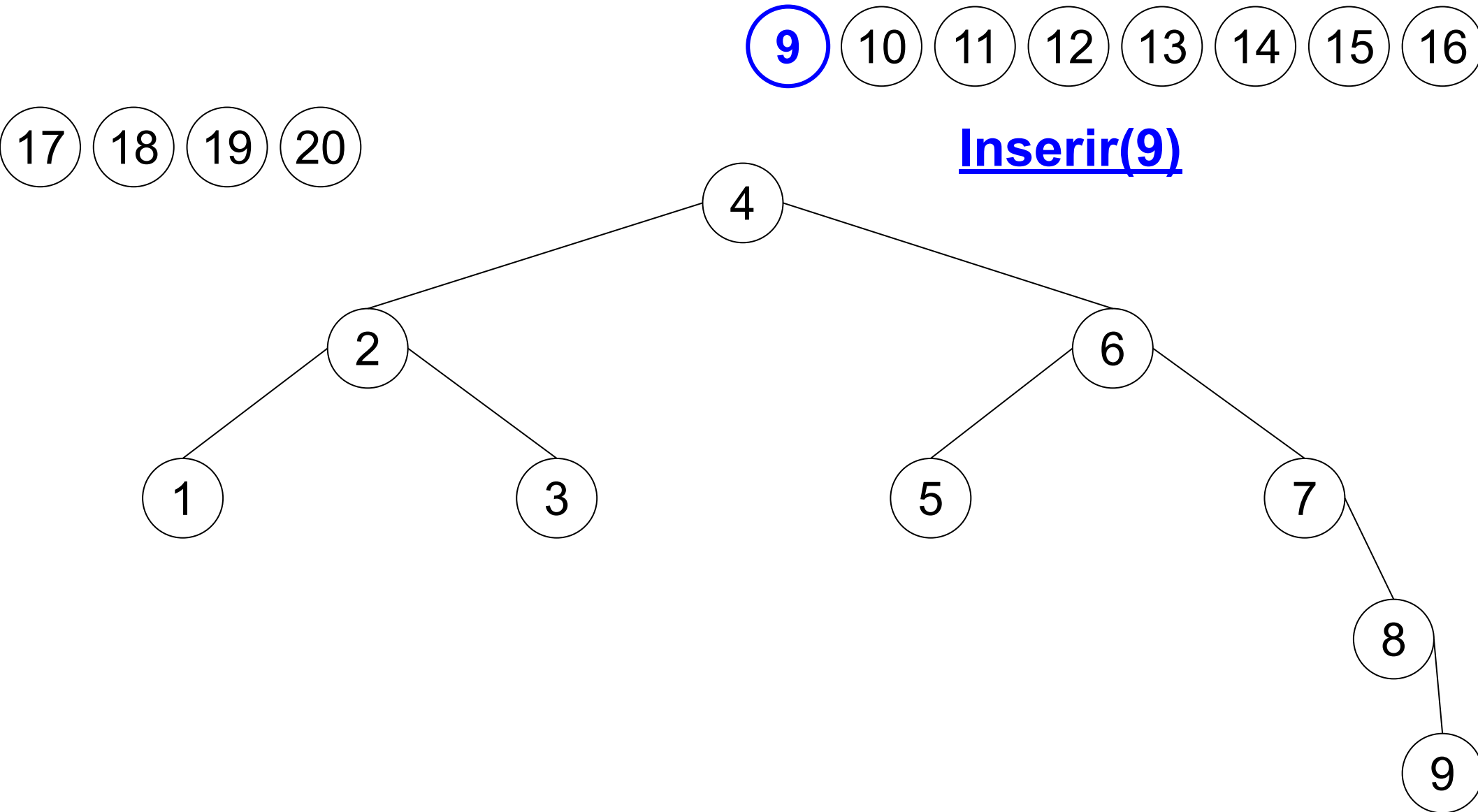
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



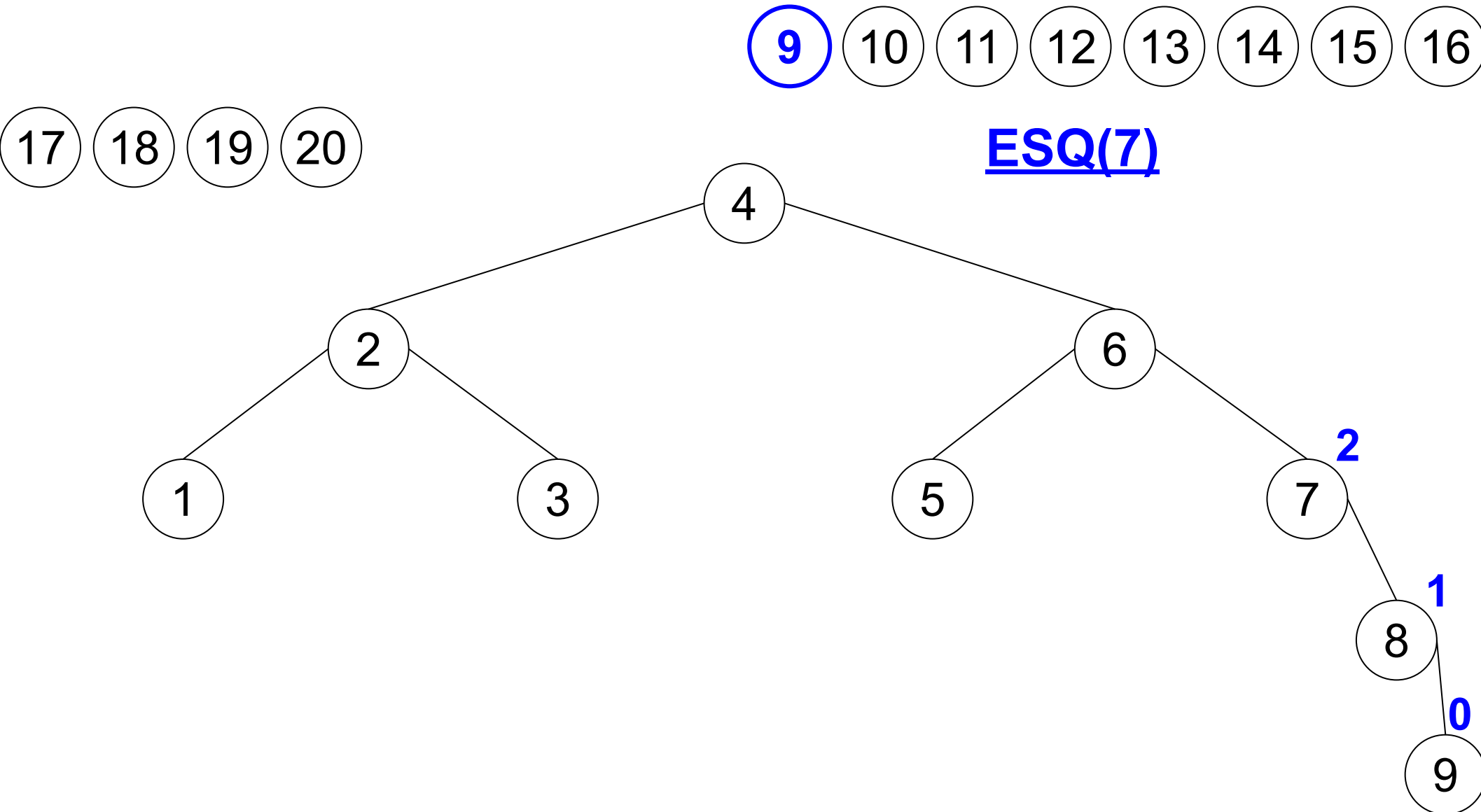
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



## Inserir os Números 1 à 20 na AVL

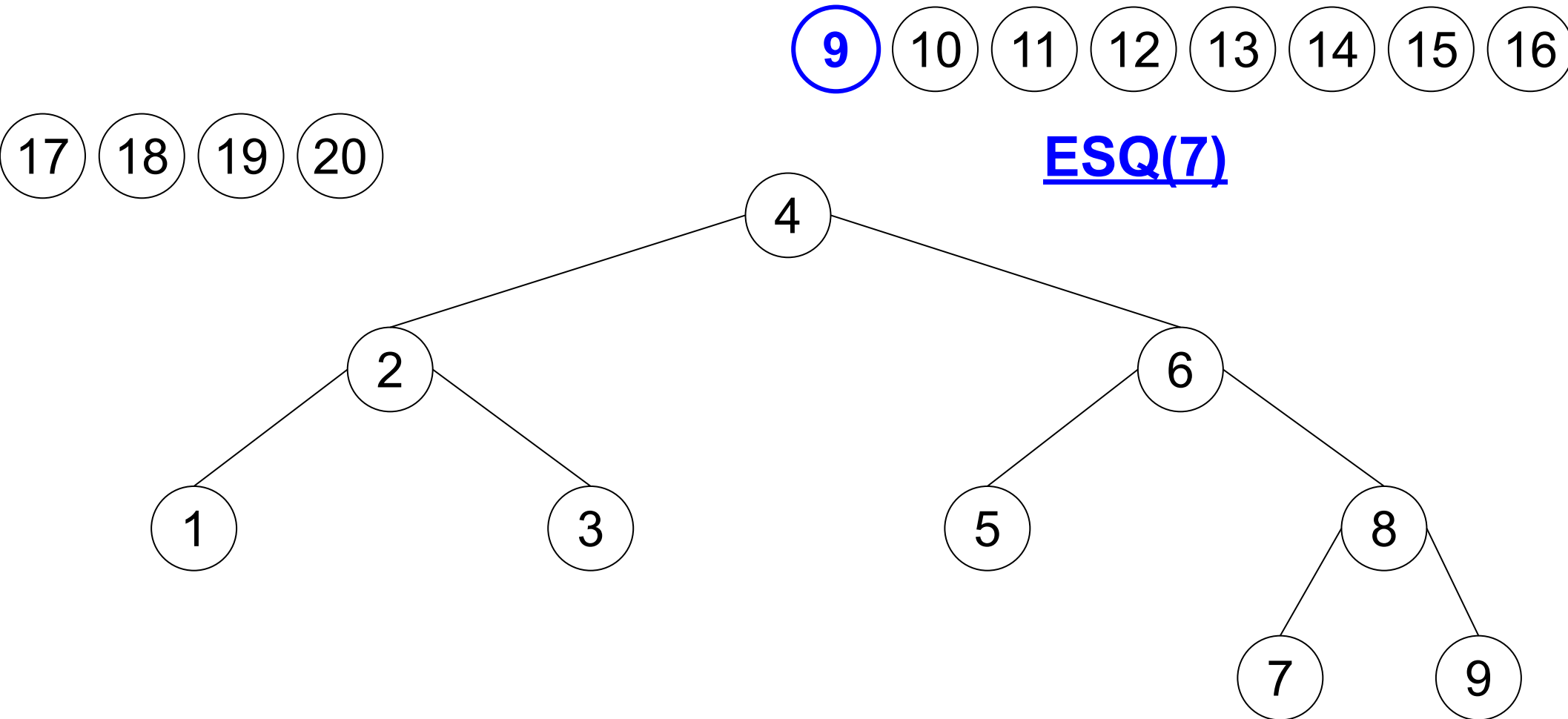


## Inserir os Números 1 à 20 na AVL

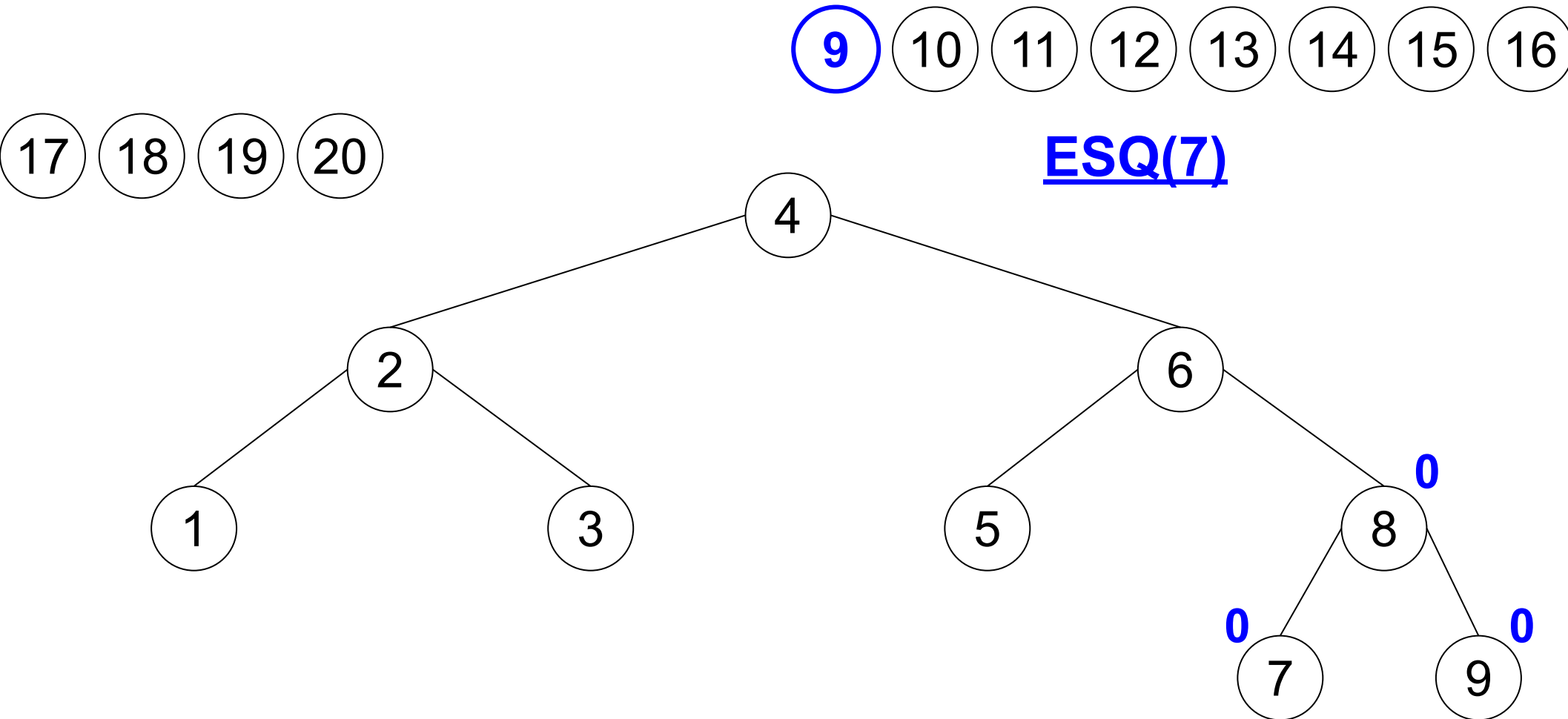




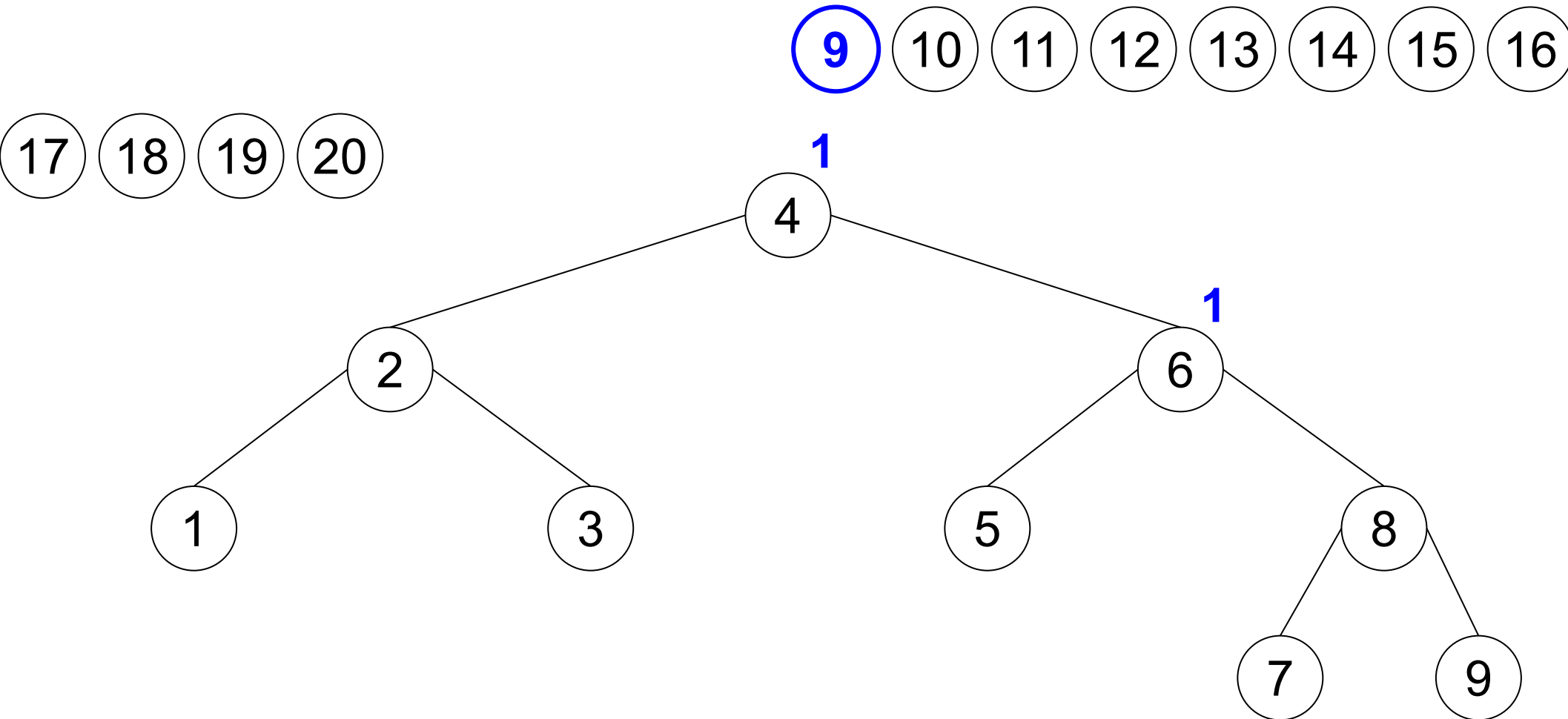
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



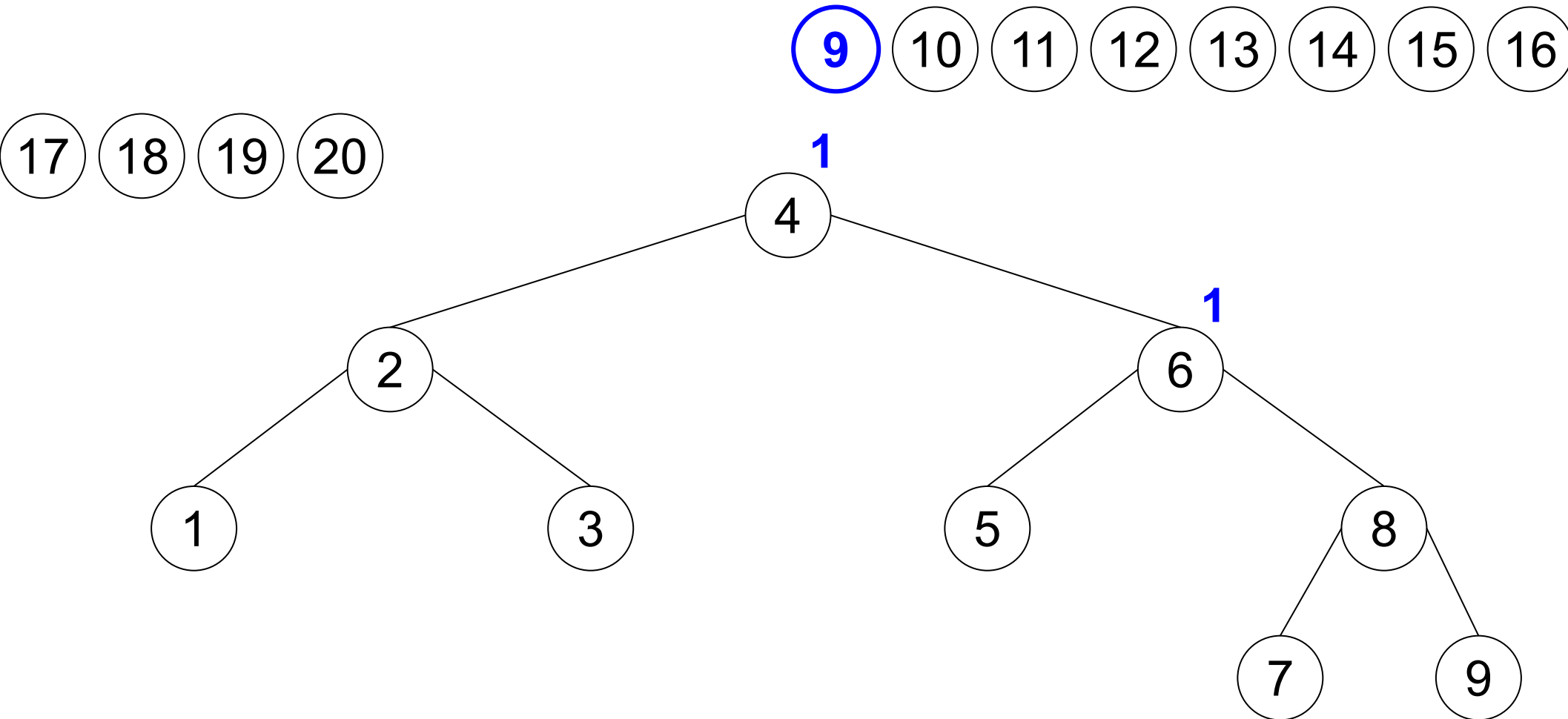
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



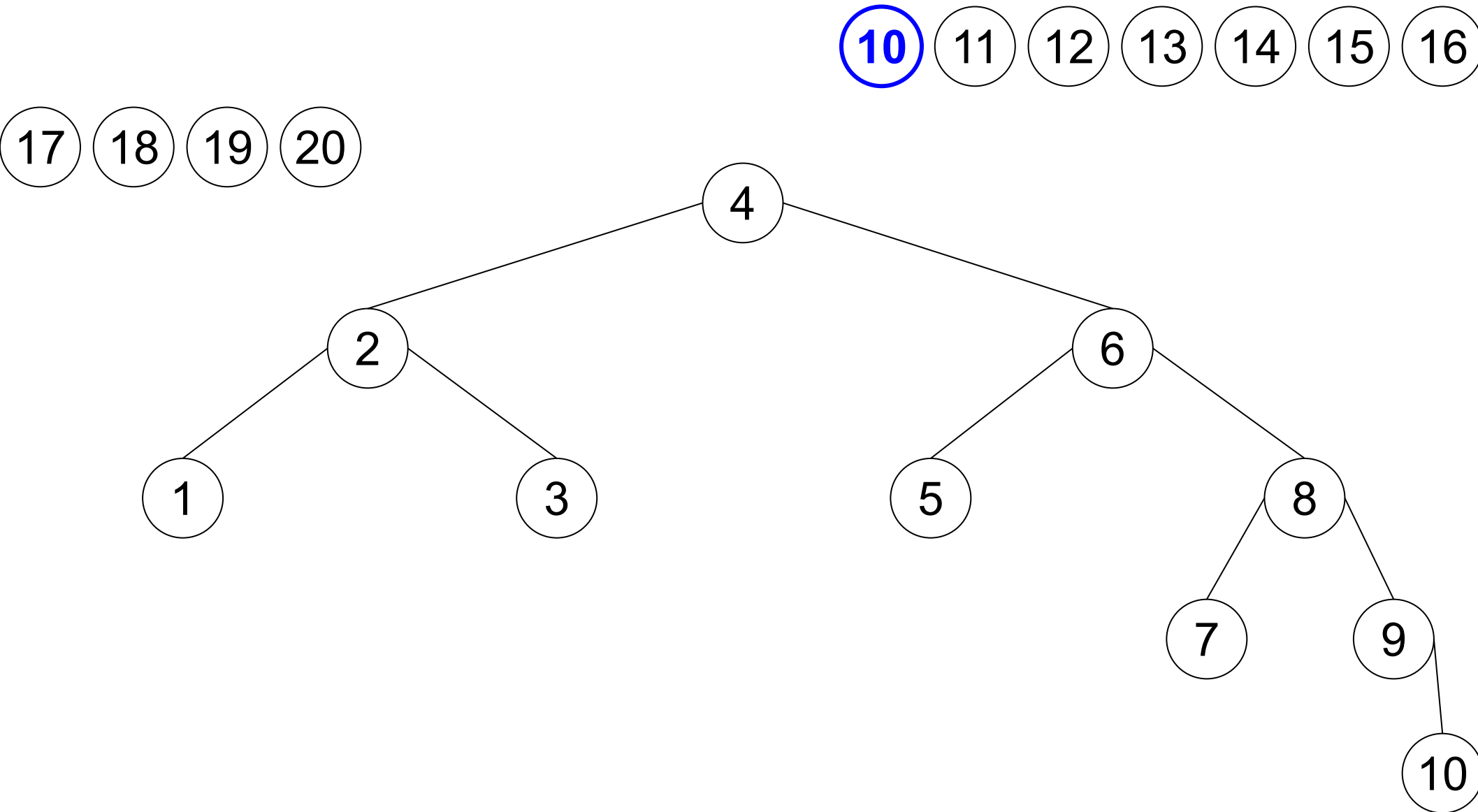
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



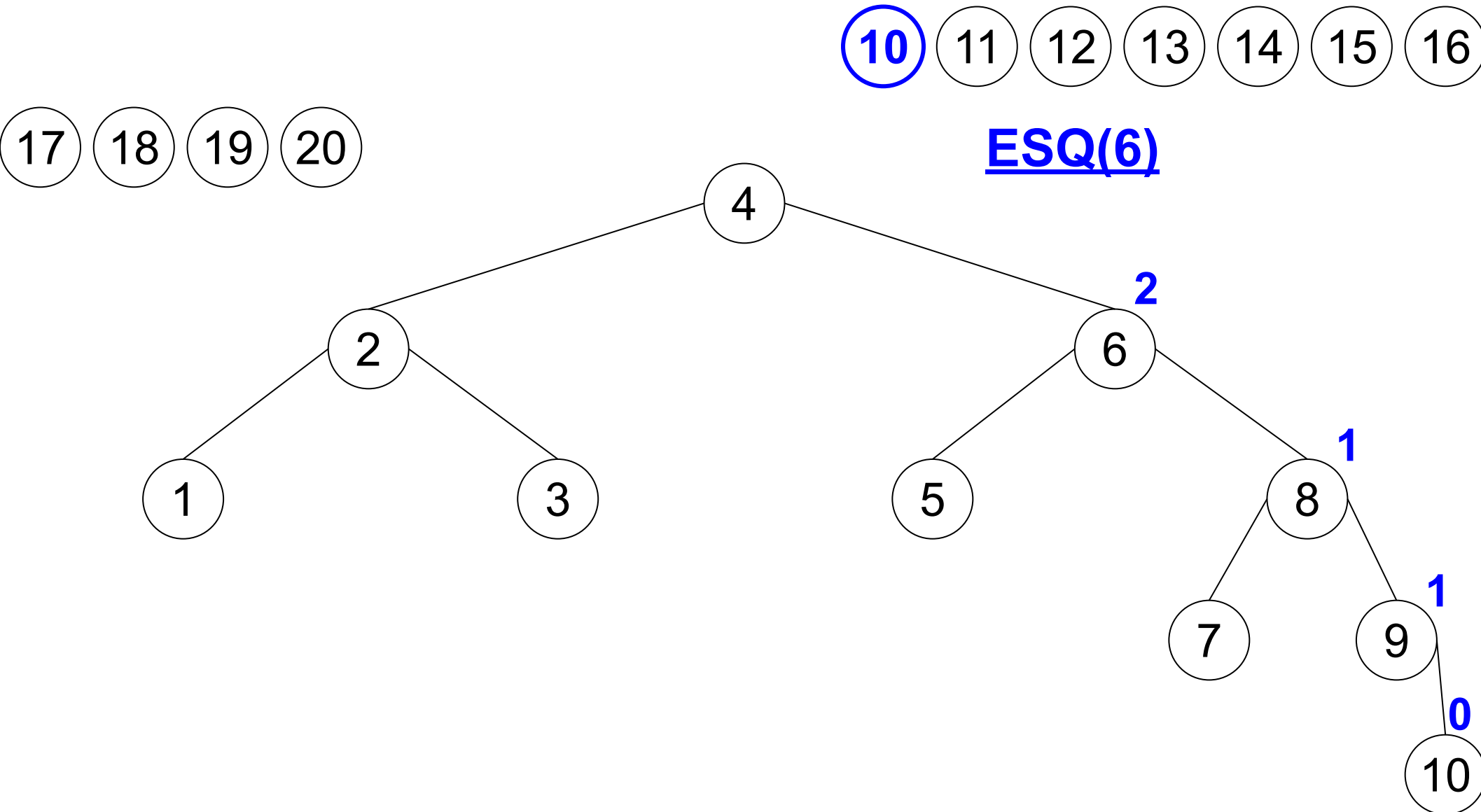
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



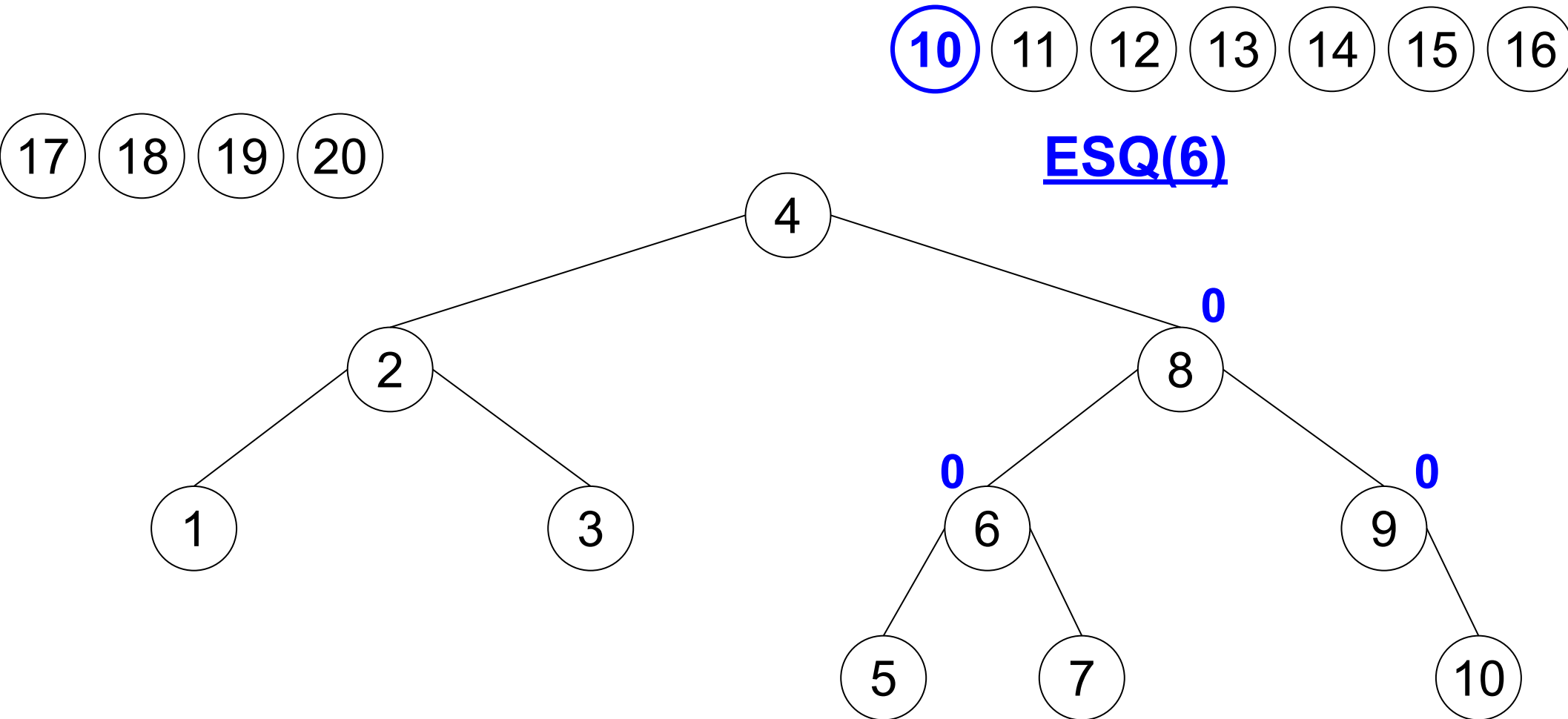
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



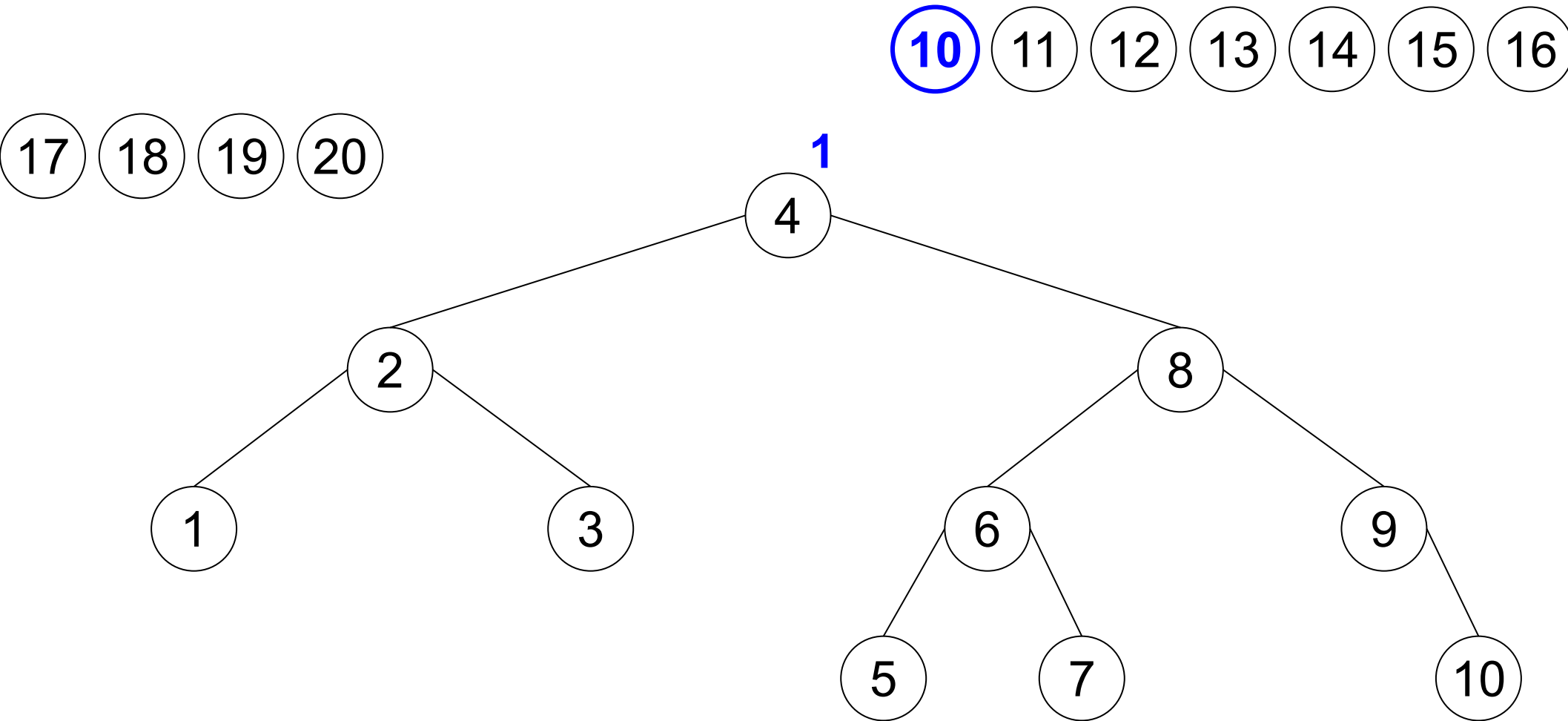
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



## Inserir os Números 1 à 20 na AVL

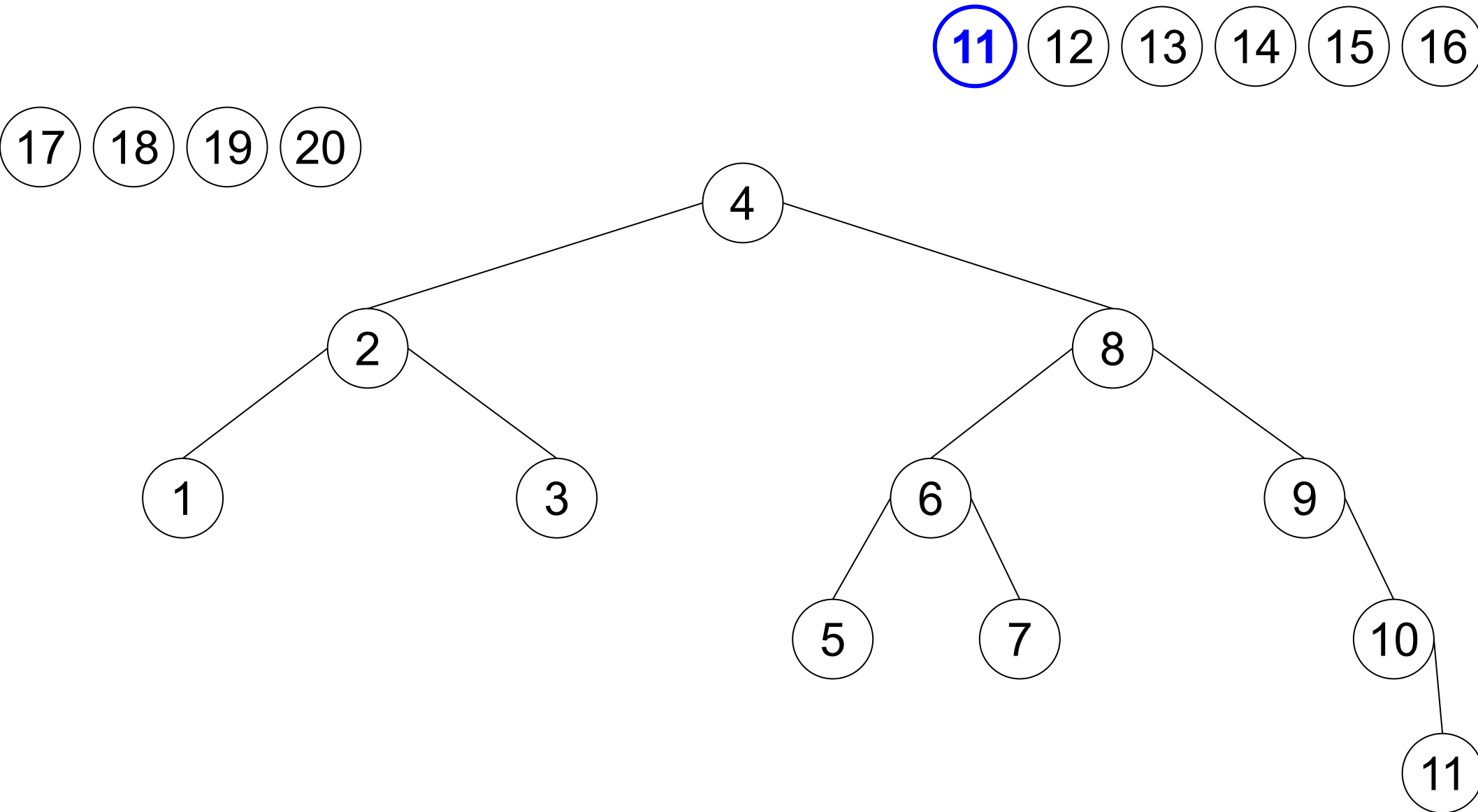


## Inserir os Números 1 à 20 na AVL

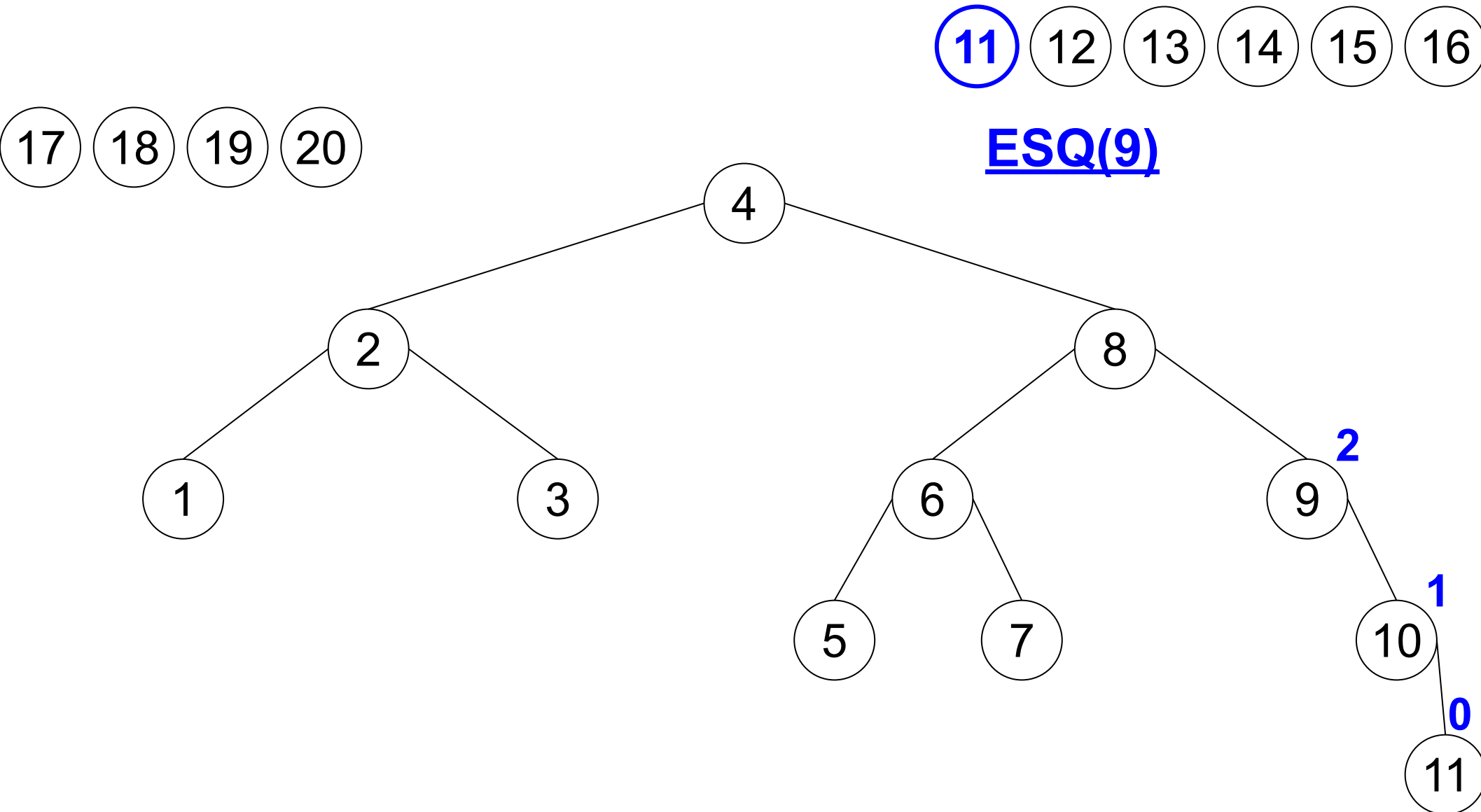




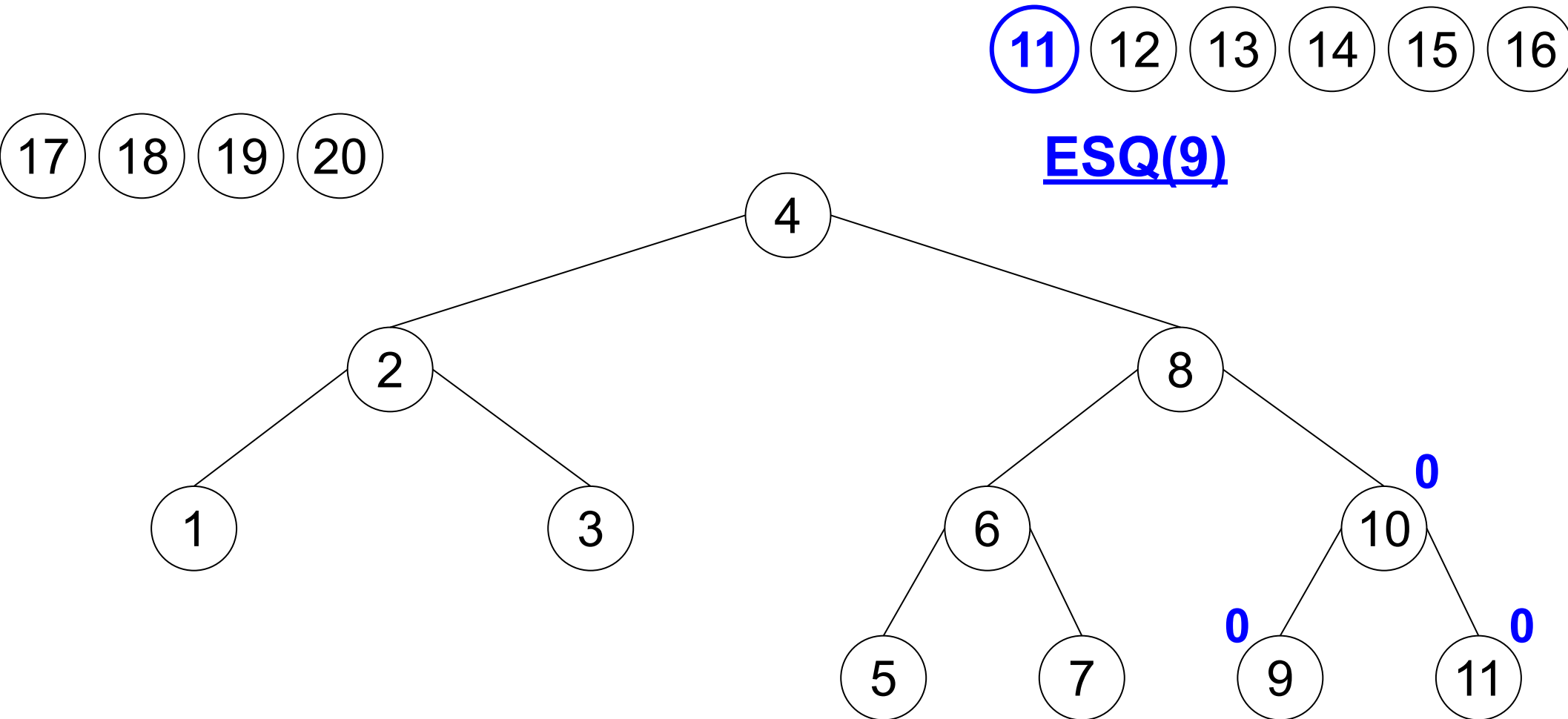
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



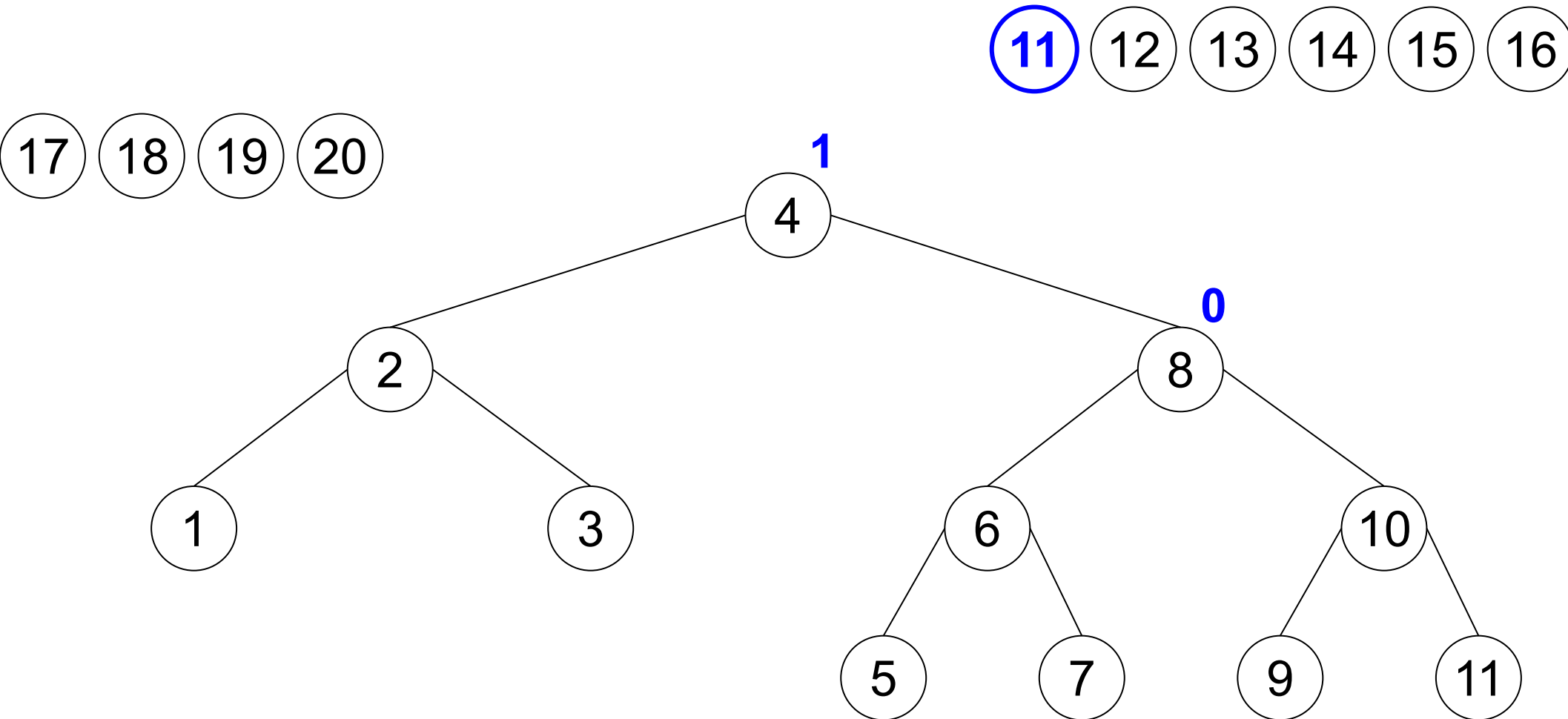
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



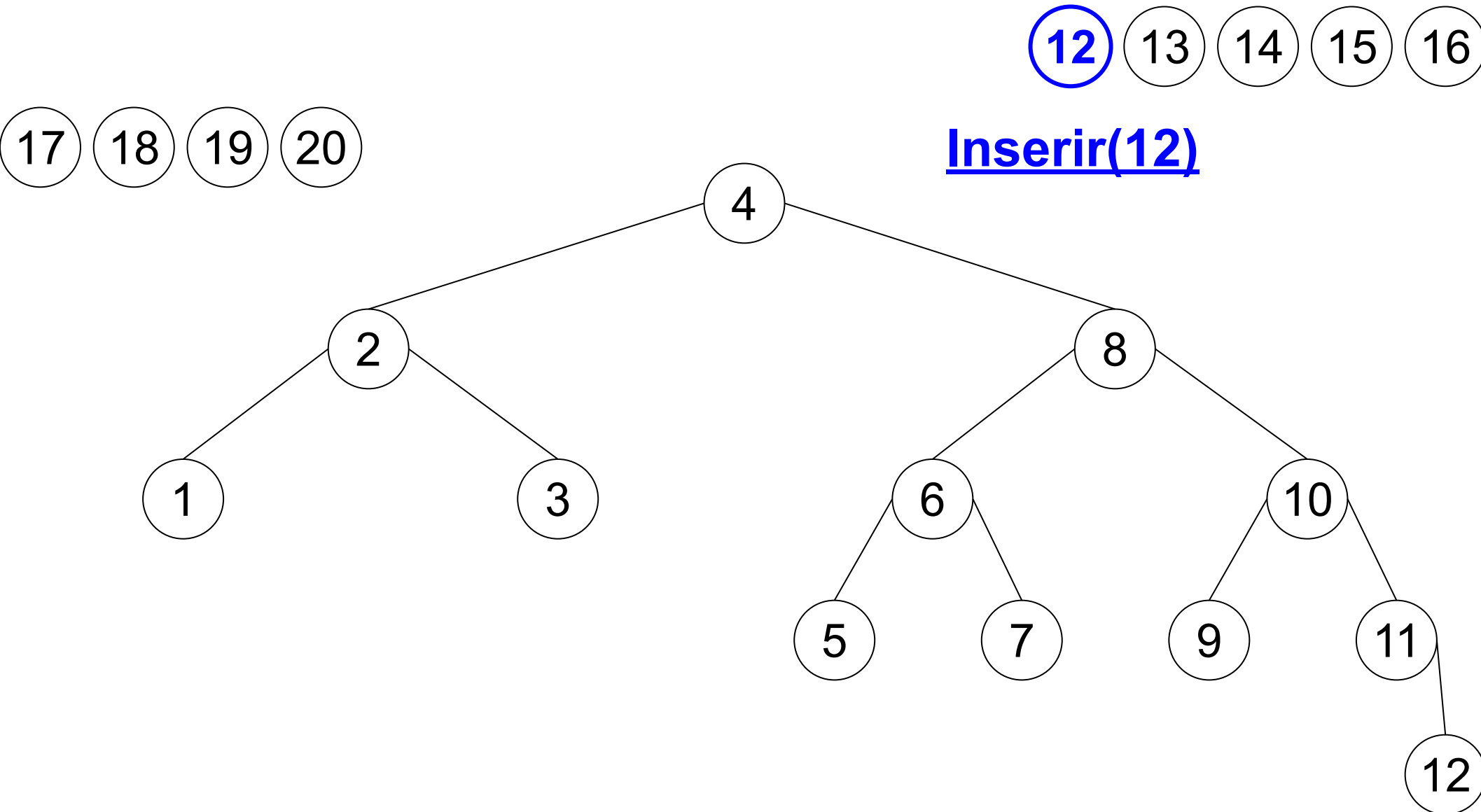
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



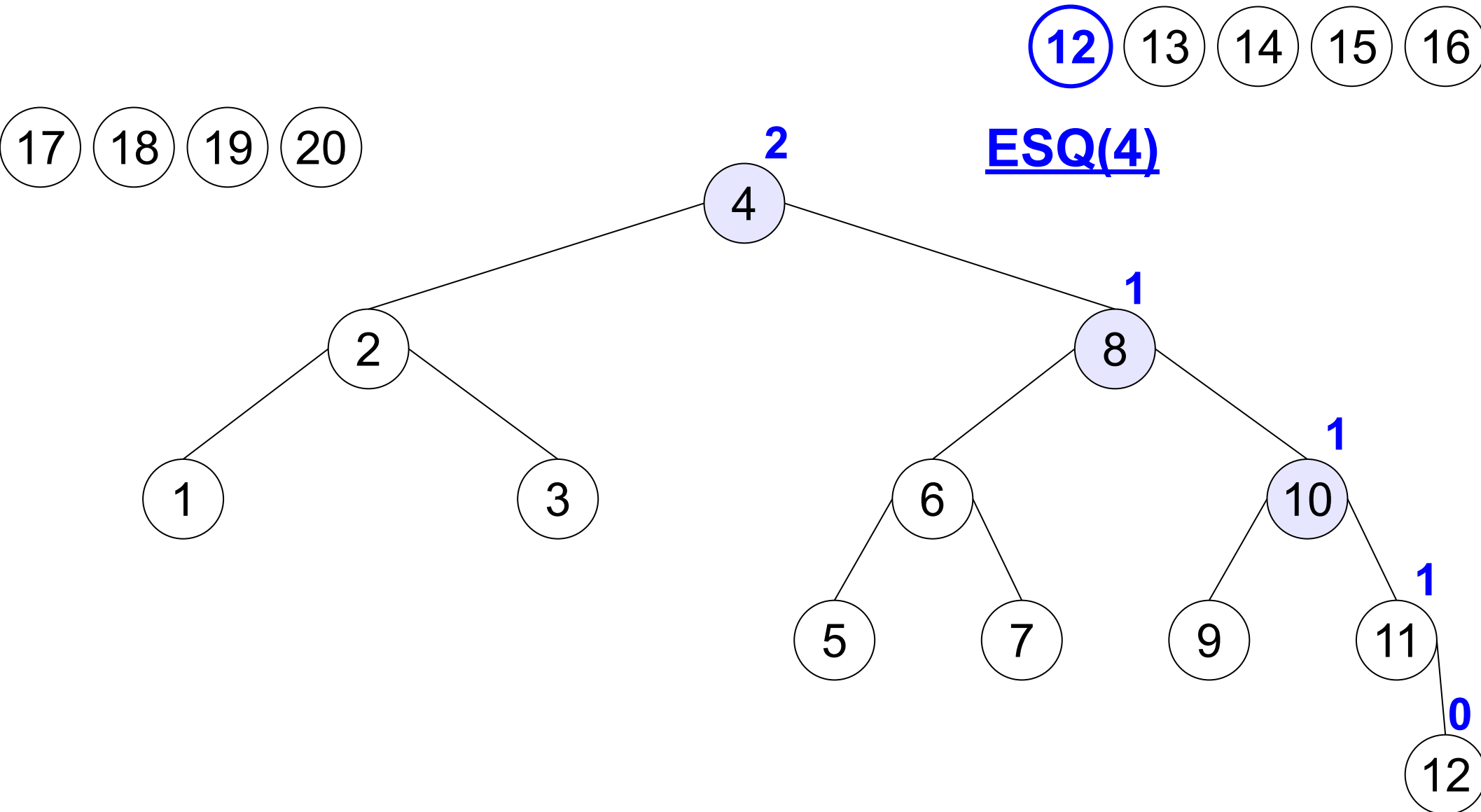
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



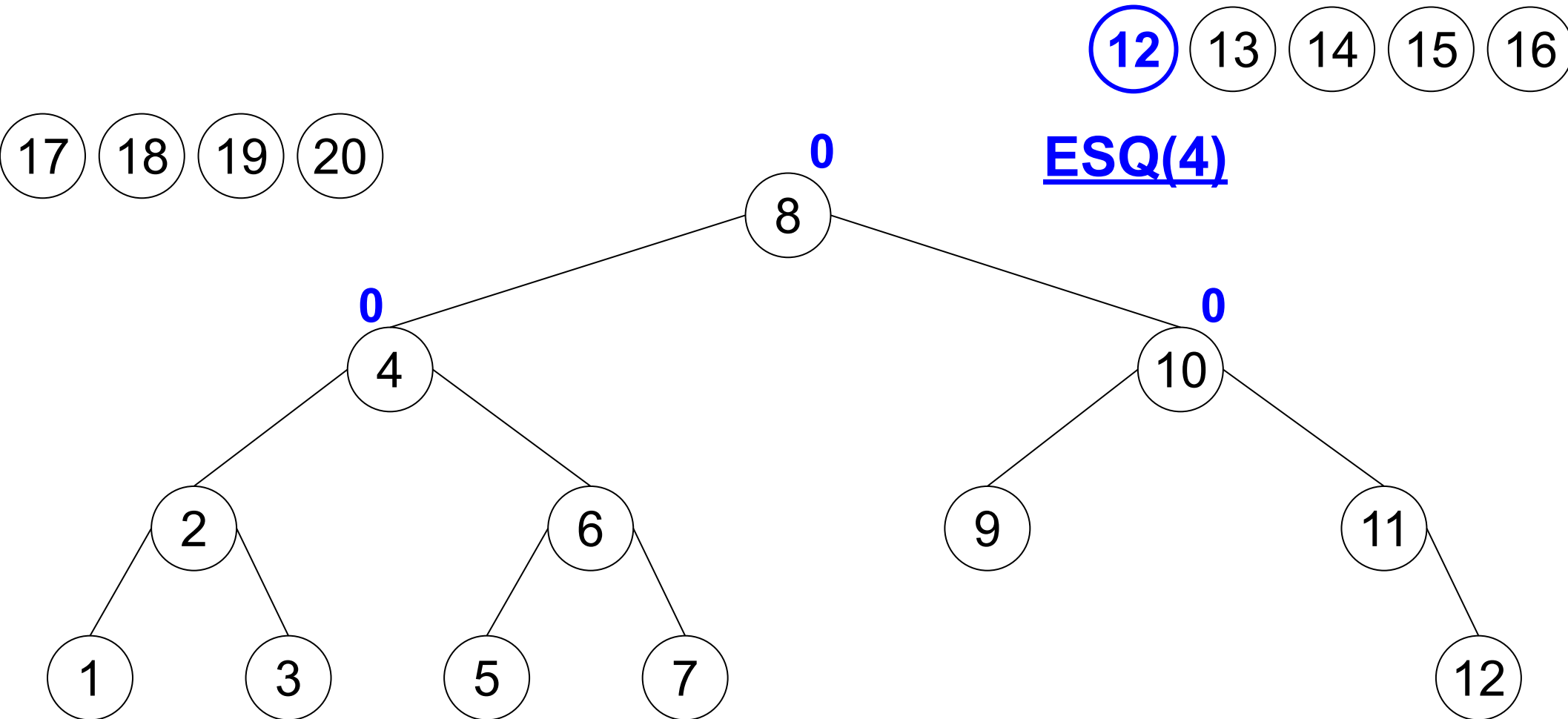
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



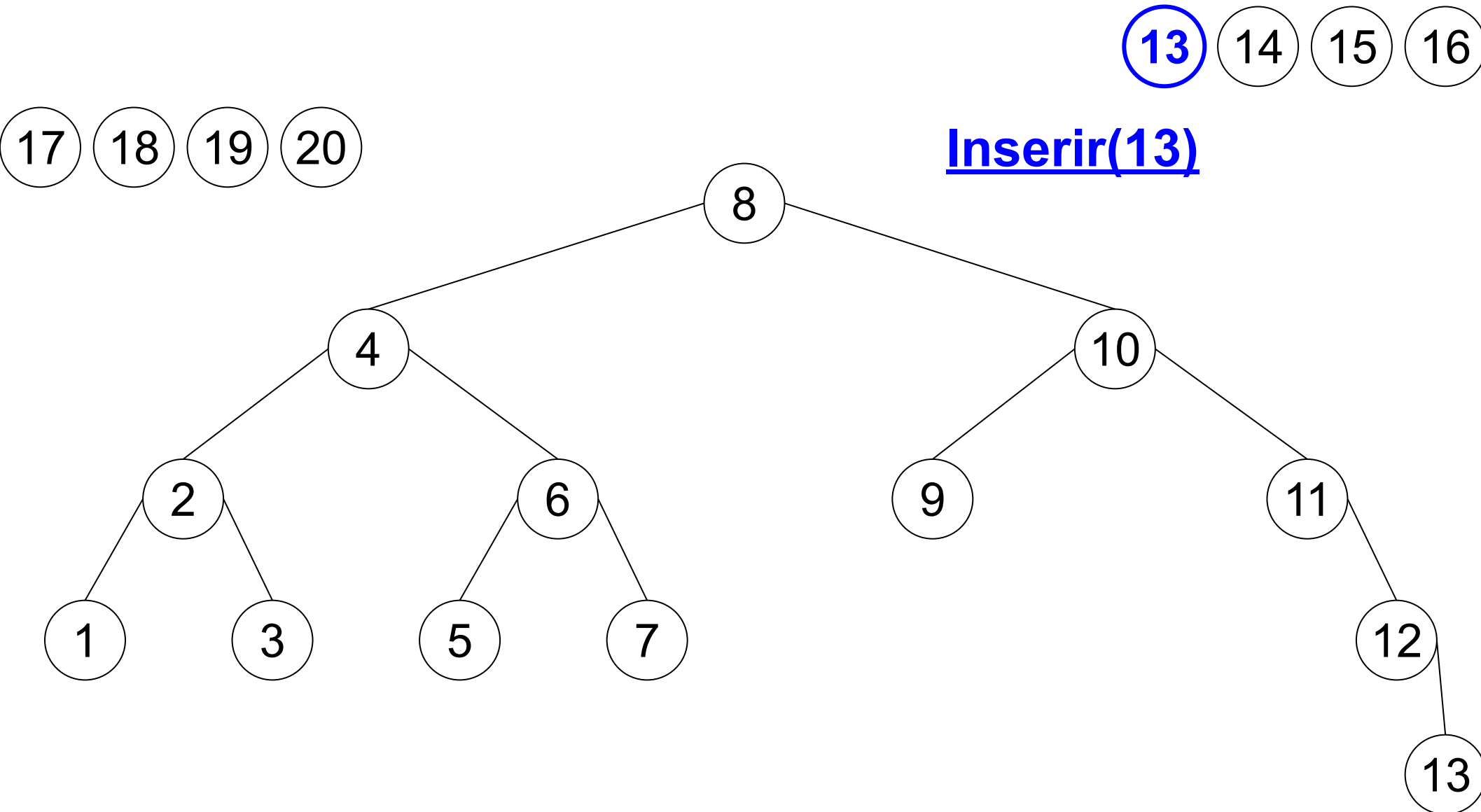
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



## Inserir os Números 1 à 20 na AVL

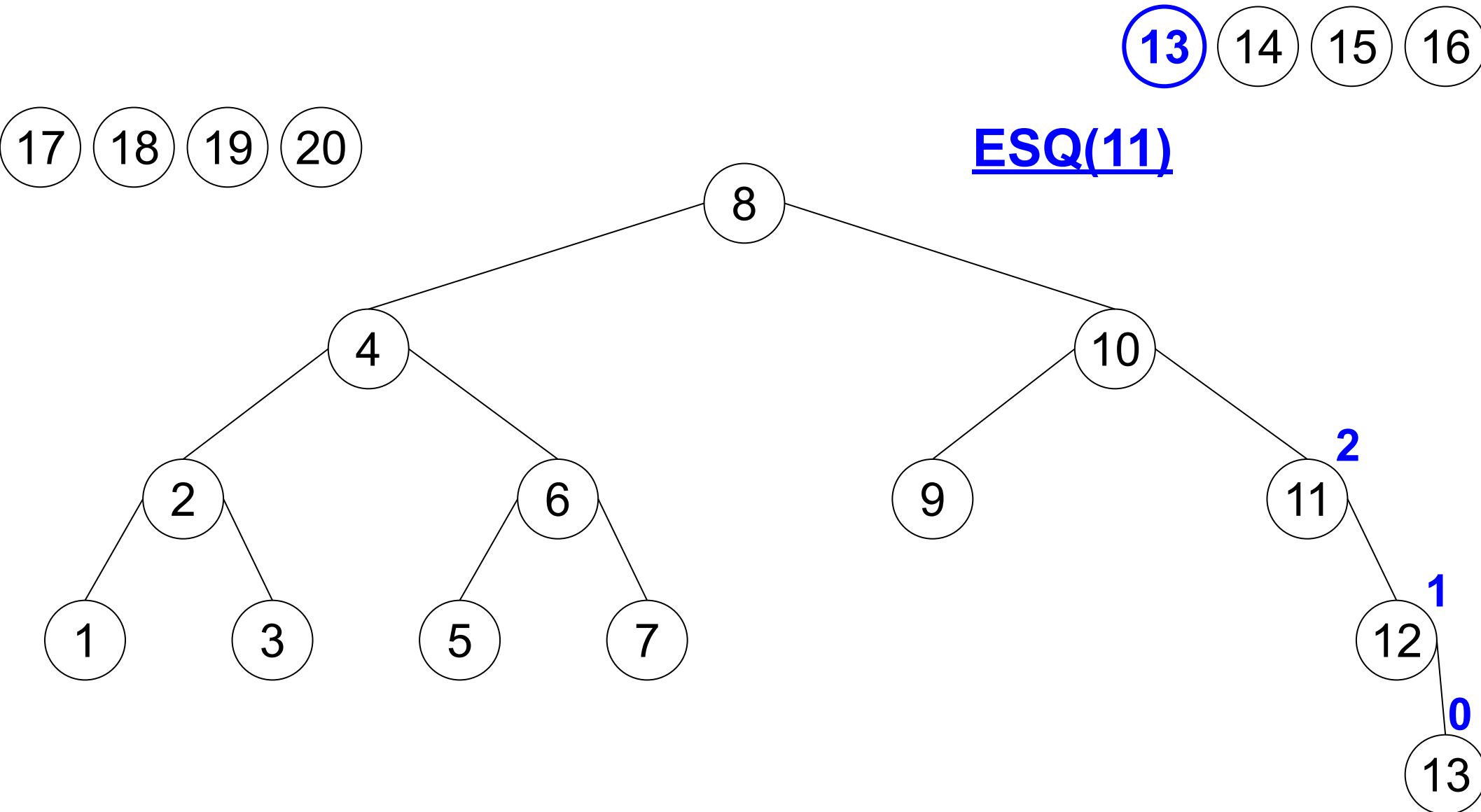


## Inserir os Números 1 à 20 na AVL

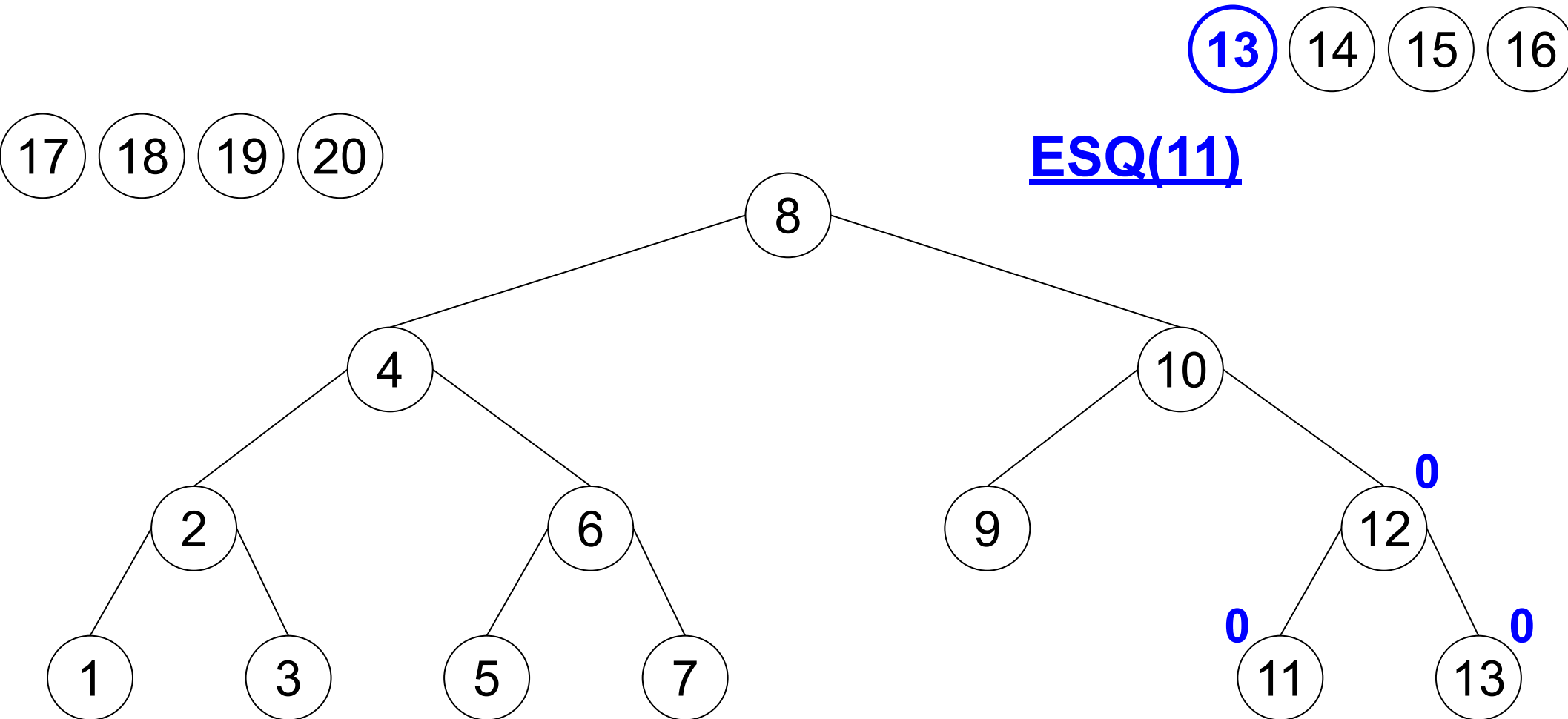




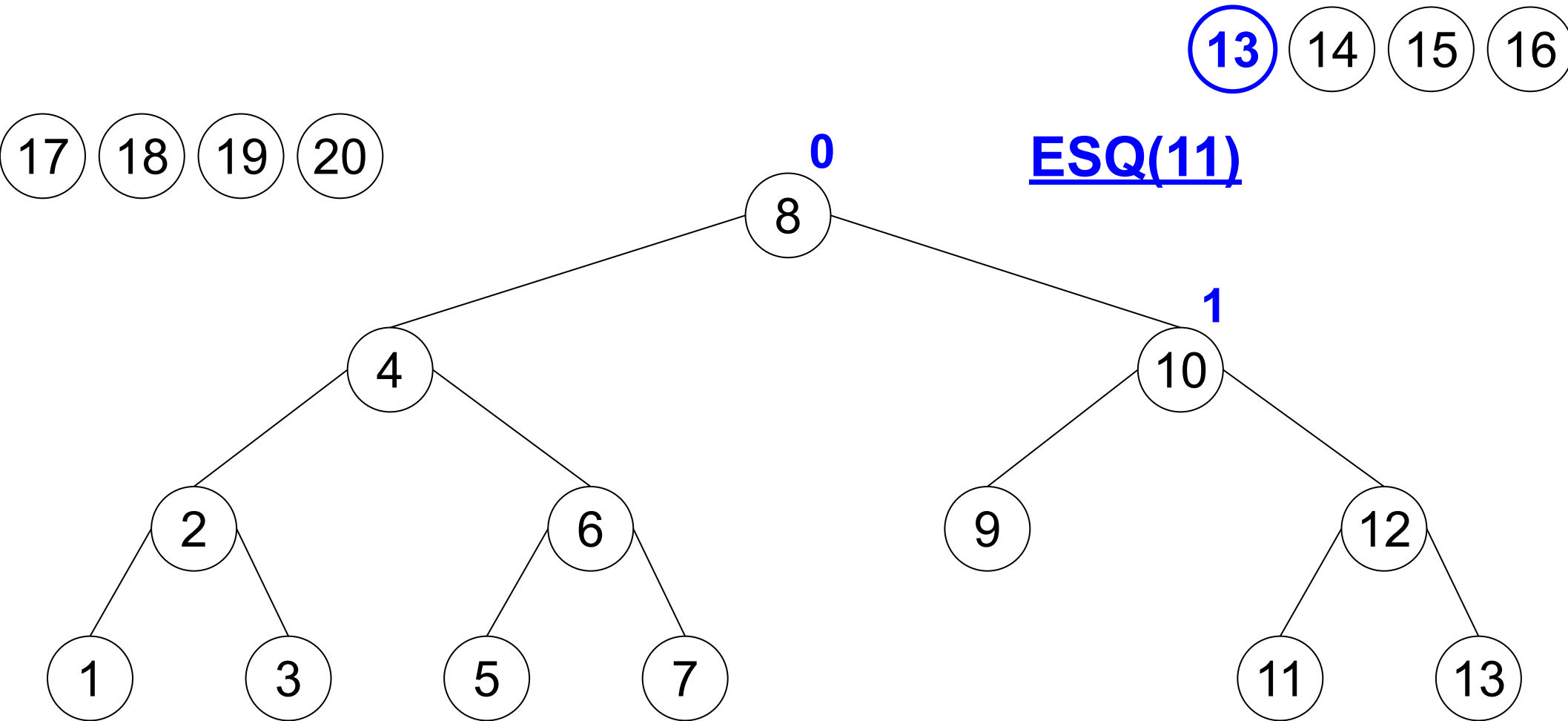
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



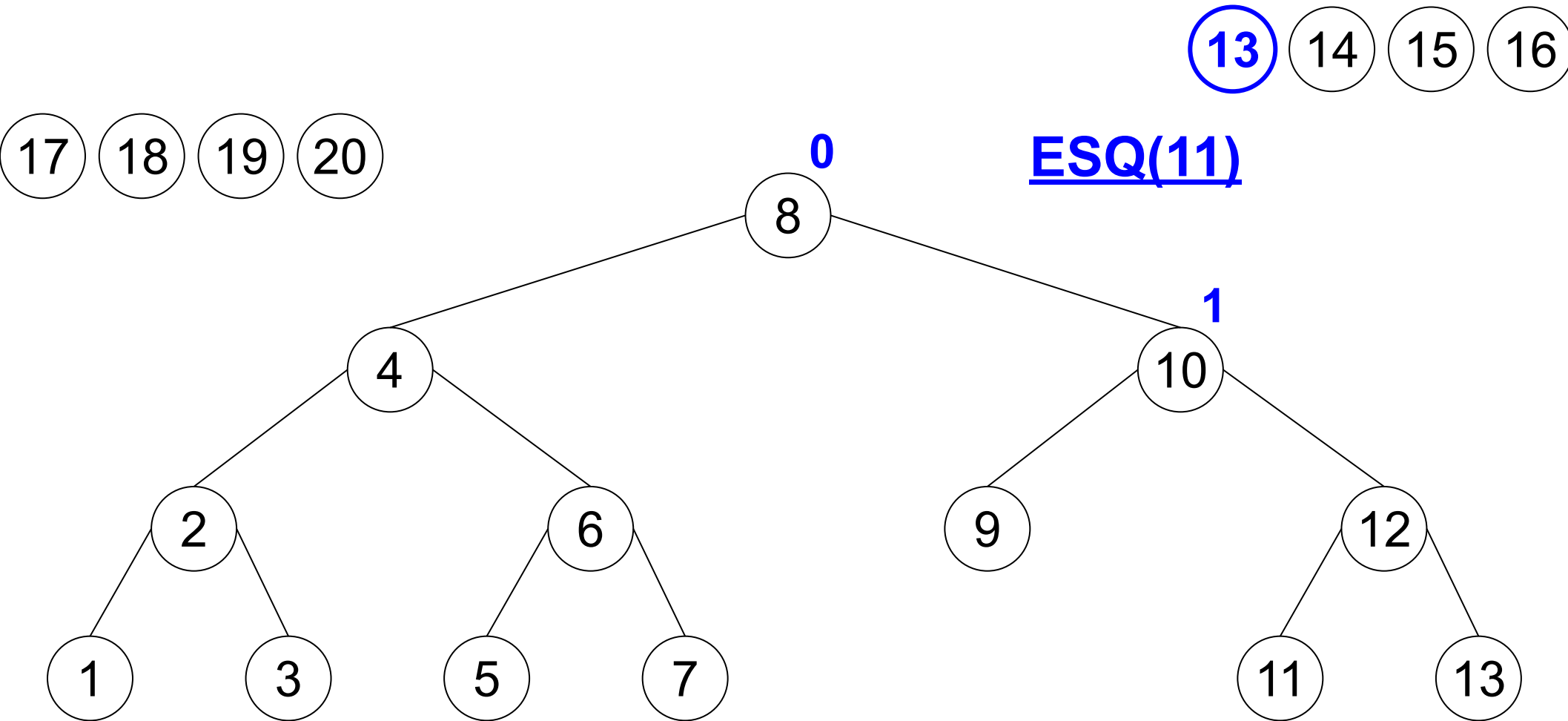
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



## Inserir os Números 1 à 20 na AVL

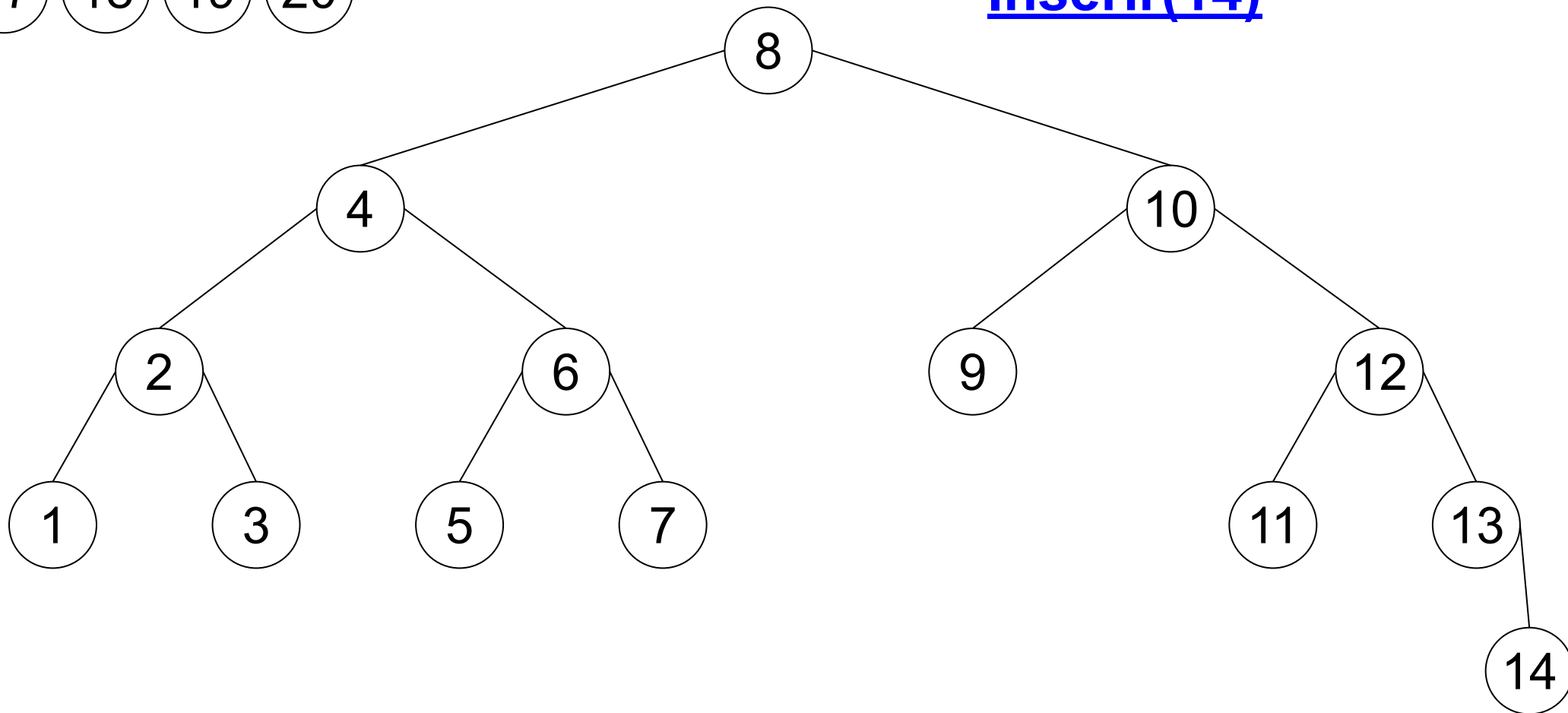


## Inserir os Números 1 à 20 na AVL

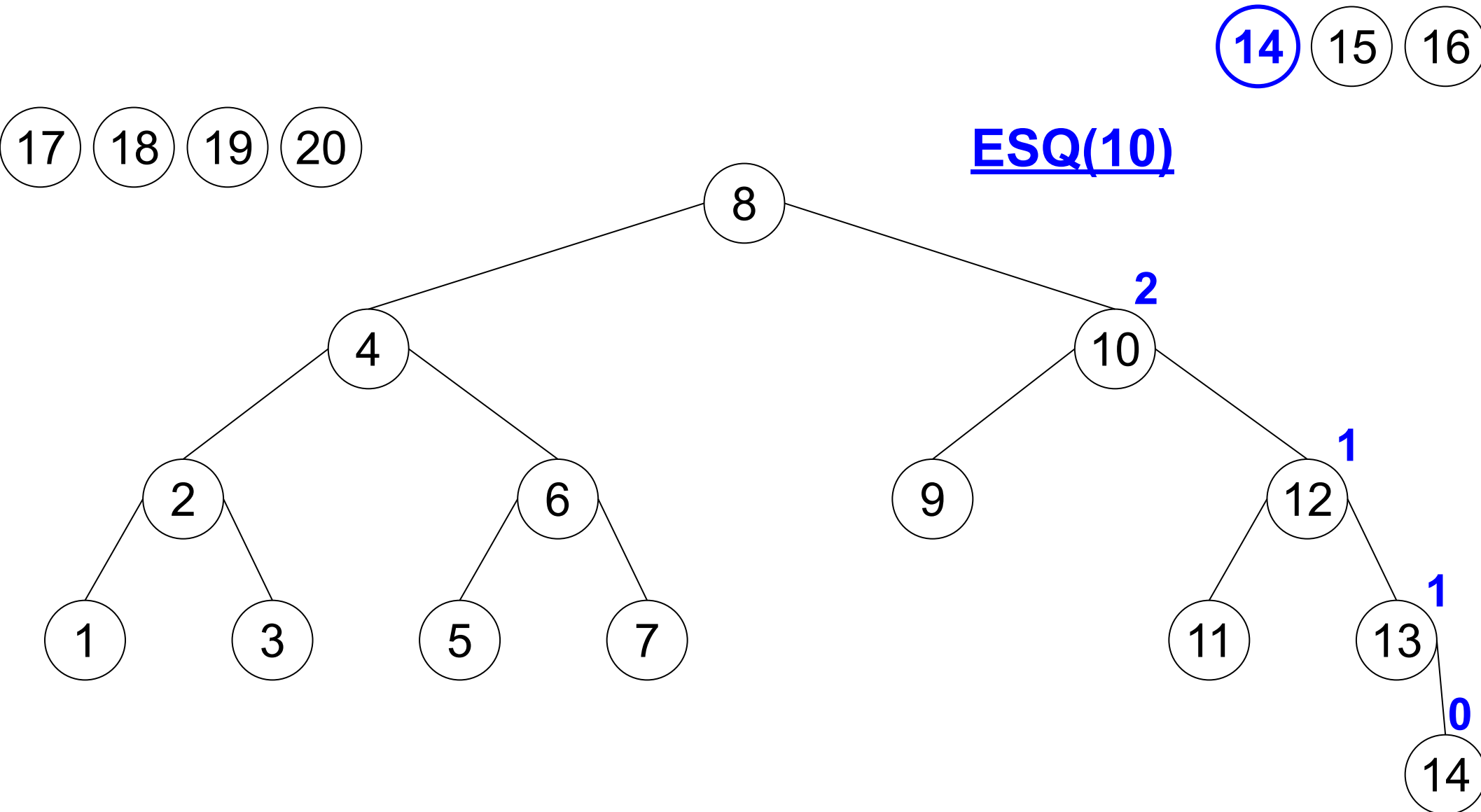
14 15 16

17 18 19 20

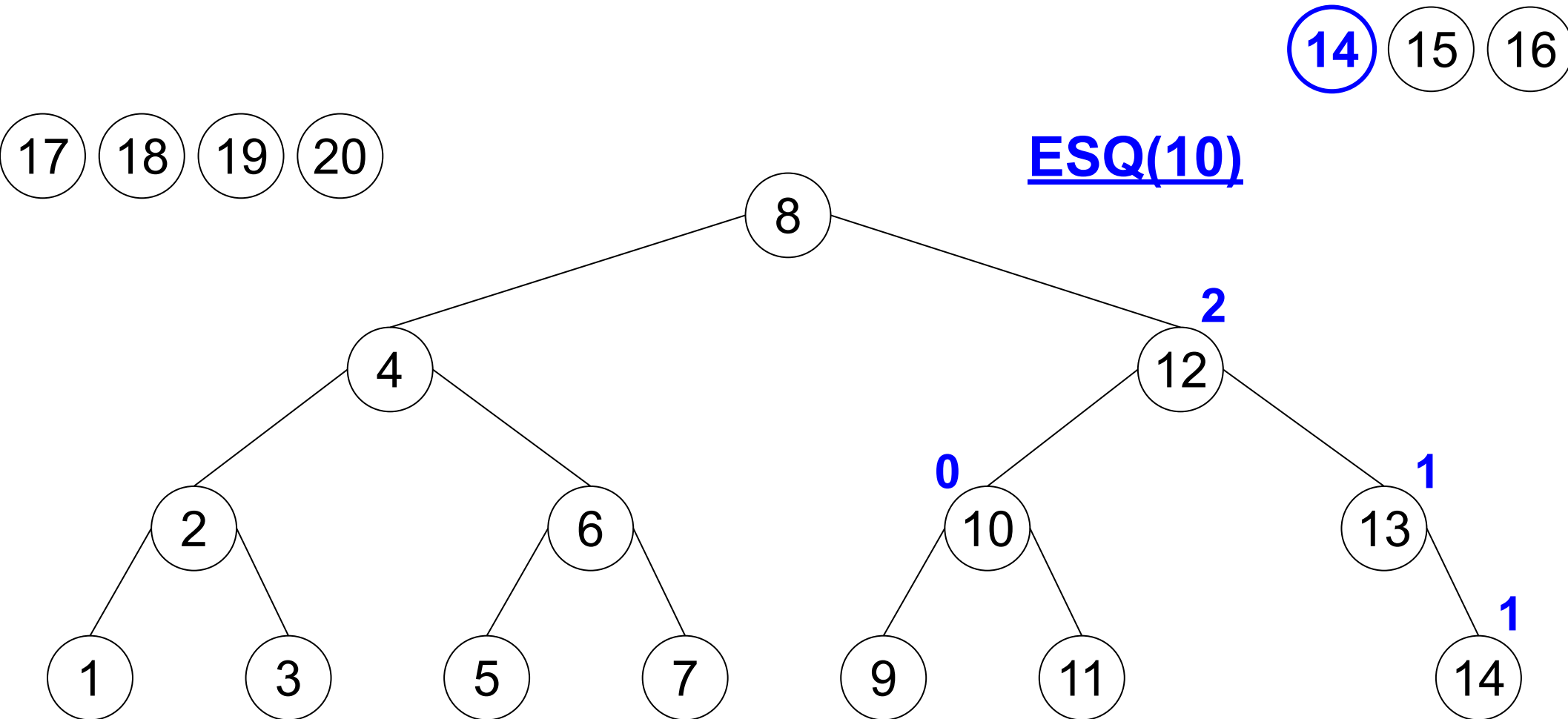
Inserir(14)



## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



## Inserir os Números 1 à 20 na AVL

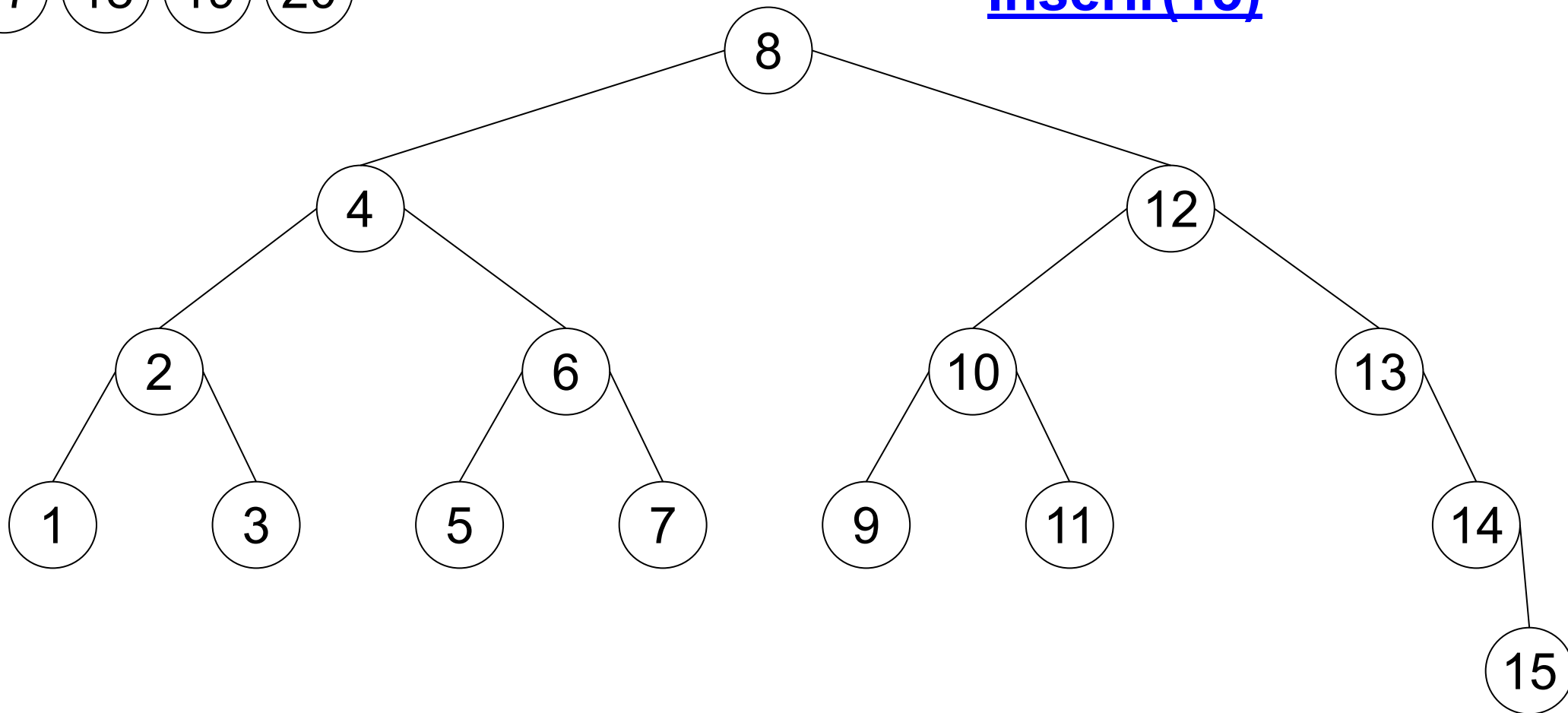


## Inserir os Números 1 à 20 na AVL

15 16

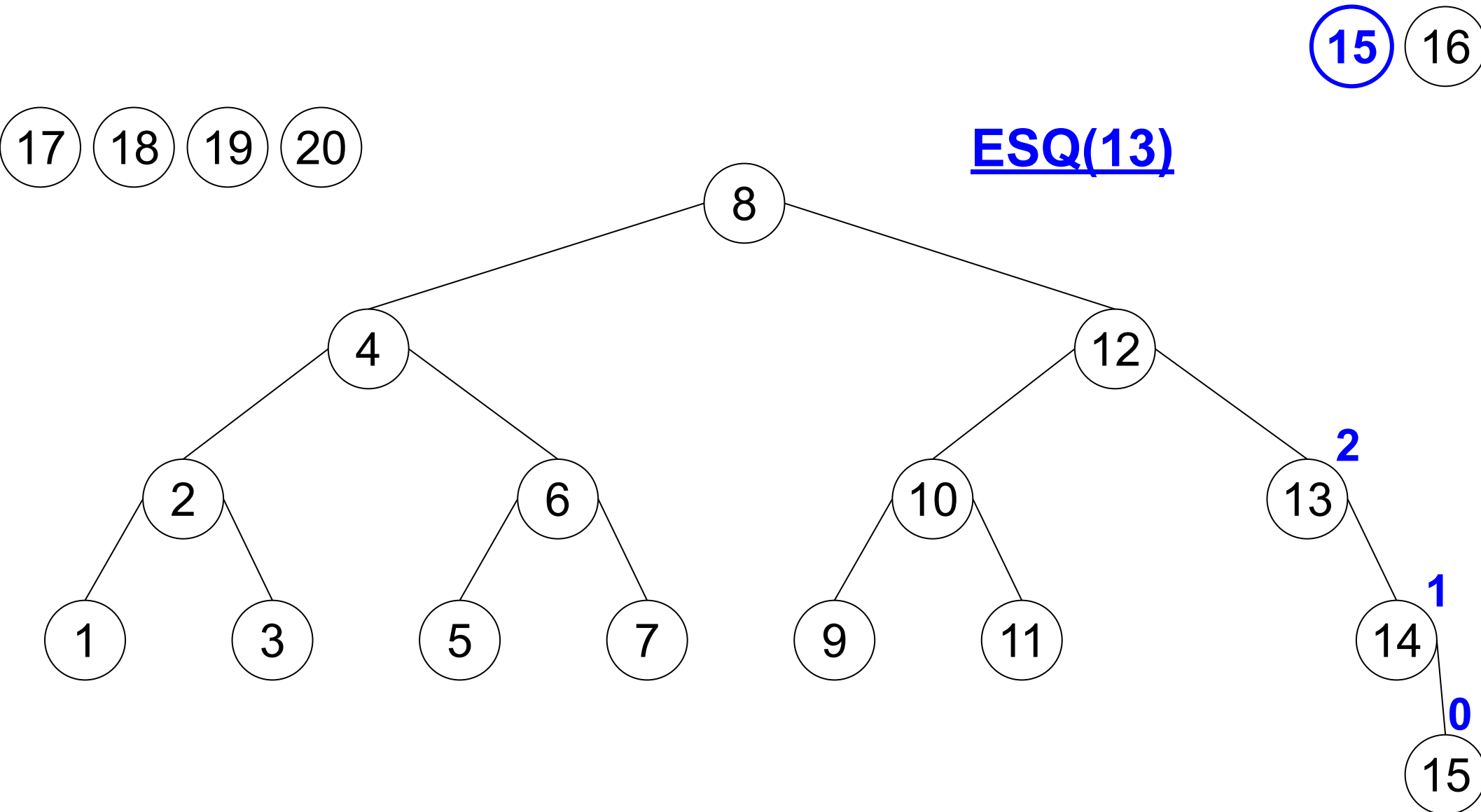
17 18 19 20

Inserir(15)

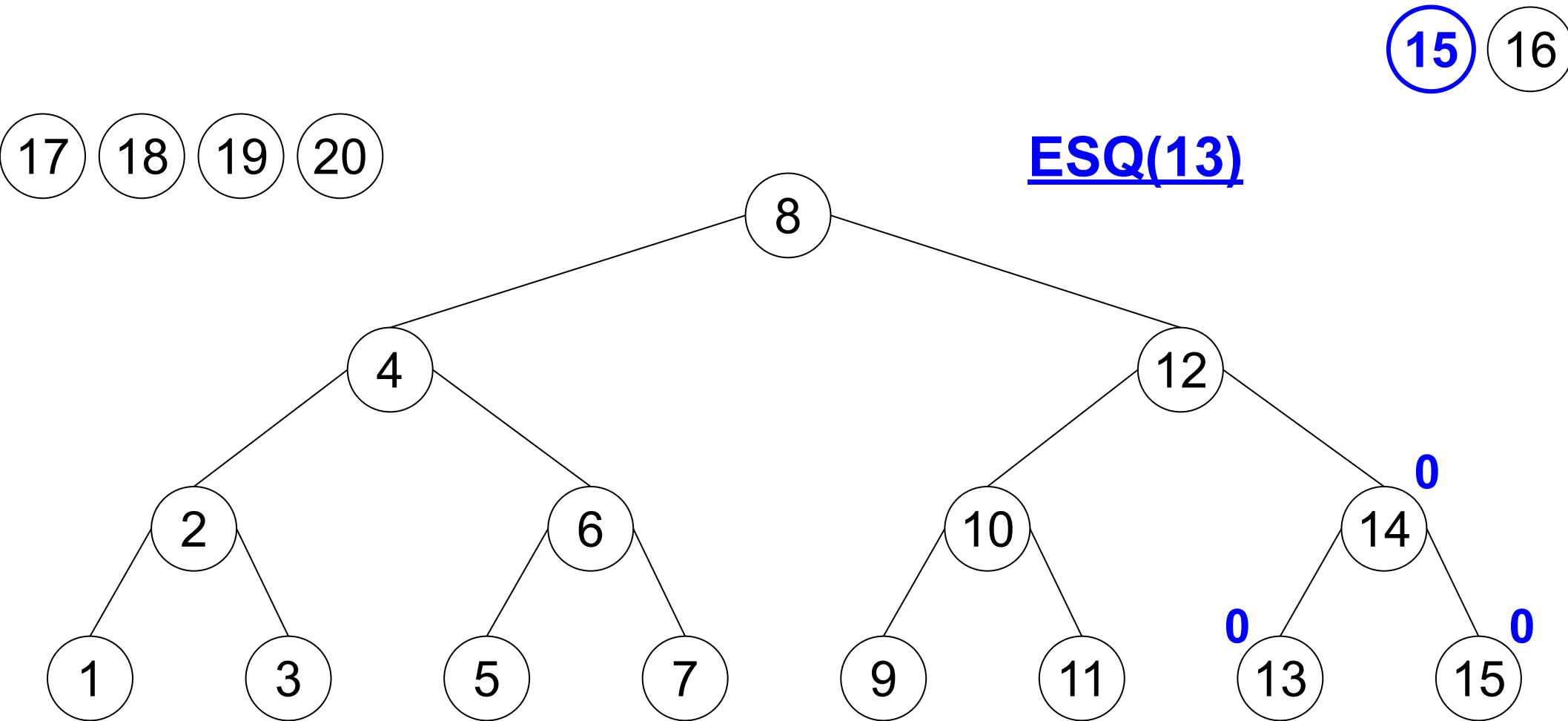




## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



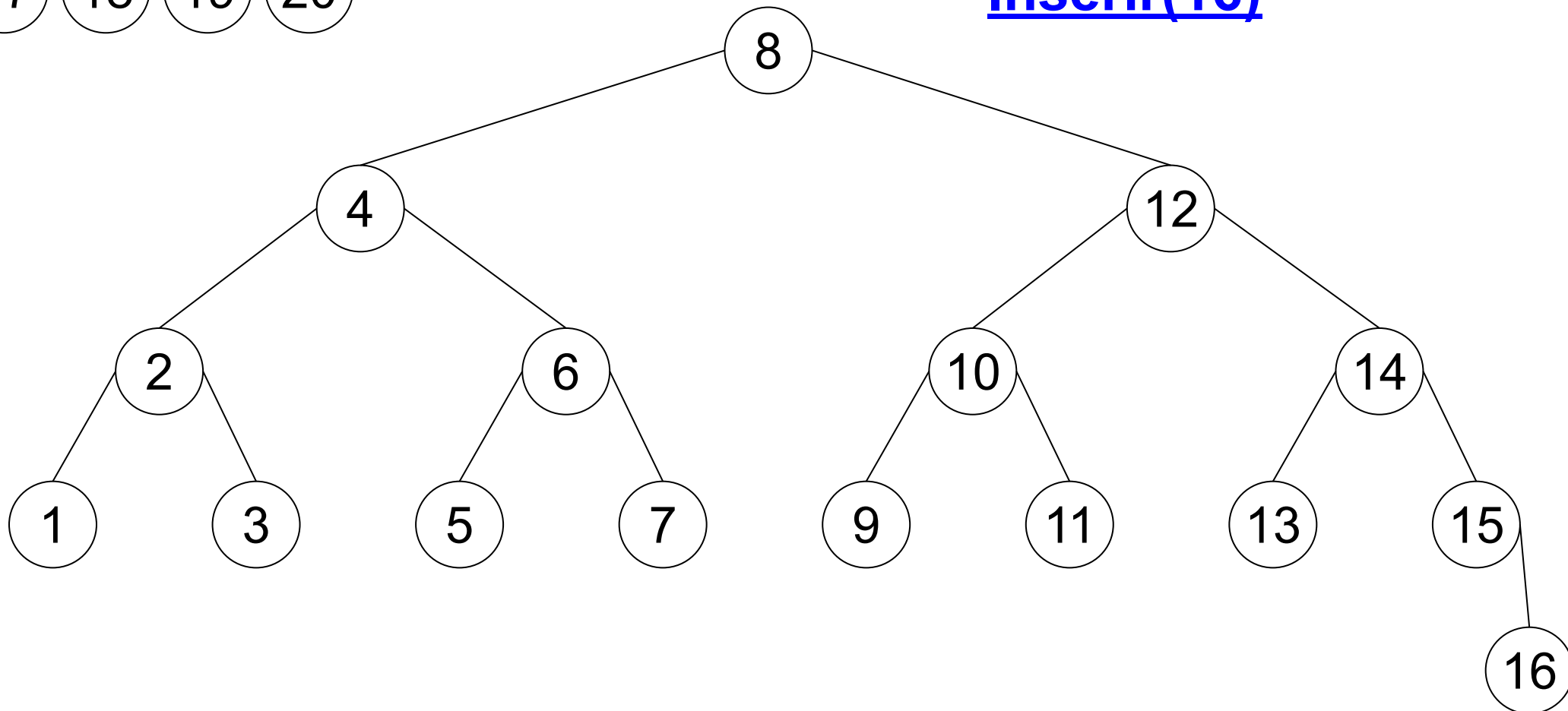
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



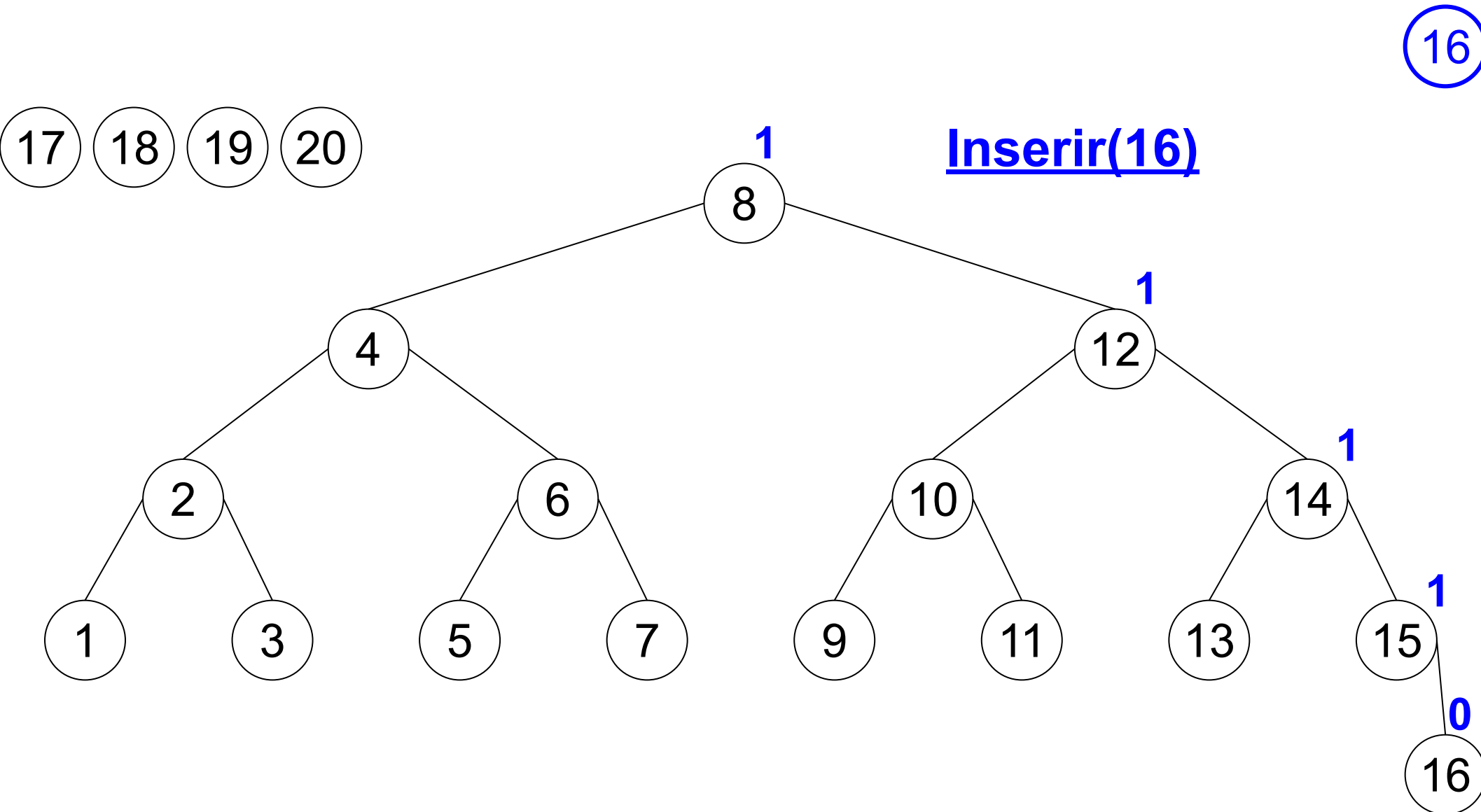
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL

16

17 18 19 20

Inserir(16)

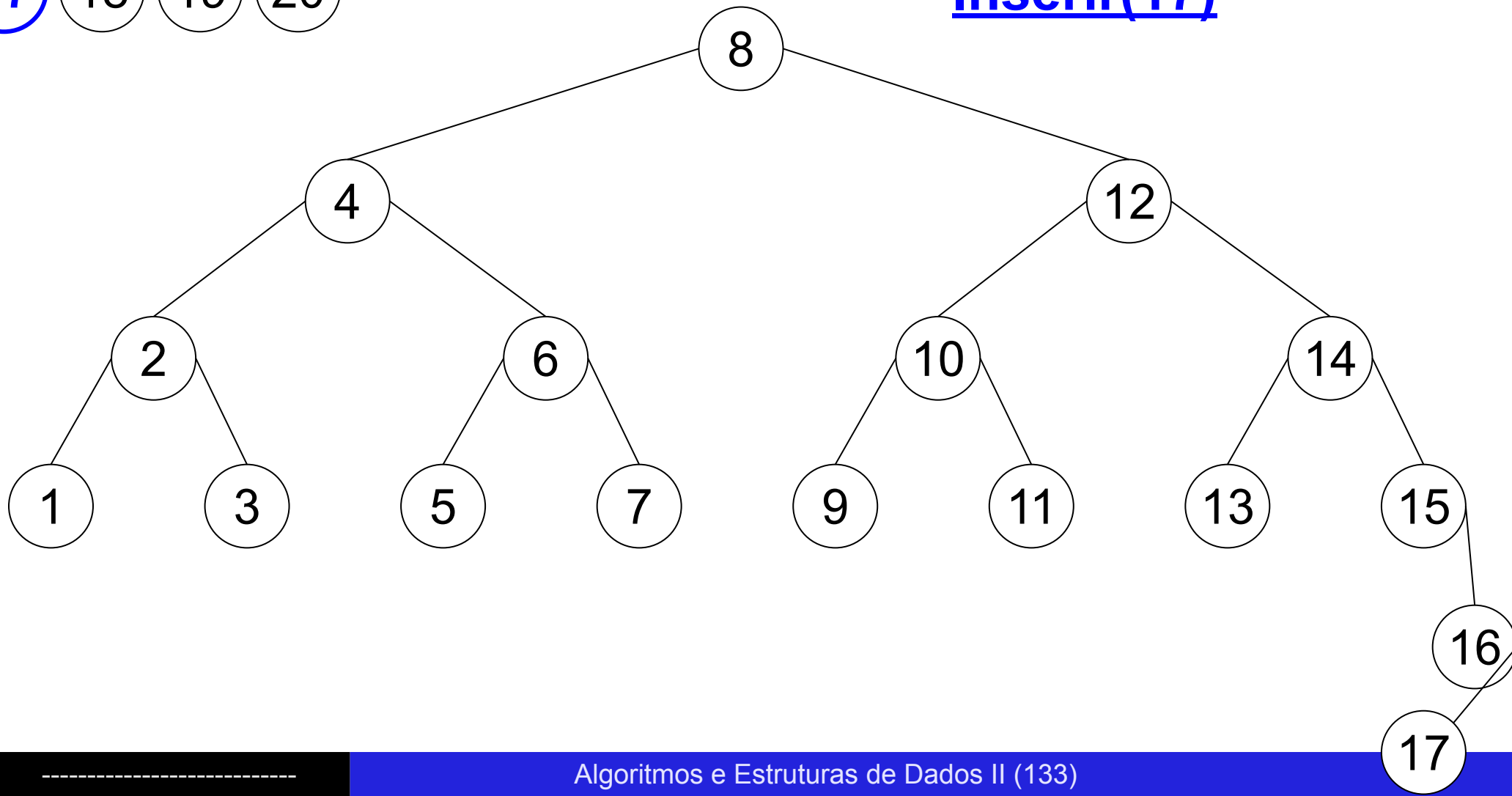
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



## Inserir os Números 1 à 20 na AVL

17 18 19 20

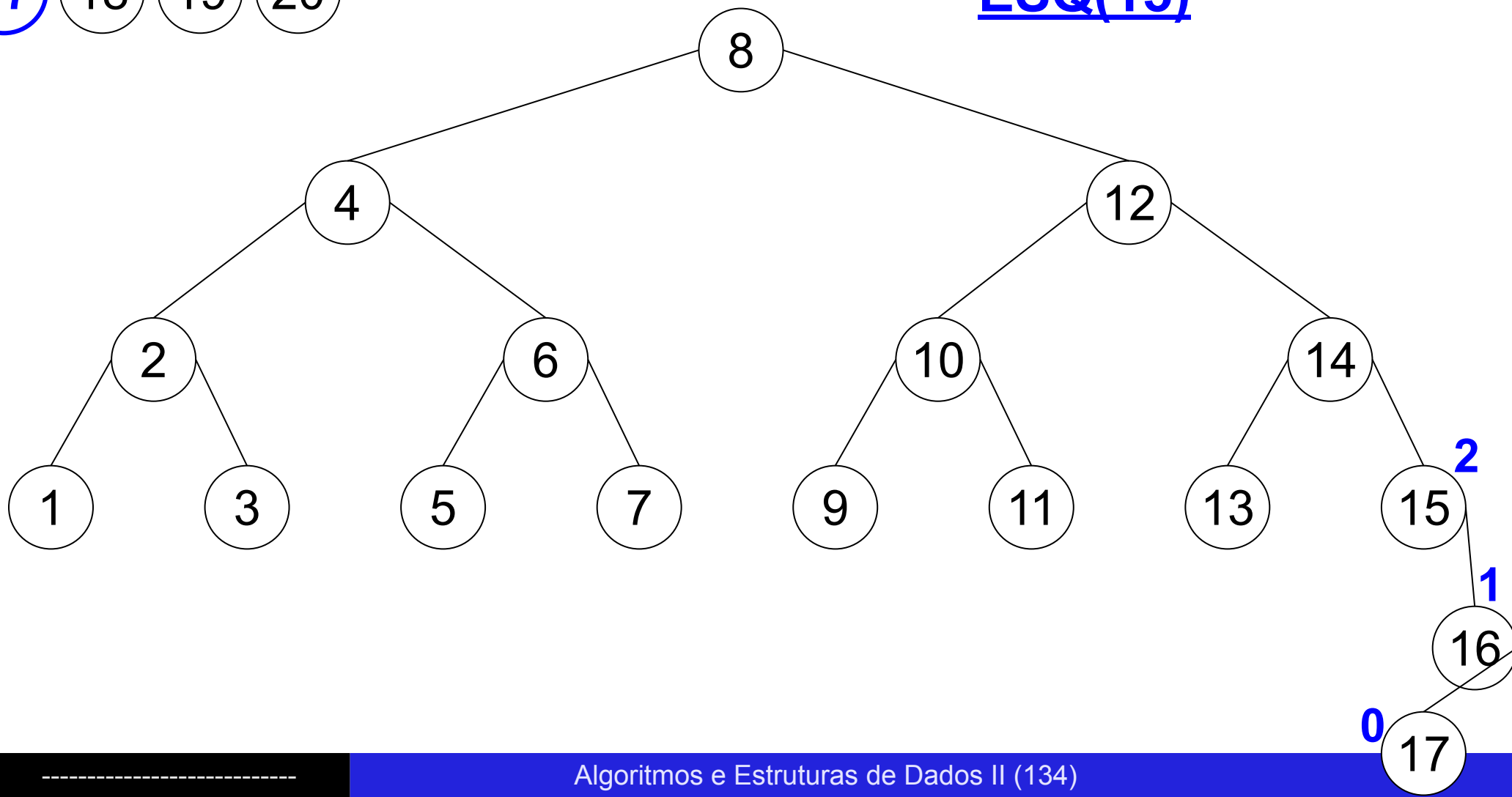
Inserir(17)



## Inserir os Números 1 à 20 na AVL

17 18 19 20

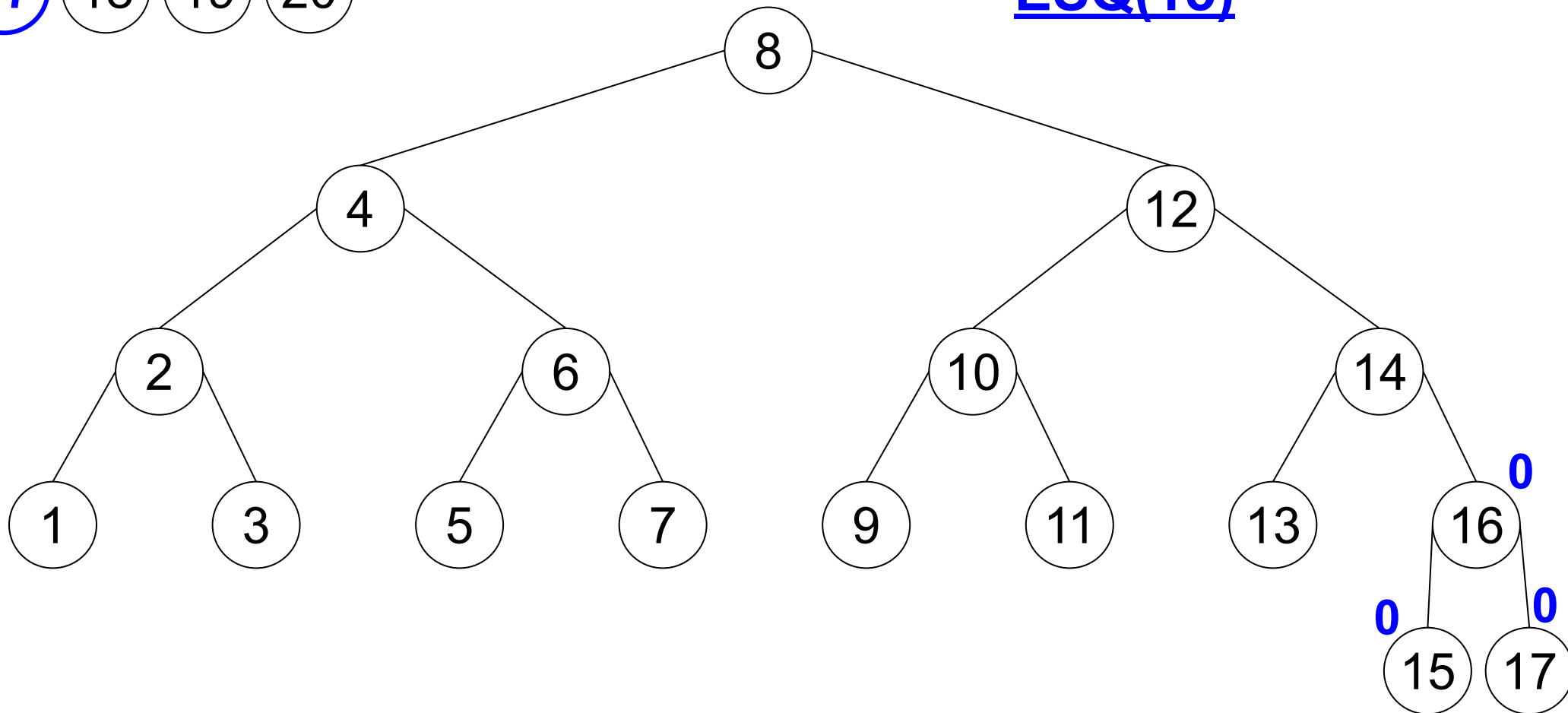
ESQ(15)



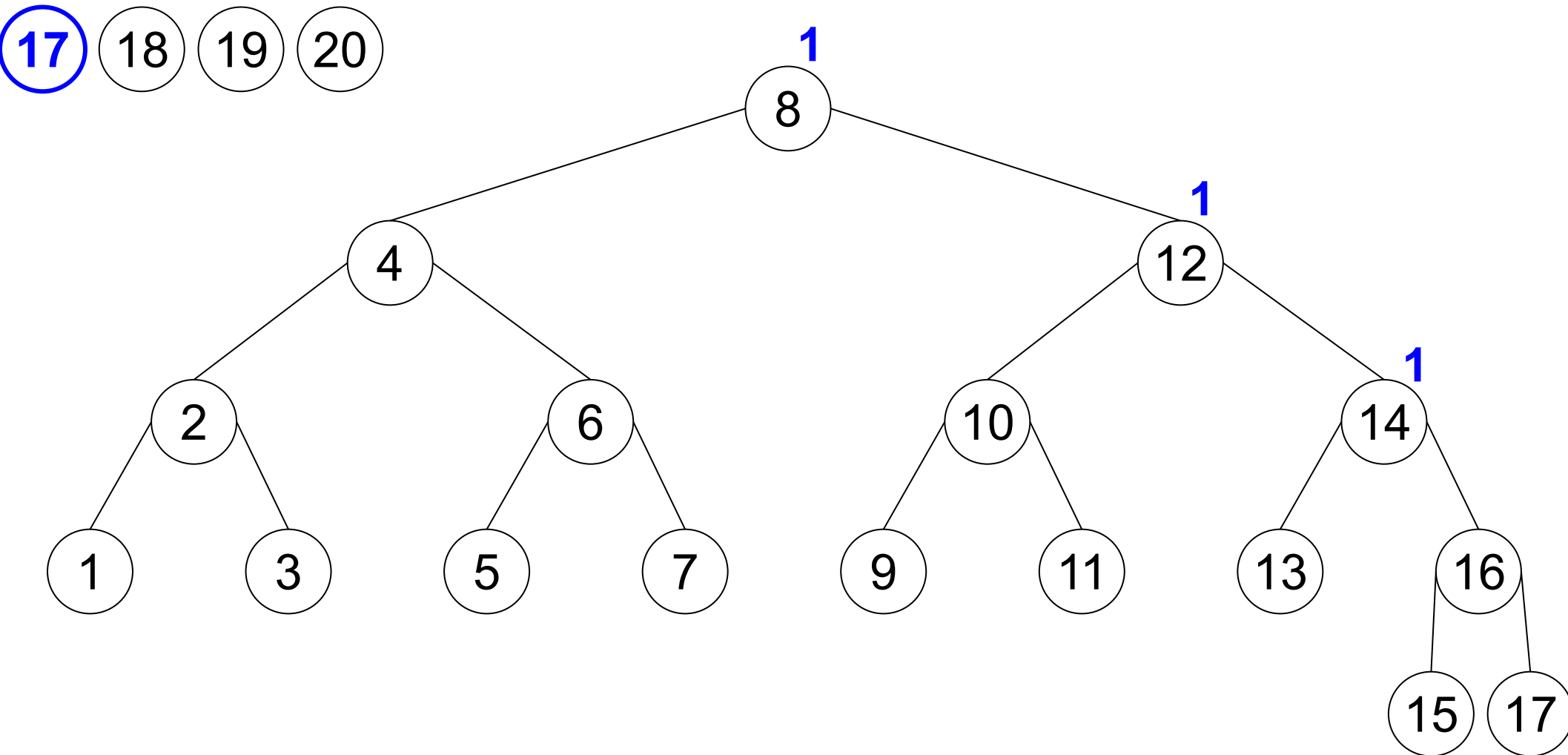
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL

17 18 19 20

ESQ(15)

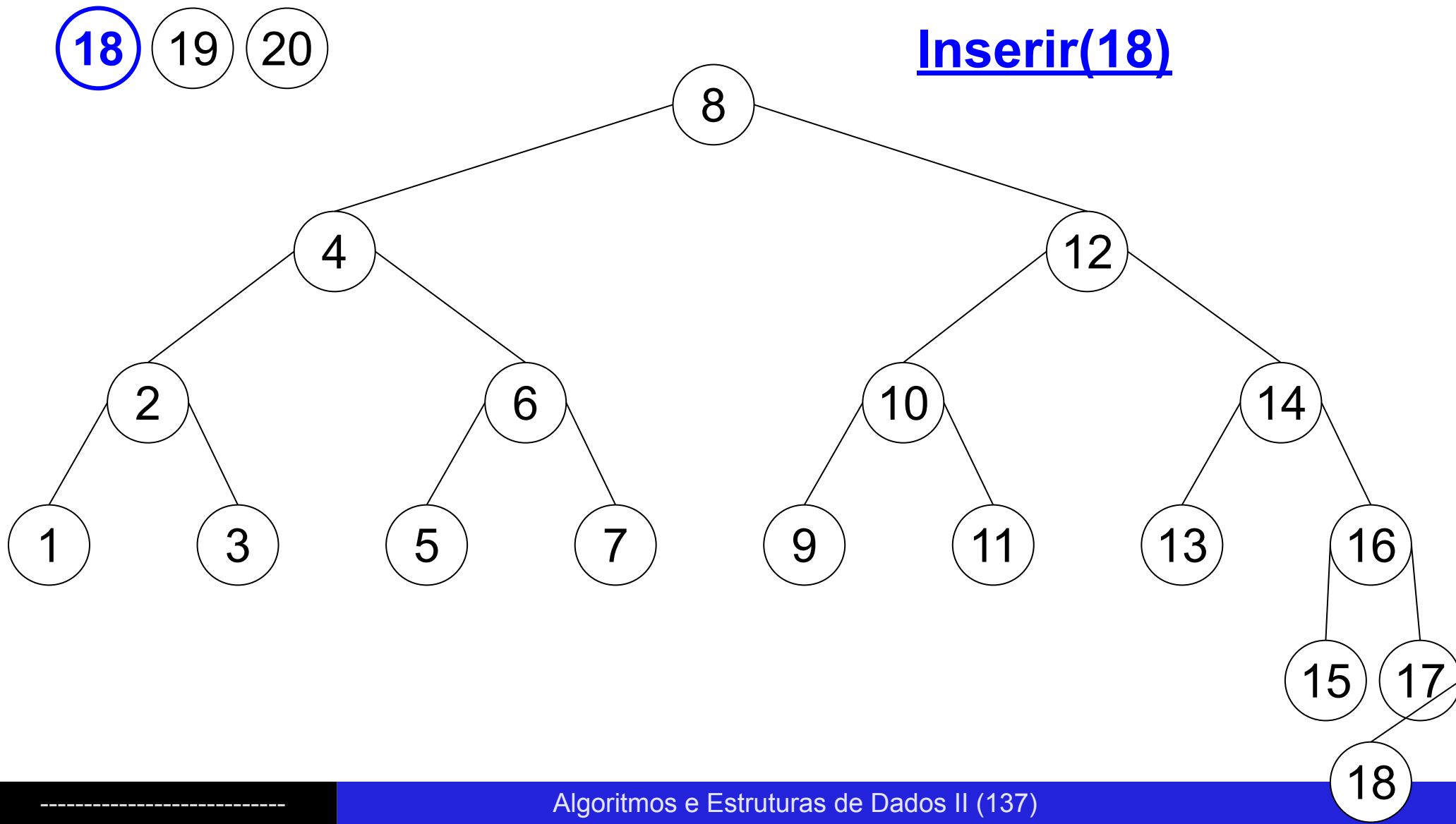


## Inserir os Números 1 à 20 na AVL

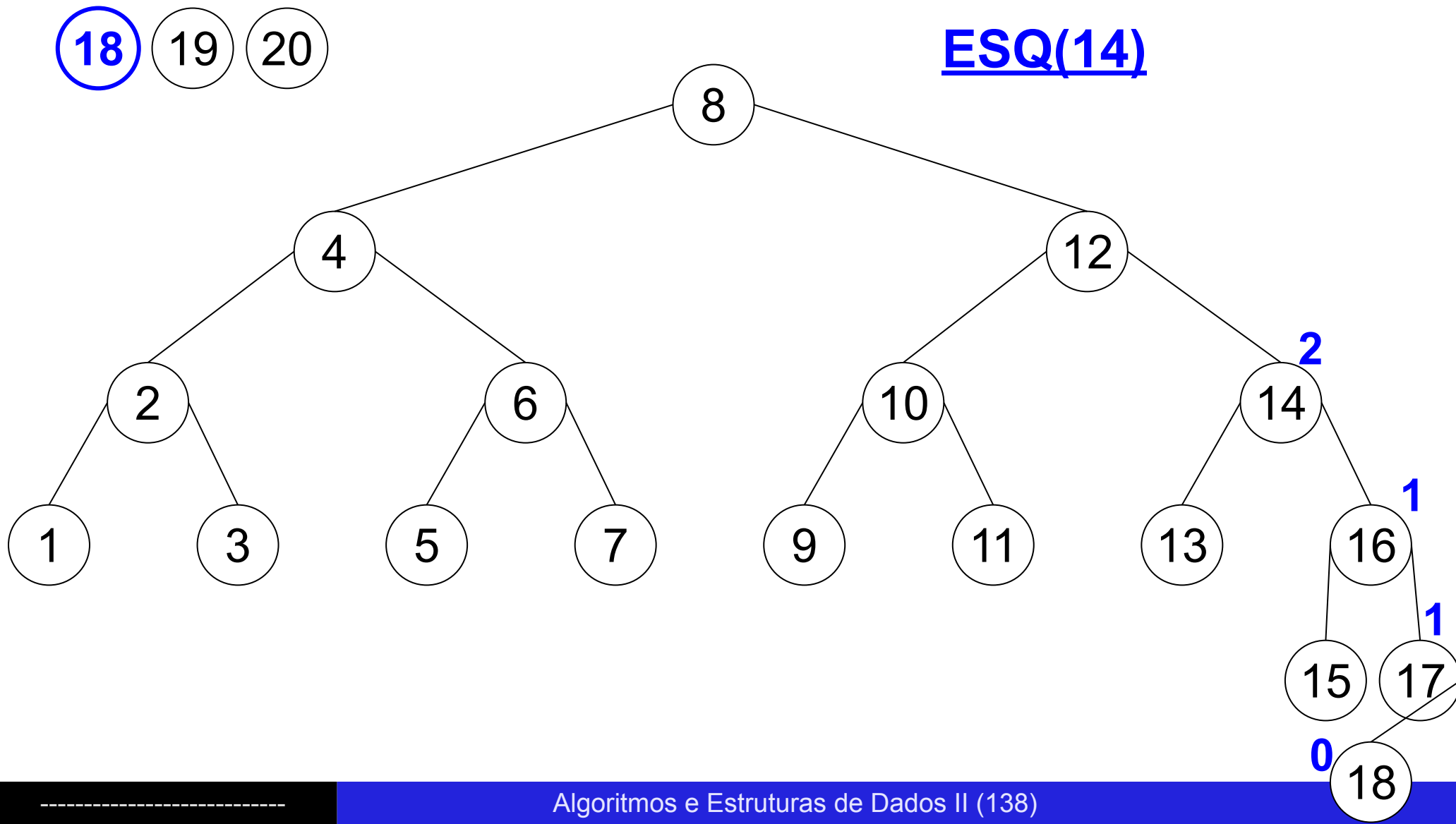




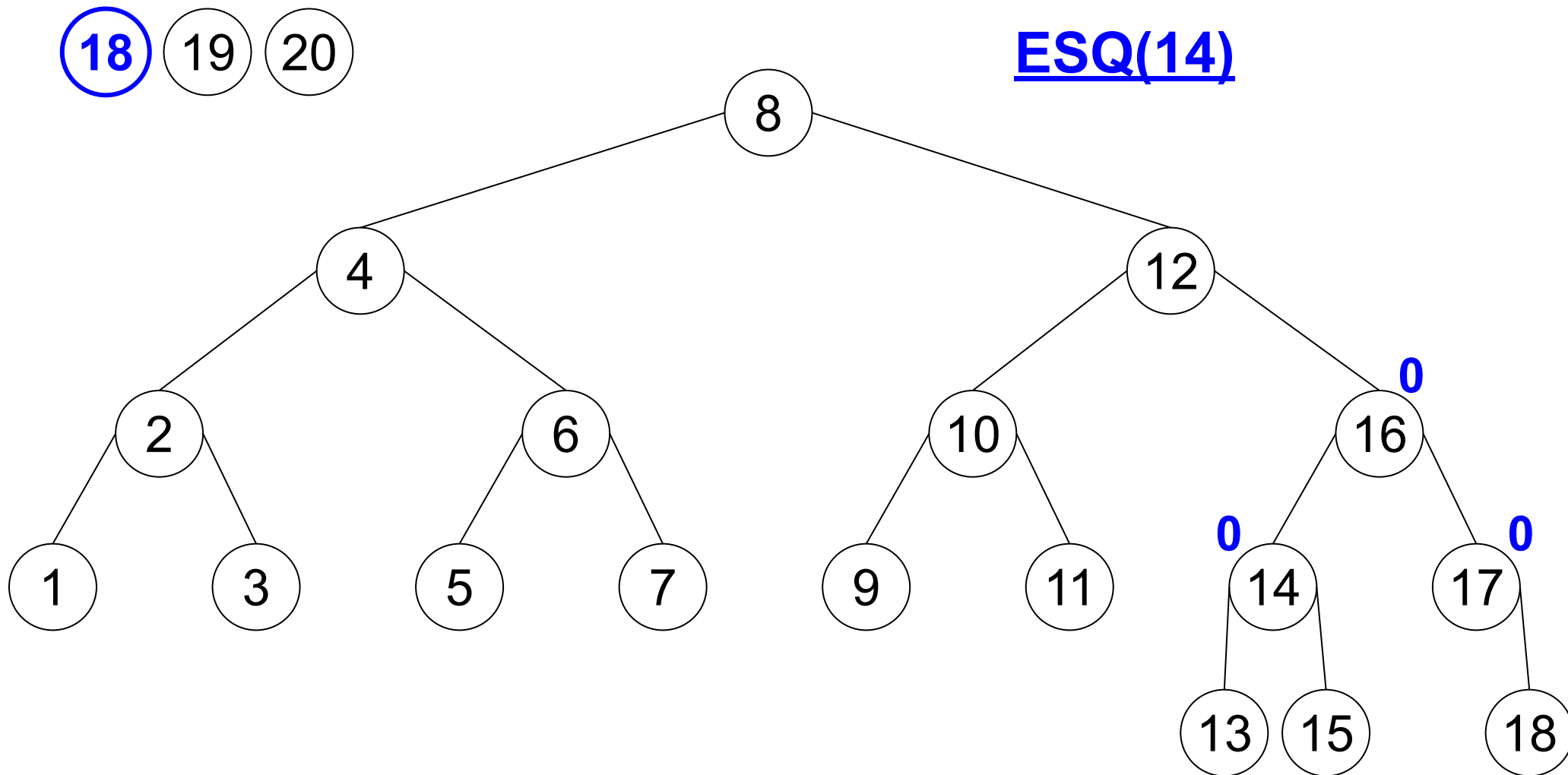
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



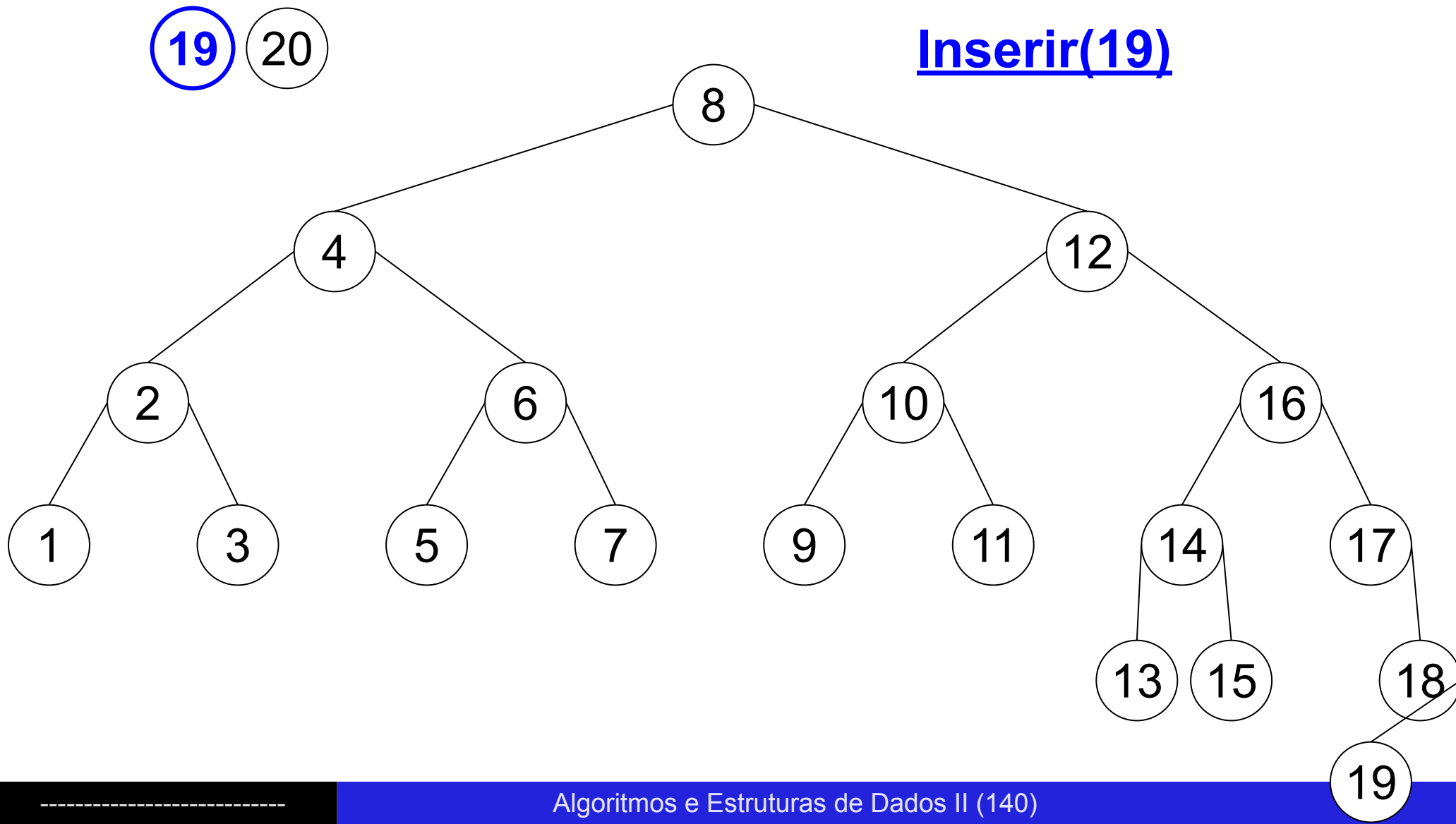
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



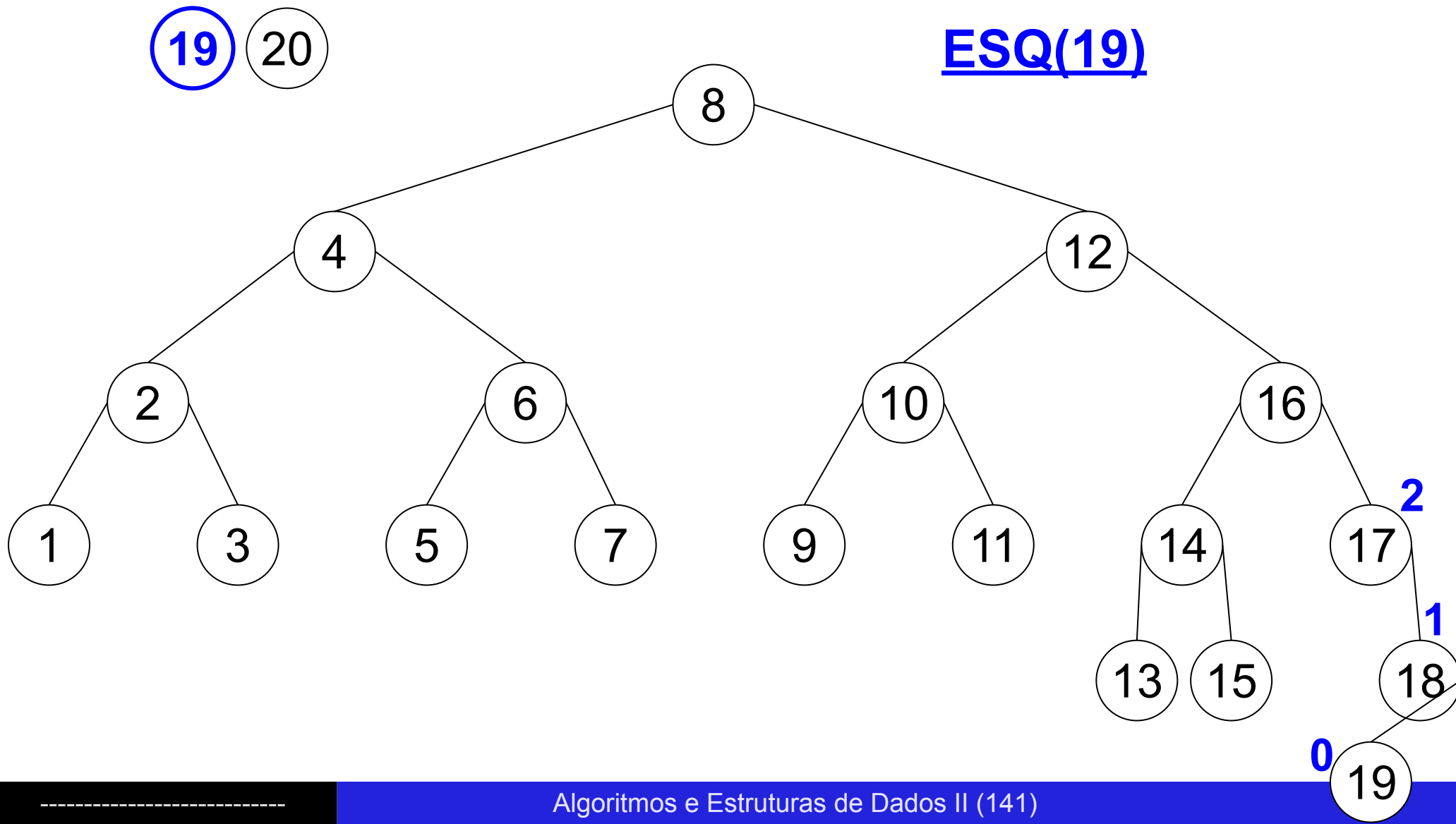
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



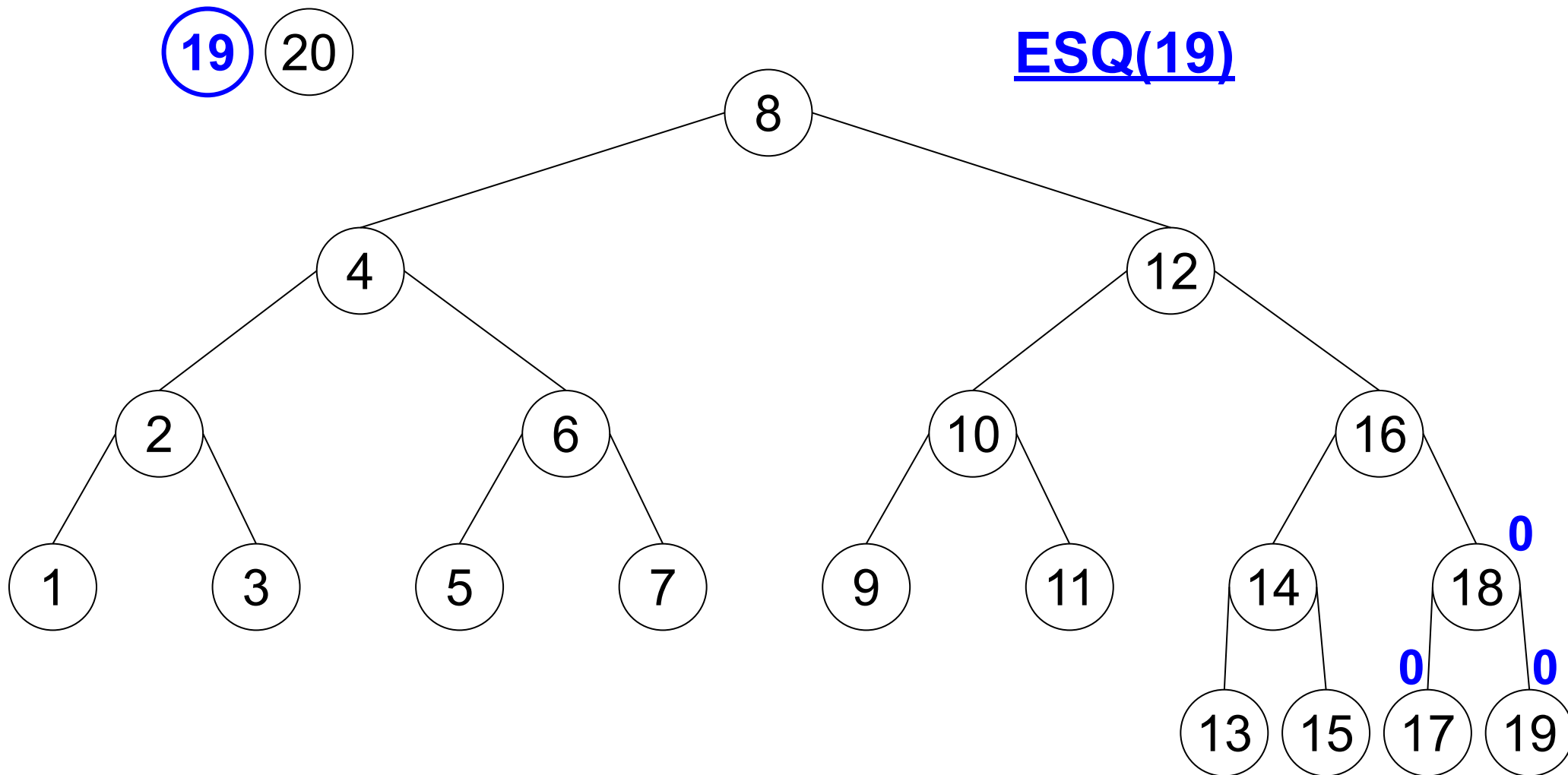
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



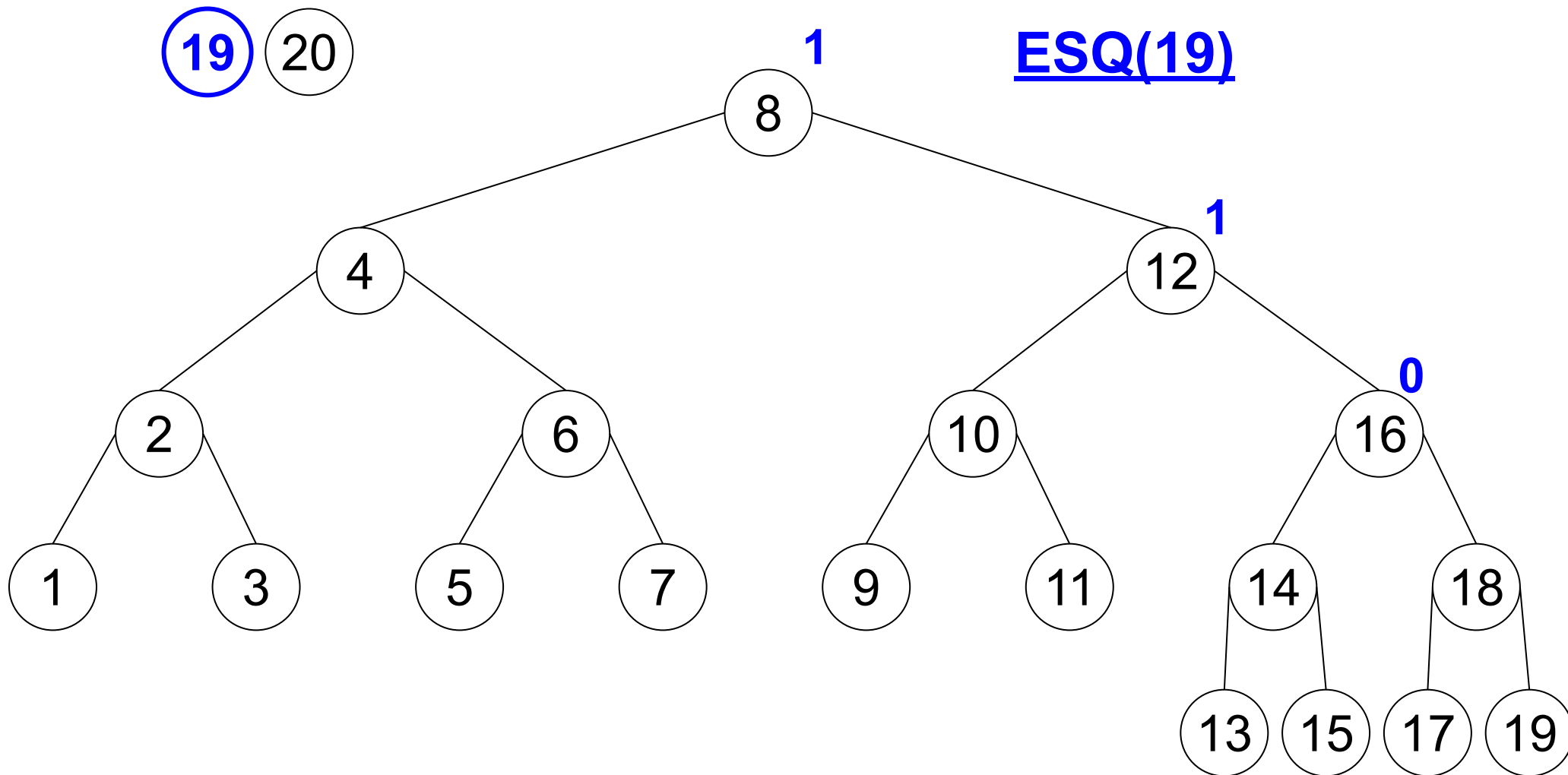
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



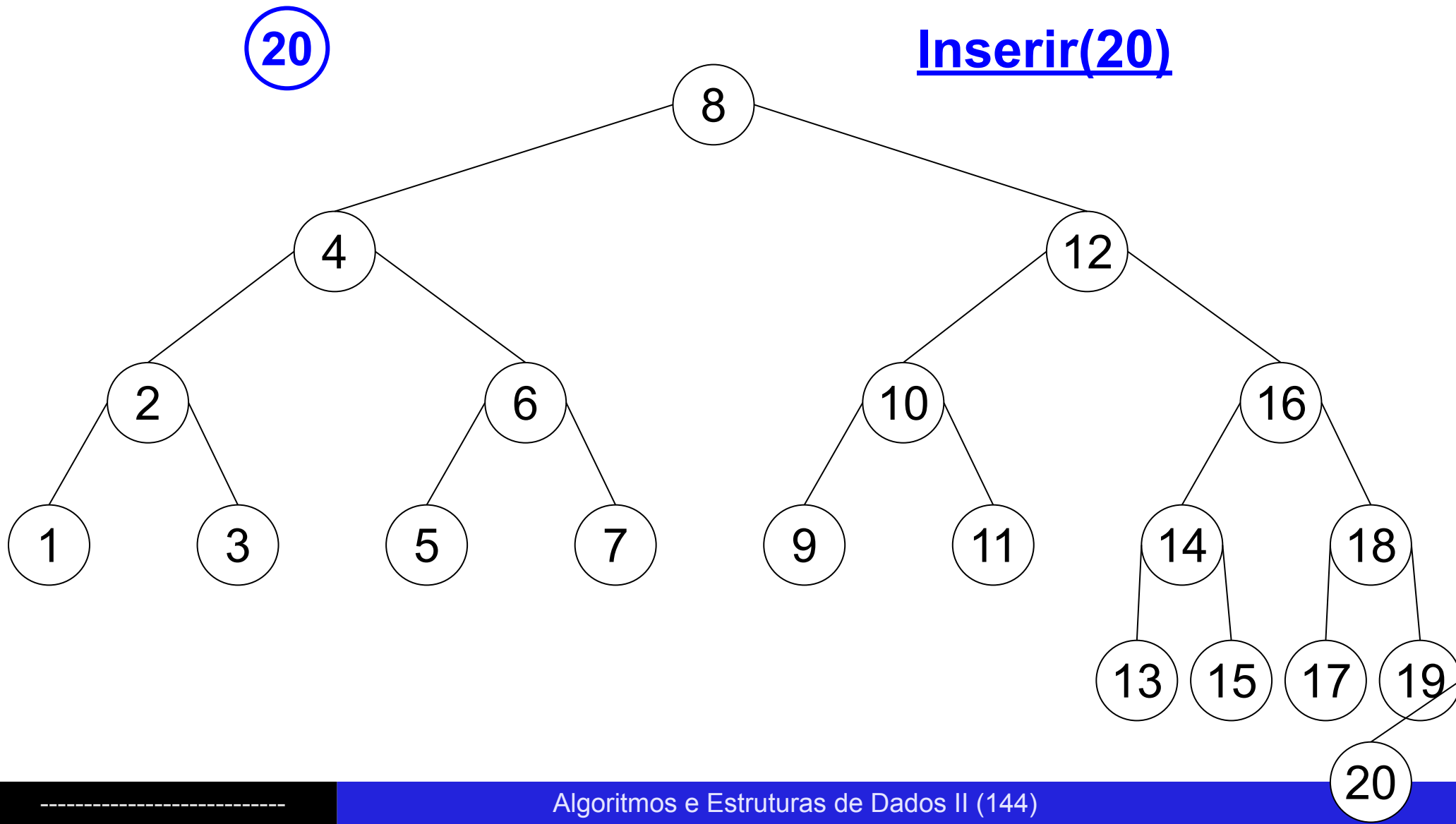
## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



## Inserir os Números 1 à 20 na AVL

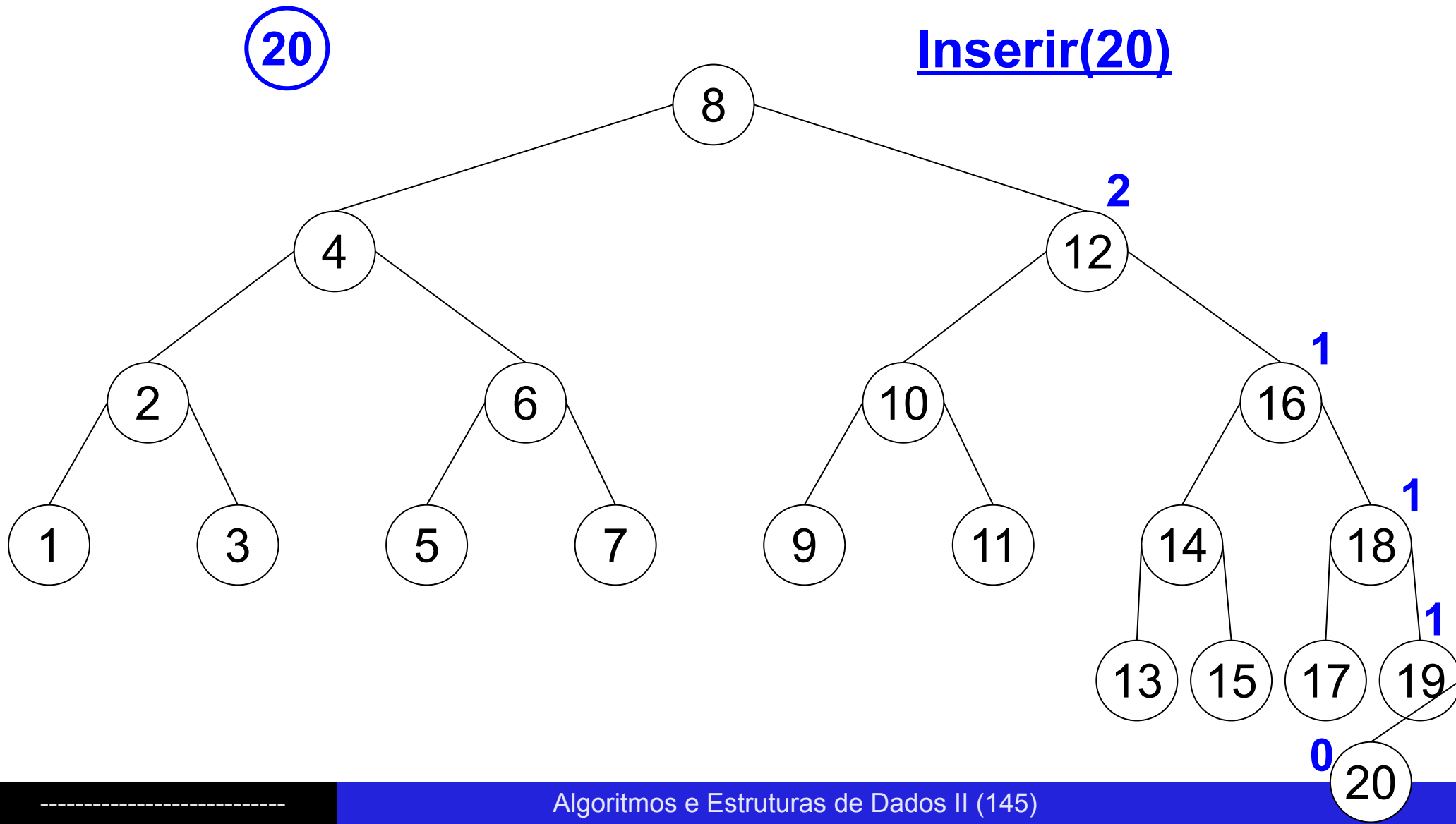


## Inserir os Números 1 à 20 na AVL





## Inserir os Números 1 à 20 na AVL



## Inserir os Números 1 à 20 na AVL

