

# Unidade VI: Árvores 2.3.4



Instituto de Ciências Exatas e Informática  
Departamento de Ciência da Computação

# Introdução

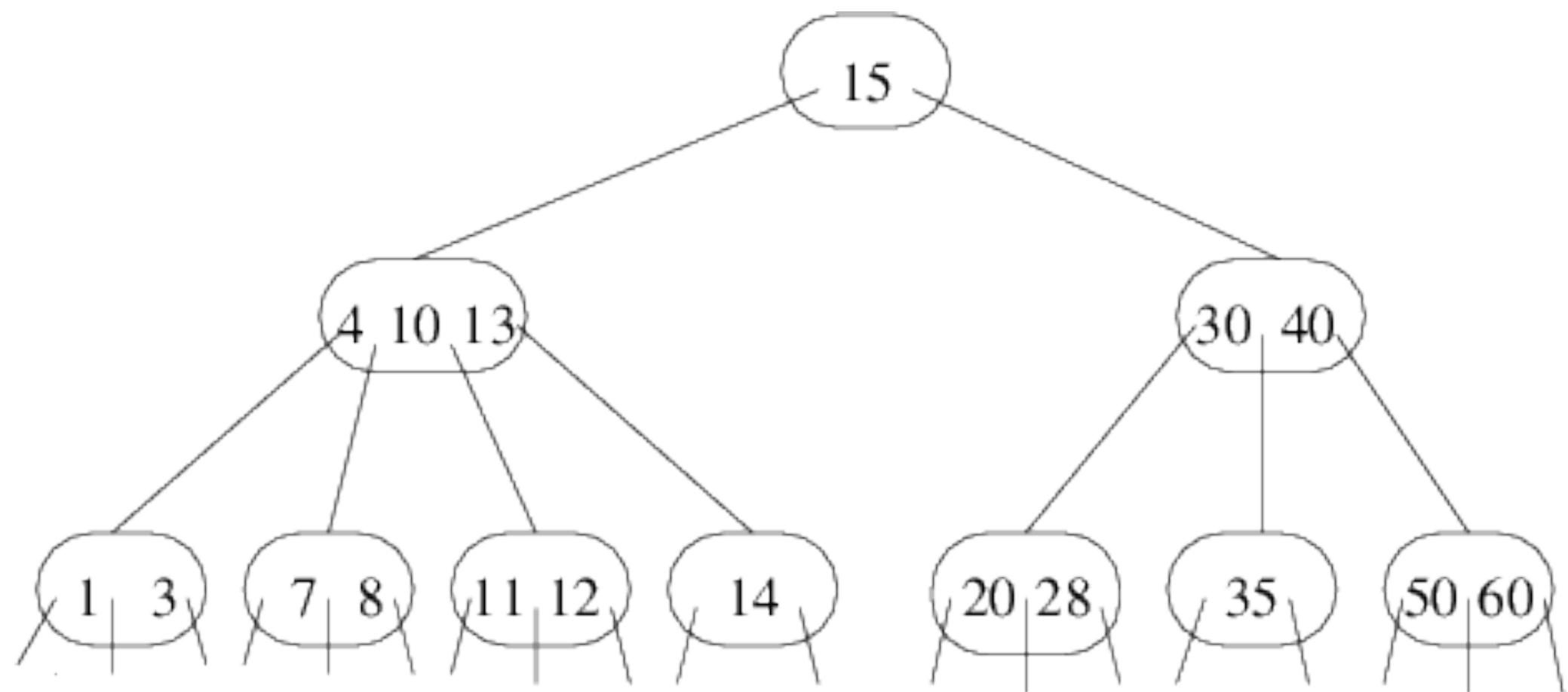
- Introdução e Pesquisa
- Inserção com fragmentação por ascensão
- Inserção com fragmentação na descida

# Introdução

- **Introdução e Pesquisa** 
- Inserção com fragmentação por ascensão
- Inserção com fragmentação na descida

## Introdução

- Árvore de pesquisa cujos nós são de três tipos (2-nó, 3-nó ou 4-nó) e as folhas estão situadas no mesmo nível



# Propriedade das Árvore 2.3.4

- A altura  $h(n)$  de uma árvore-2.3.4<sup>1</sup> contendo  $n$  itens é  $\Theta(\lg(n))$
- Por questões de simplificação, este material considera que todos os elementos da árvore são distintos

<sup>1</sup>Prova: Temos que  $\log_4(n + 1) \leq h(n) \leq \log_2(n + 1)$ . Além disso, a árvore-2.3.4 que tem menos itens é a que tem só tem 2-nós. Como todas as folhas estão no mesmo nível, o nº de itens da árvore é  $2^0 + 2^1 + \dots + 2^h = 2^{h+1} - 1$ . Da mesma forma, a árvore-2.3.4 que tem mais itens é a que só tem 4-nós e seu nº de itens é  $4^0 + 4^1 + \dots + 4^h = 4^{h+1} - 1$ . Deduz-se que, para toda árvore-2.3.4 contendo  $n$  itens e de altura  $h(n)$ , temos a relação  $2^{h+1} - 1 \leq h(n) \leq 4^{h+1} - 1$ , de onde se tira a relação acima.

# Pesquisa em Árvores 2.3.4

- “Igual” <sup>1</sup> ao das árvores binárias
- Funcionamento básico:
  - (1) Verificar se o elemento procurado  $x$  está no nó raiz
  - (2) Se estiver, tem-se uma **resposta positiva**
  - (3) Senão, se  $x < x_1$ , verificar na subárvore da esquerda
  - (4) Senão, se  $x < x_2$ , na do meio à esquerda
  - (5) Senão, se  $x < x_3$ , na do meio à direita
  - (6) Senão, na da direita
  - (7) Se a subárvore for nula, tem-se uma **resposta negativa**

1 - “Igual” de professor, assim, não tão igual

# Análise de Complexidade da Pesquisa

- Número de comparações em uma pesquisa com sucesso:
  - Melhor Caso:  $\Theta(1)$
  - Pior e Caso Médio:  $\Theta(\lg(n))$

# Inserção

- Este material considera a inserção sempre nas folhas
- Se a folha for 2-nó ou 3-nó (1 ou 2 elementos), insere-se nela
- Senão (4-nó), fragmentamos a folha e reorganizando seus elementos. As duas técnicas para realizar essas tarefas são:
  - Inserção com fragmentação por ascensão
  - Inserção com fragmentação na descida

# Introdução

- Introdução e Pesquisa
- **Inserção com fragmentação por ascensão** 
- Inserção com fragmentação na descida

# Inserção com Fragmentação na Ascensão

- Apresentaremos esta técnica fazendo, como exemplo, a inserção dos números 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, 11 e 6

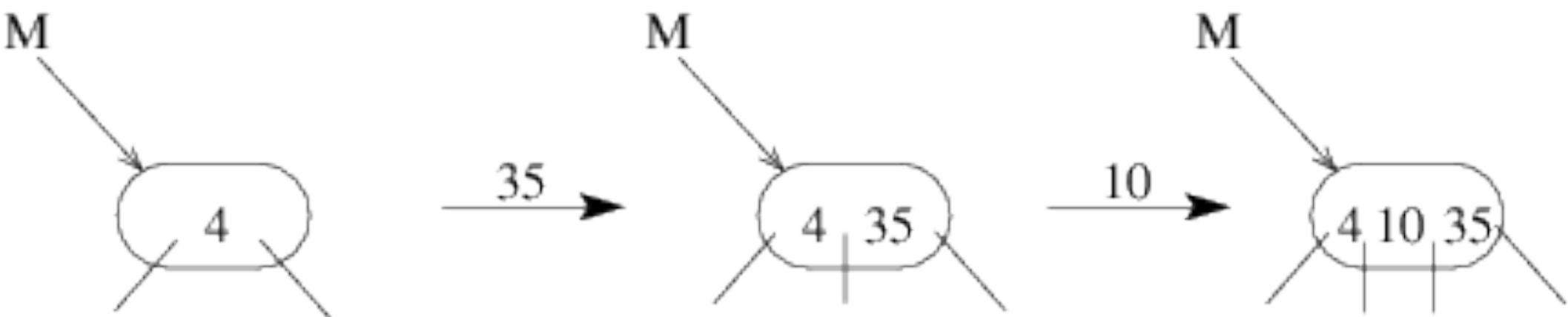
# Inserção com Fragmentação na Ascensão

- Inserimos os três primeiros primeiros elementos na raiz que é uma folha
- **Exercício Resolvido (1): Faça a inserção do 4, 35 e 10**

Elementos: **4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, 11 e 6**

# Inserção com Fragmentação na Ascensão

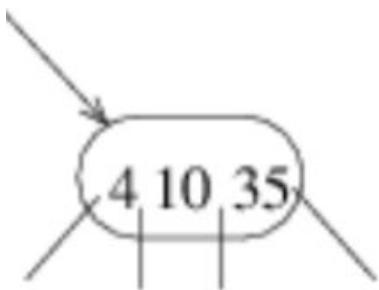
- Inserimos os três primeiros primeiros elementos na raiz que é uma folha



Elementos: **4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, 11 e 6**

# Inserção com Fragmentação na Ascensão

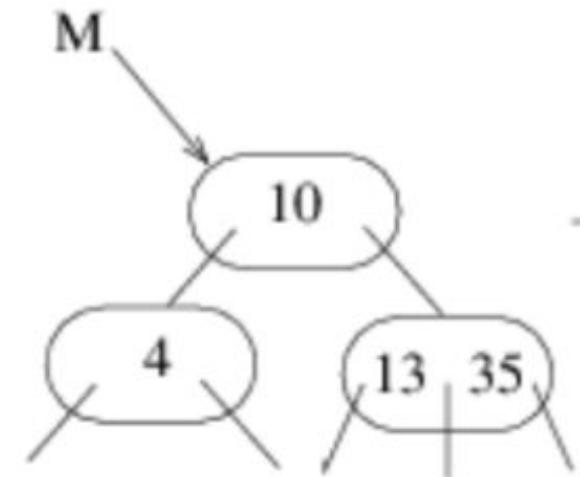
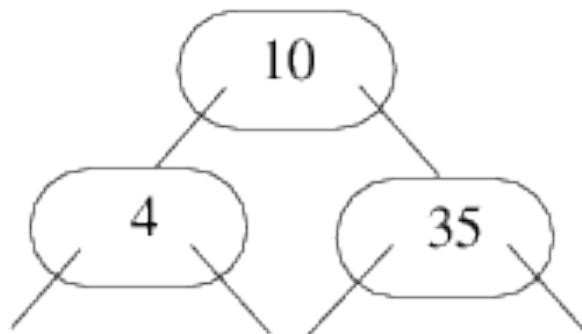
- Para o quarto elemento, fragmentamos a folha (4-nó) em três 2-nós onde o elemento do meio é pai dos demais e o novo elemento é inserido em uma das duas folhas
- **Exercício Resolvido (2): Faça a inserção do 13**



Elementos: 4, 35, 10, **13**, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, 11 e 6

# Inserção com Fragmentação na Ascensão

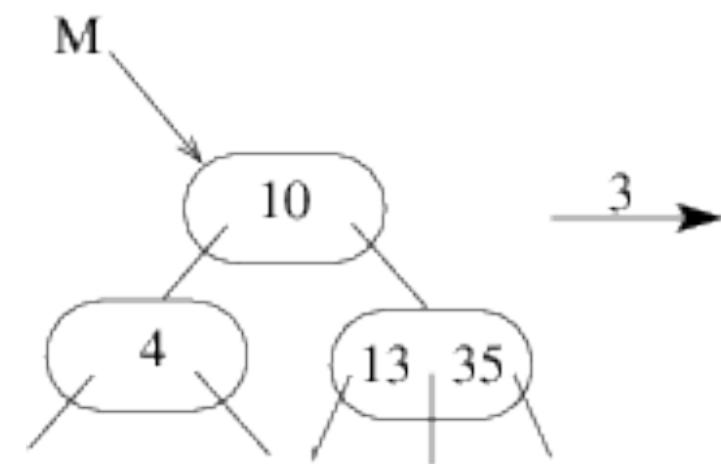
- Para o quarto elemento, fragmentamos a folha (4-nó) em três 2-nós onde o elemento do meio é pai dos demais e o novo elemento é inserido em uma das duas folhas



Elementos: 4, 35, 10, **13**, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, 11 e 6

# Inserção com Fragmentação na Ascensão

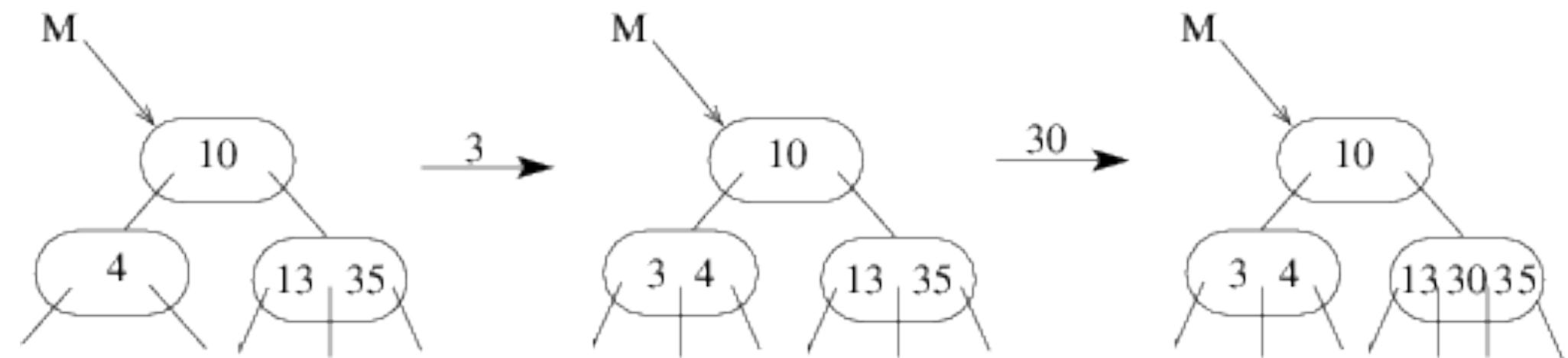
- Para os demais elementos, fazemos uma pesquisa e os inserimos naturalmente nas folhas do tipo 2-nó ou 3-nó
- **Exercício Resolvido (3): Faça a inserção do 3 e 30**



Elementos: 4, 35, 10, 13, **3**, **30**, 15, 12, 7, 40, 20, 11 e 6

# Inserção com Fragmentação na Ascensão

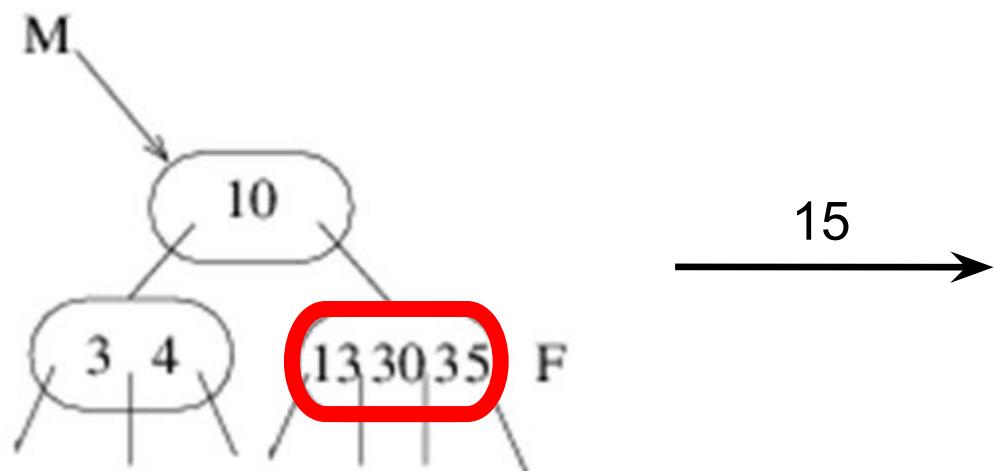
- Para os demais elementos, fazemos uma pesquisa e os inserimos naturalmente nas folhas do tipo 2-nó ou 3-nó
- Exercício Resolvido (3): Faça a inserção do 3 e 30**



Elementos: 4, 35, 10, 13, **3**, **30**, 15, 12, 7, 40, 20, 11 e 6

# Inserção com Fragmentação na Ascensão

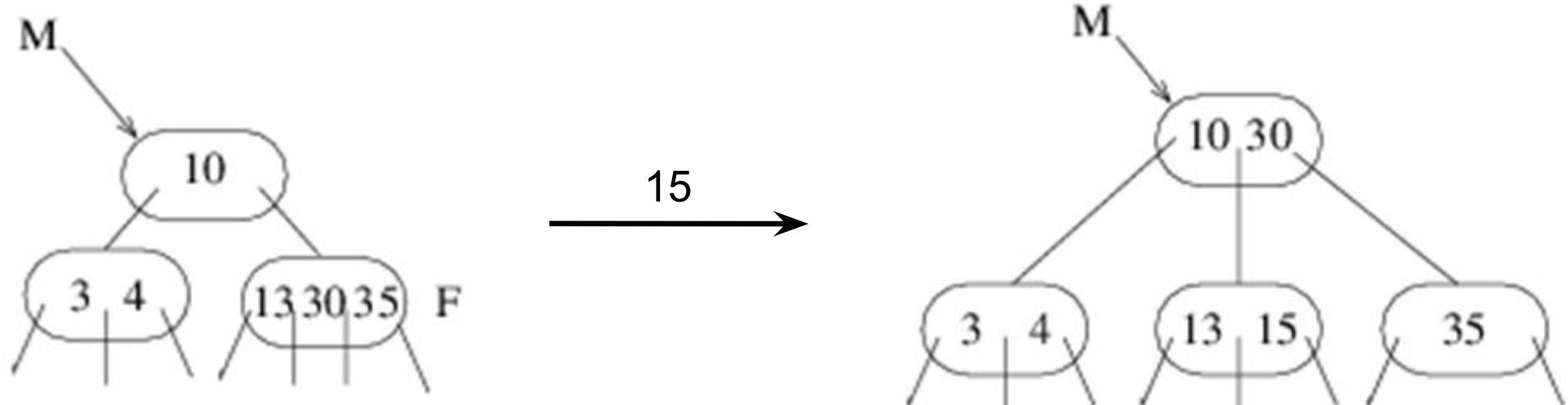
- Quando a folha é um 4-nó, fragmentamos a mesma e efetuamos a ascensão do seu elemento do meio para o pai. O novo elemento ficará em uma das duas folhas resultantes da fragmentação
- **Exercício Resolvido (4): Faça a inserção do 15**



Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, **15**, 12, 7, 40, 20, 11 e 6

# Inserção com Fragmentação na Ascensão

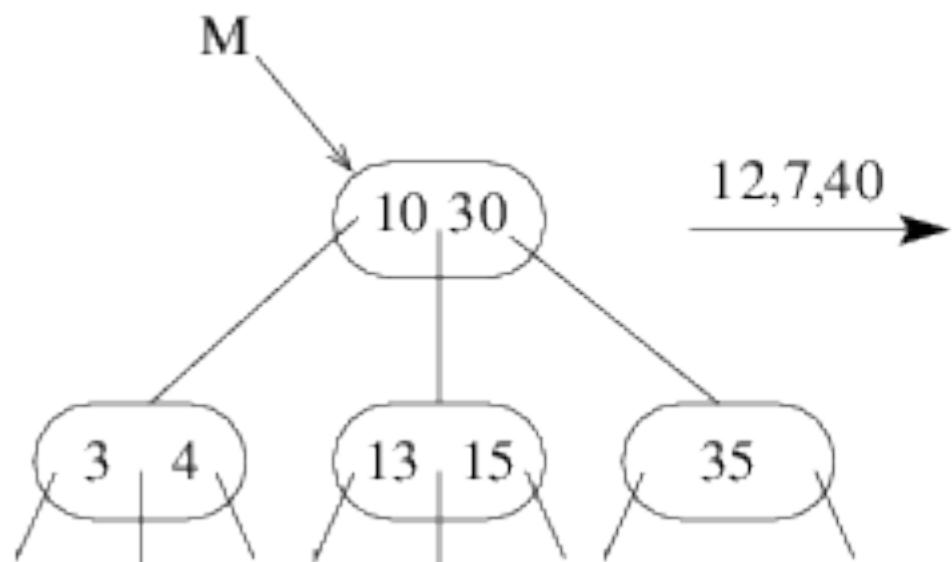
- Quando a folha é um 4-nó, fragmentamos a mesma e efetuamos a ascensão do seu elemento do meio para o pai. O novo elemento ficará em uma das duas folhas resultantes da fragmentação
- **Exercício Resolvido (4): Faça a inserção do 15**



Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, **15**, 12, 7, 40, 20, 11 e 6

# Inserção com Fragmentação na Ascensão

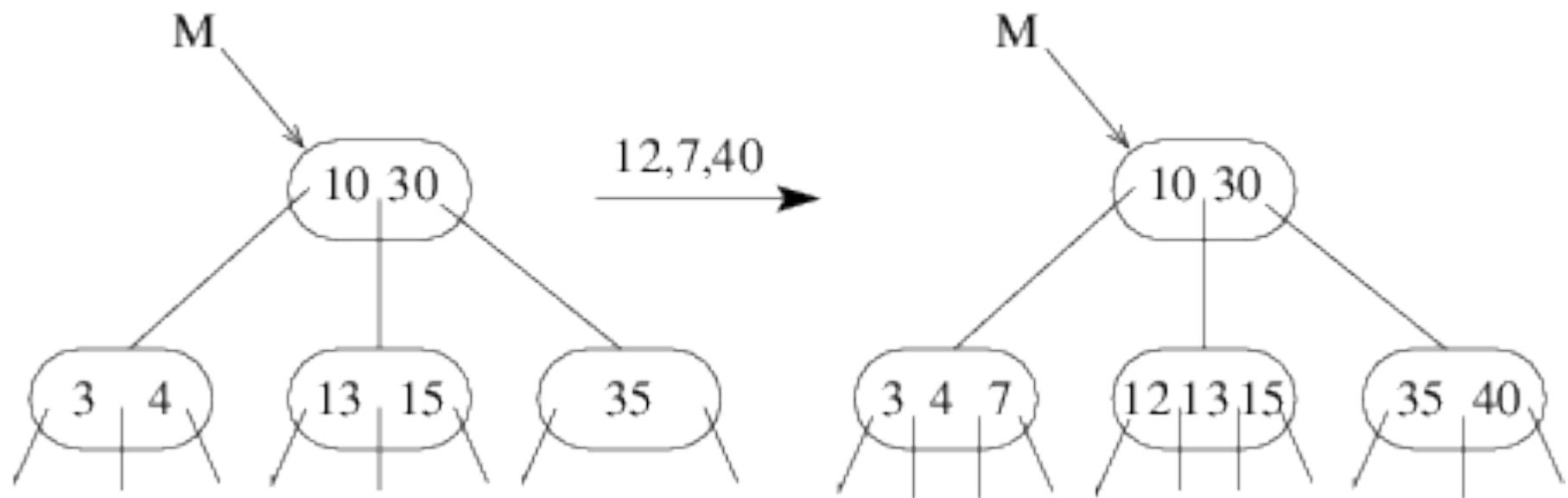
- **Exercício Resolvido (5): Faça a inserção do 12, 7 e 40**



Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, **12, 7, 40**, 20, 11 e 6

# Inserção com Fragmentação na Ascensão

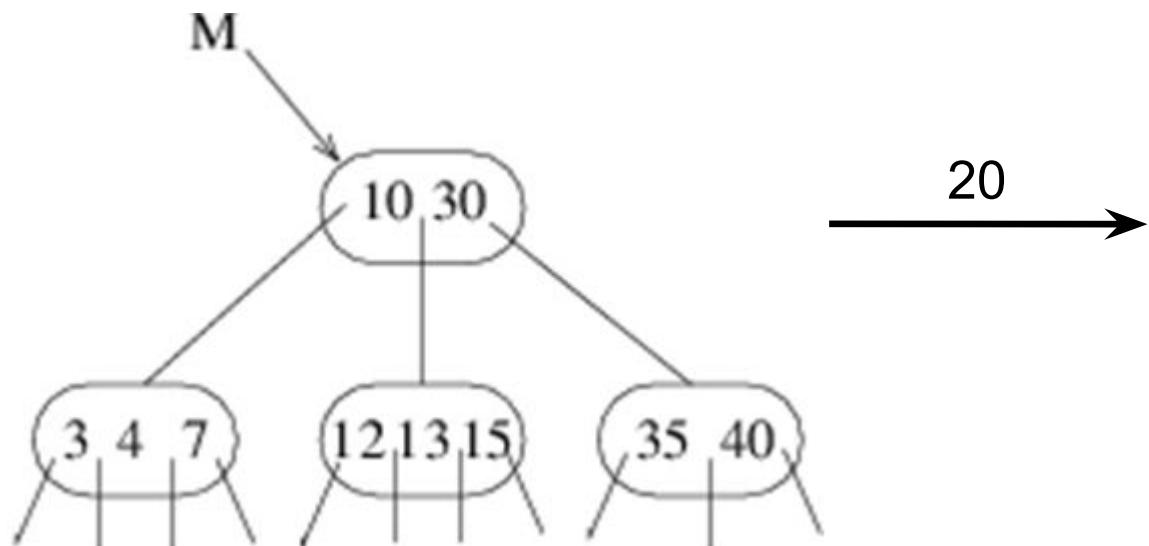
- **Exercício Resolvido (5): Faça a inserção do 12, 7 e 40**



Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, **12, 7, 40**, 20, 11 e 6

# Inserção com Fragmentação na Ascensão

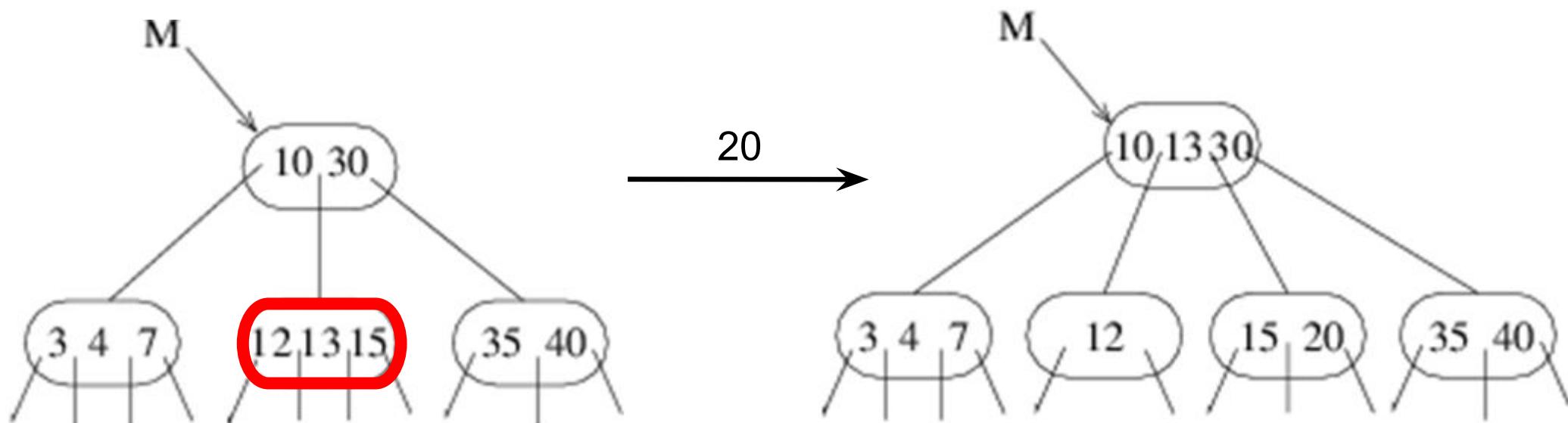
- **Exercício Resolvido (6): Faça a inserção do 20**



Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, **20**, 11 e 6

# Inserção com Fragmentação na Ascensão

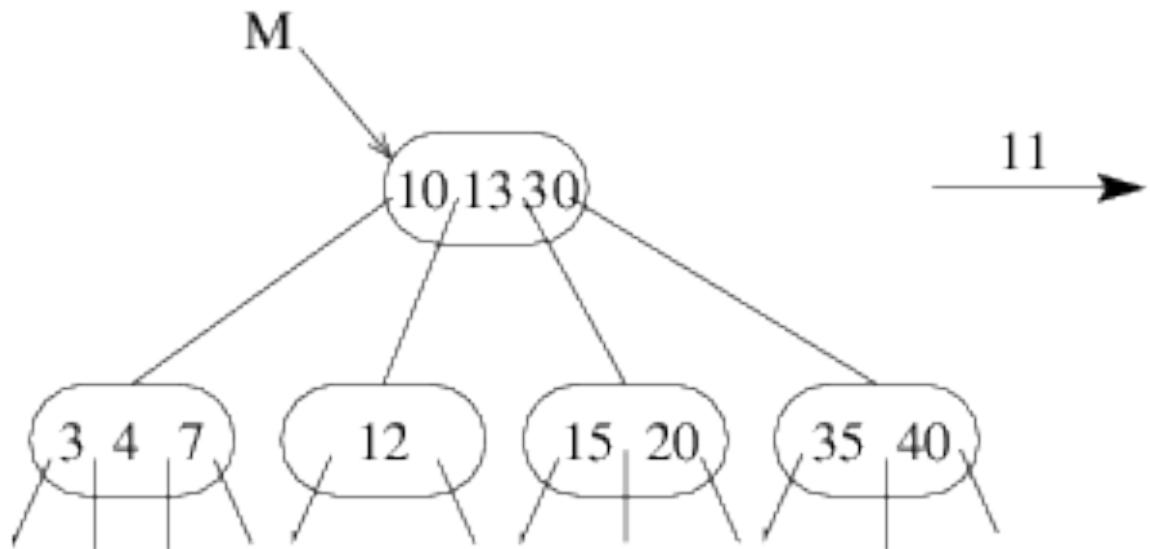
- **Exercício Resolvido (6): Faça a inserção do 20.** Essa inserção causa a fragmentação do nó (12, 13, 15), criando um nó com (12), outro com o (15) e fazendo a ascensão do (13) para o nó (10, 30)



Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, **20**, 11 e 6

# Inserção com Fragmentação na Ascensão

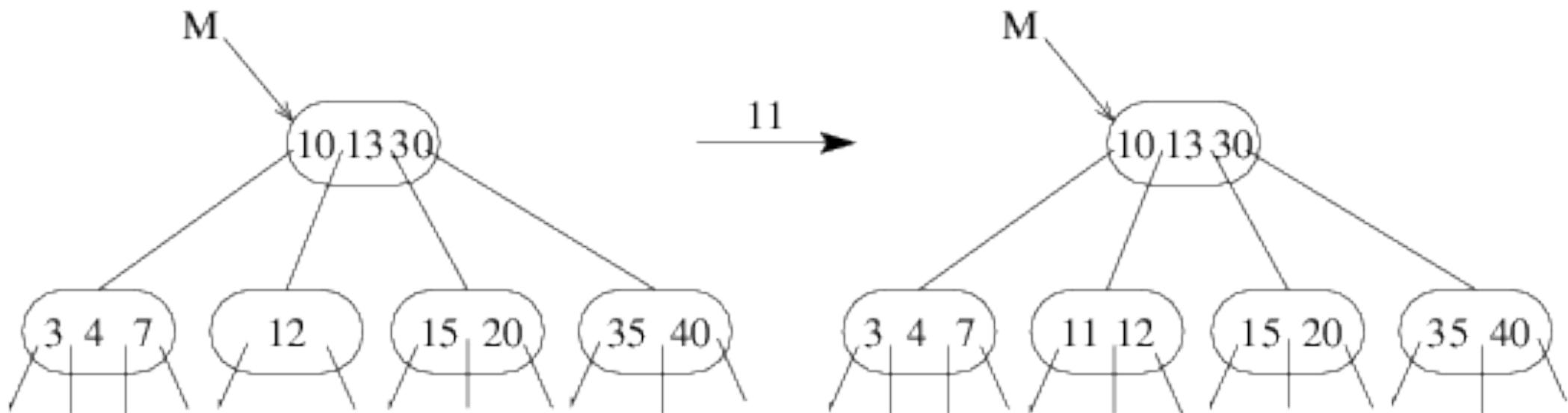
- **Exercício Resolvido (7): Faça a inserção do 11**



Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, **11** e 6

# Inserção com Fragmentação na Ascensão

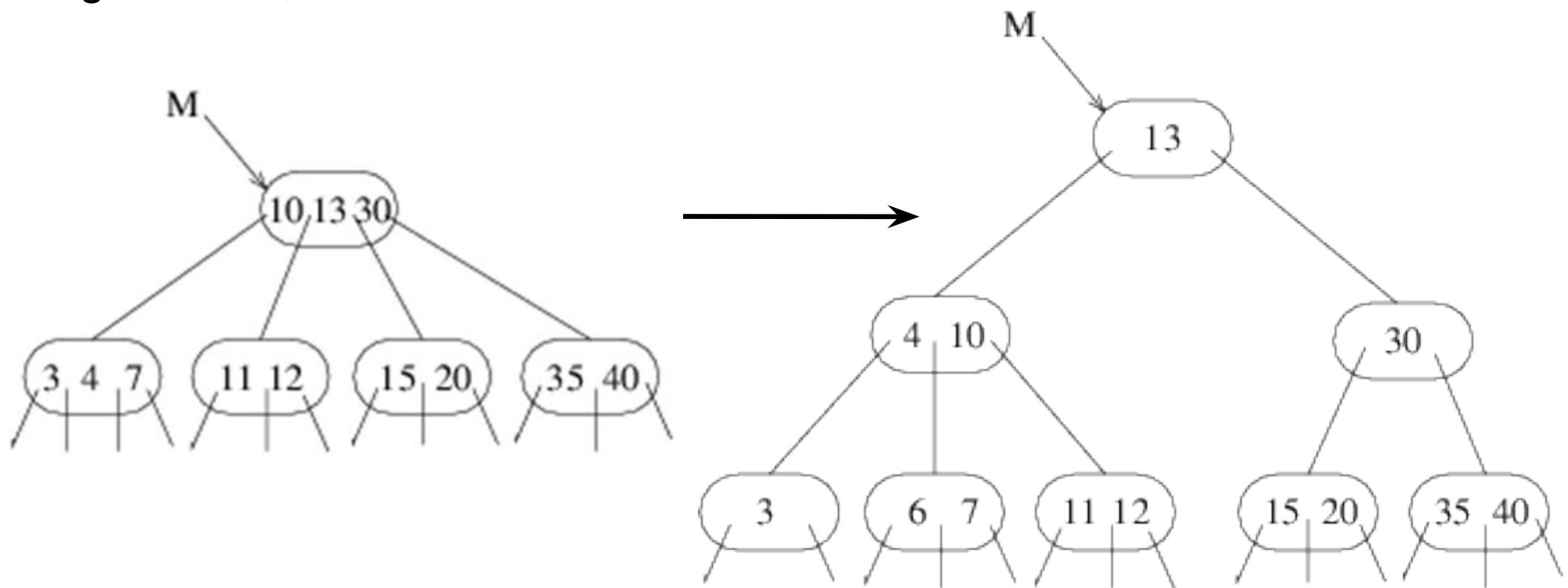
- **Exercício Resolvido (8): Faça a inserção do 11**



Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, **11** e 6

# Inserção com Fragmentação na Ascensão

- **Exercício Resolvido (8): Faça a inserção do 6.** Nesse caso, fragmentamos a folha (3,4,7) cujo pai é um 4-nó e que também é fragmentado, criando uma nova raiz

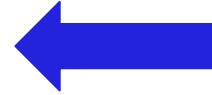


Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, 11 e **6**

# Cascata de Fragmentações

- Efeito colateral da fragmentação ascendente
- Acontece quando o caminho da inserção na árvore é formado somente por 4-nós, gerando fragmentações em toda a altura da árvore

# Introdução

- Introdução e Pesquisa
- Inserção com fragmentação por ascensão
- **Inserção com fragmentação na descida** 

# Eliminação da Cascata de Fragmentações

- Pode ser obtida proibindo que a árvore tenha **dois 4-nós seguidos**
- Garante que qualquer inserção causa, no máximo, uma fragmentação consecutiva
- Pode ser implementada fragmentando 4-nós na descida
  - Nesse caso, na pesquisa pela posição de inserção, chegando em um nó, primeiro, verificamos se o nó é um 4-nó. Em caso, positivo, fragmentamos o nó

# Fragmentação na Descida

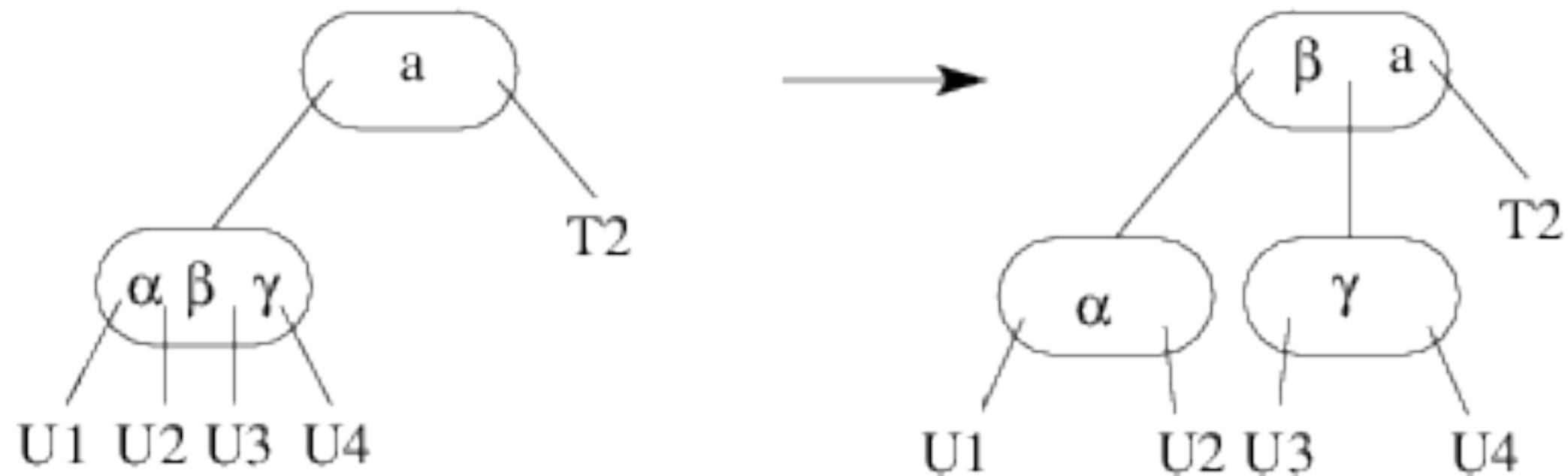
- Técnica preventiva dado que qualquer 4-nó será fragmentado antes de qualquer inserção
- Uma desvantagem são as fragmentações “inúteis”

# Exercício Resolvido (9)

- **O que acontece quando o pai de um nó é um: a) 2-nó; b) 3-nó; c) 4-nó?**

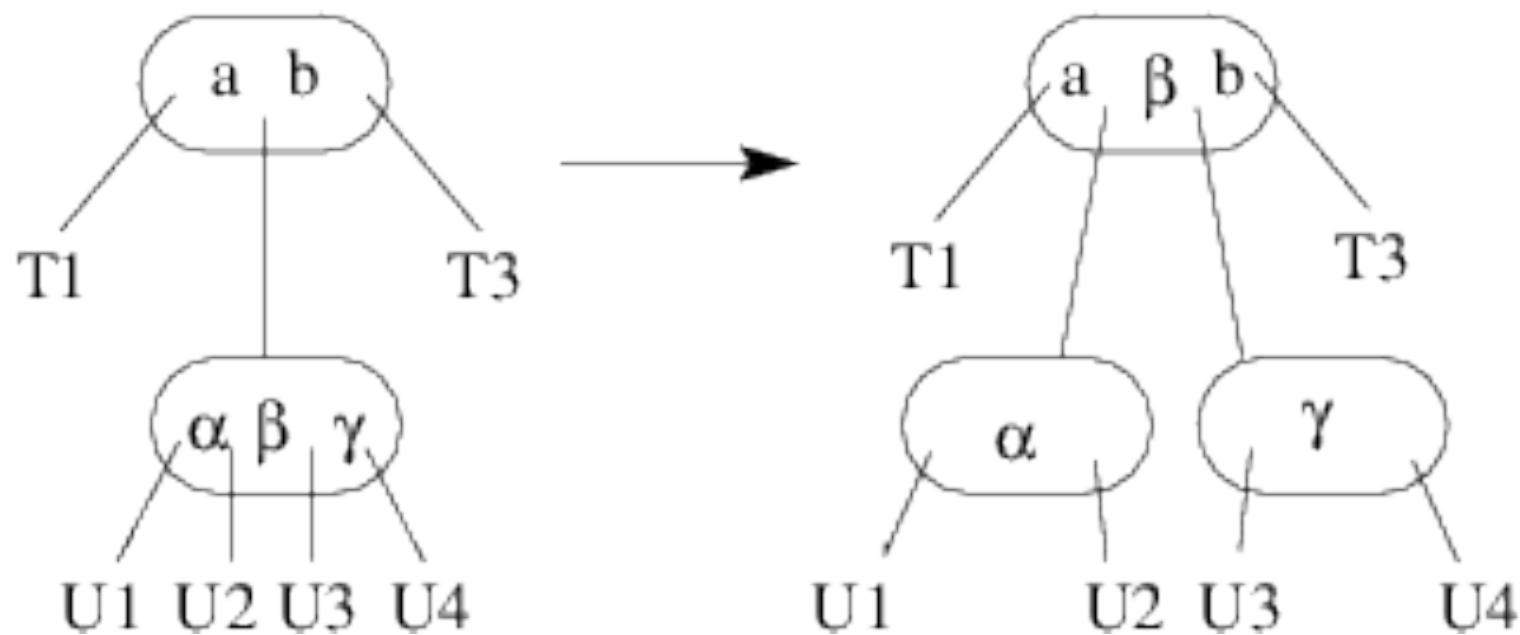
## Exercício Resolvido (9)

- O que acontece quando o pai de um nó é um: a) 2-nó; b) 3-nó; c) 4-nó?
- Quando seu pai é um 2-nó, esse pai vira um 3-nó



## Exercício Resolvido (9)

- O que acontece quando o pai de um nó é um: a) 2-nó; b) 3-nó; c) 4-nó?
- Quando seu pai é um 3-nó, esse pai vira um 4-nó



## Exercício Resolvido (9)

- **O que acontece quando o pai de um nó é um: a) 2-nó; b) 3-nó; c) 4-nó?**
- O pai nunca será um 4-nó, pois, nesse caso, o pai seria anteriormente fragmentado

# Inserção com Fragmentação na Descida

- Apresentaremos esta técnica fazendo, como exemplo, a inserção dos números 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, 11 e 6

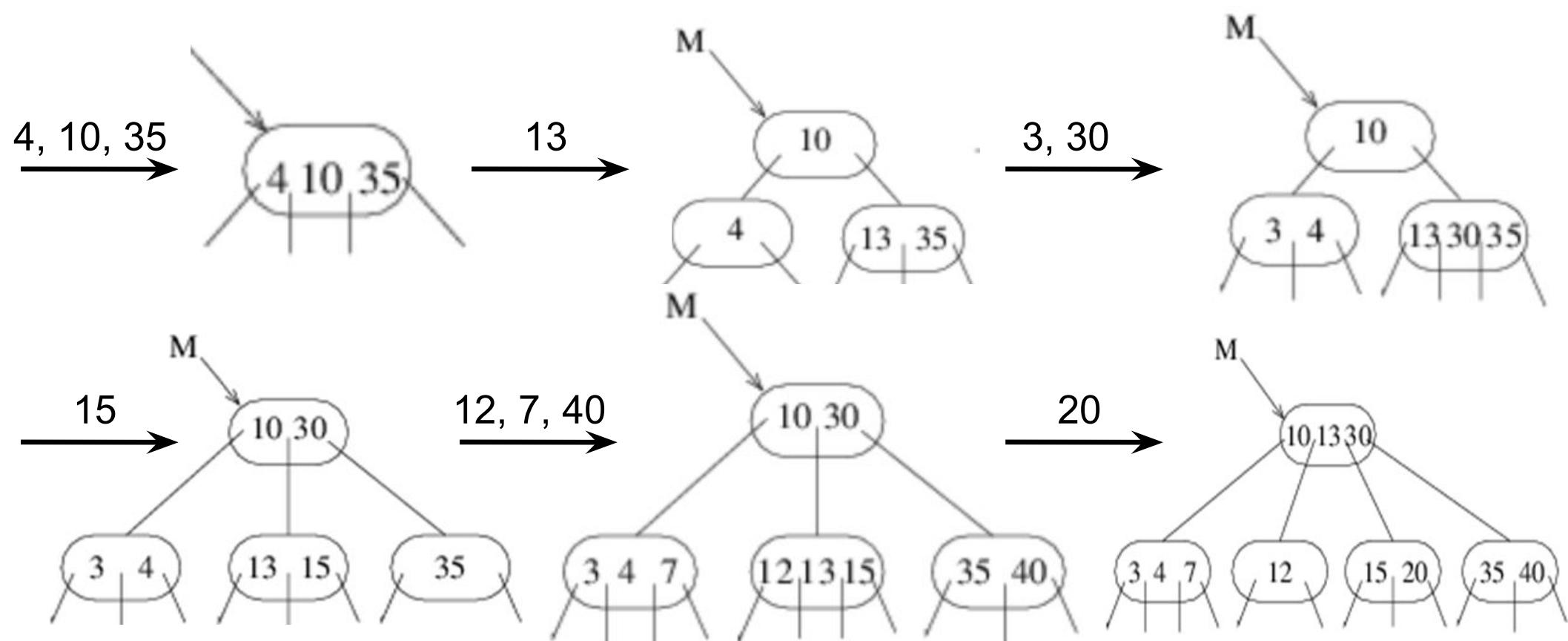
# Inserção com Fragmentação na Descida

- **Exercício Resolvido (10): Faça a inserção do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20. Veja que as duas técnicas são iguais até este ponto**

Elementos: **4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, 11 e 6**

# Inserção com Fragmentação na Descida

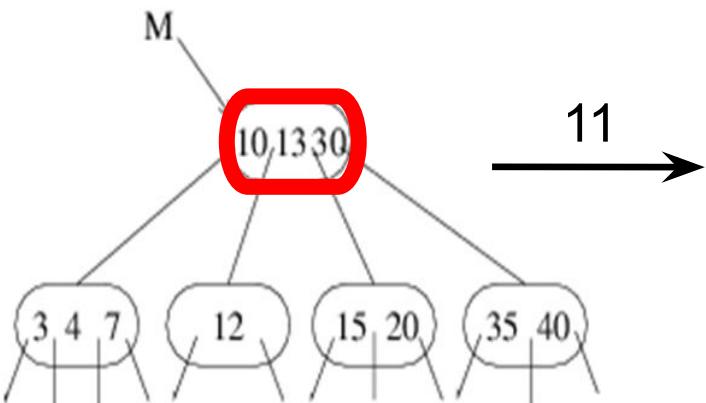
- **Exercício Resolvido (10): Faça a inserção do 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40 e 20. Veja que as duas técnicas são iguais até este ponto**



Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, 11 e 6

# Inserção com Fragmentação na Descida

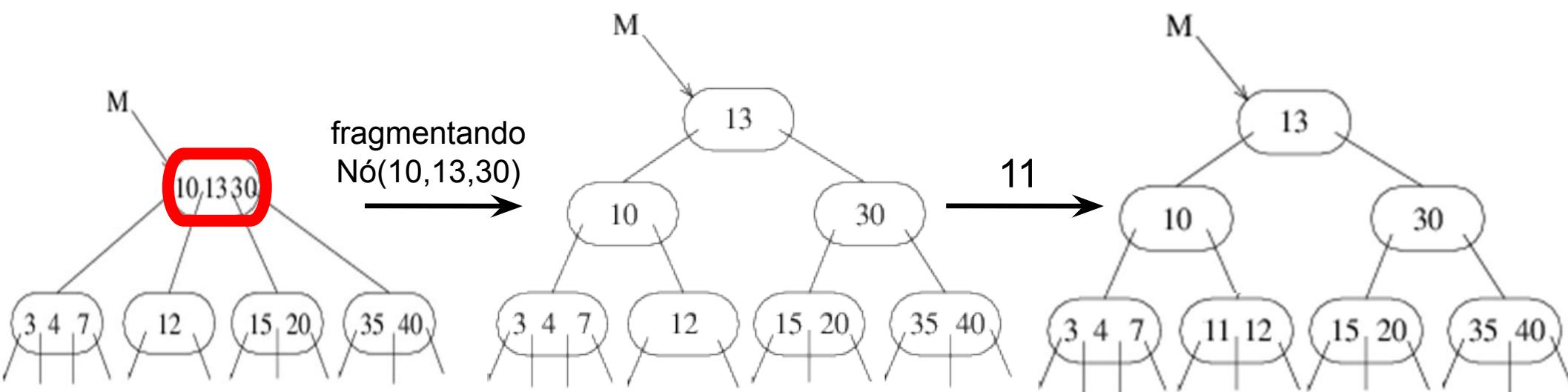
- **Exercício Resolvido (11): Faça a inserção do 11**



Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, **11** e 6

# Inserção com Fragmentação na Descida

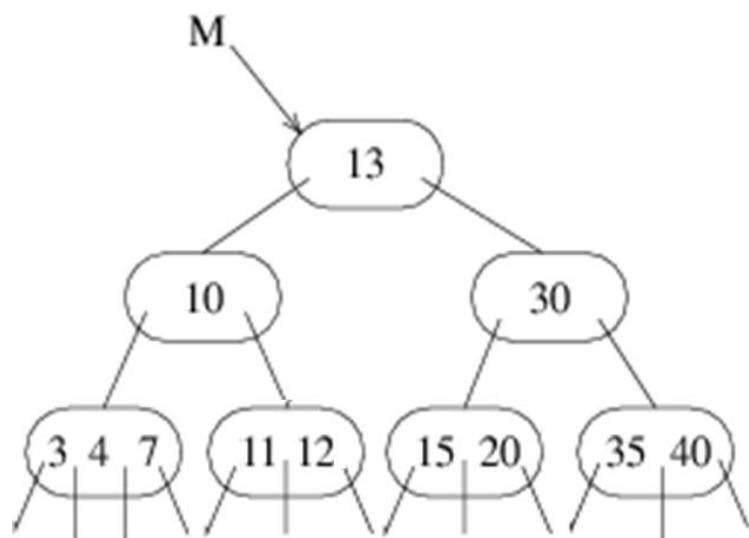
- **Exercício Resolvido (11): Faça a inserção do 11**



Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, **11** e 6

# Inserção com Fragmentação na Descida

- **Exercício Resolvido (12): Neste ponto, qual é a diferença entre as árvores geradas pelas duas técnicas?**

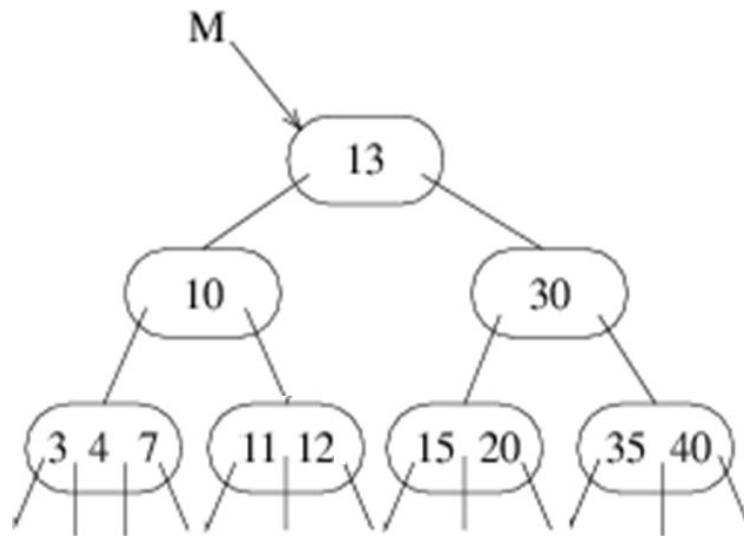


Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, **11** e 6

# Inserção com Fragmentação na Descida

- **Exercício Resolvido (12): Neste ponto, qual é a diferença entre as árvores geradas pelas duas técnicas?**

**Resposta: Esta árvore tem um nível a mais**

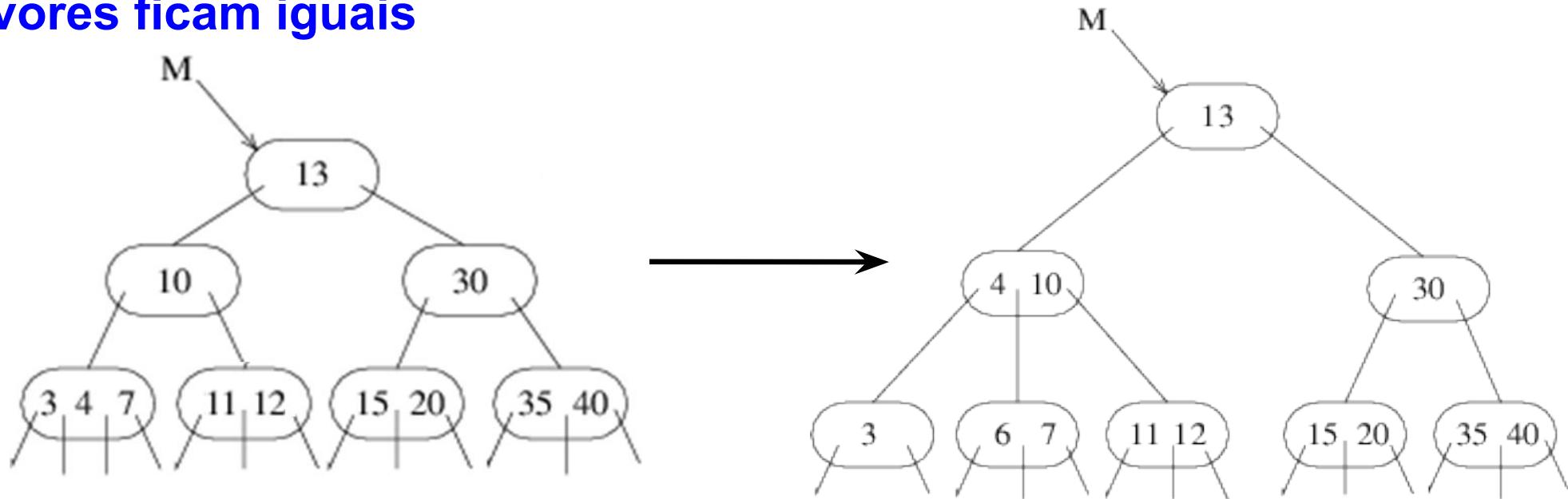


Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, **11** e 6

# Inserção com Fragmentação na Descida

- **Exercício Resolvido (12): Neste ponto, qual é a diferença entre as árvores geradas pelas duas técnicas?**

**Resposta: Contudo, após a inserção do 6, observamos que as duas árvores ficam iguais**



Elementos: 4, 35, 10, 13, 3, 30, 15, 12, 7, 40, 20, 11 e **6**

# Observações

- Nas duas técnicas, a altura da árvore aumenta quando fragmentamos a raiz
- A segunda técnica faz todos seus reequilíbrios durante a descida na árvore
- Na segunda técnica, os reequilíbrios são puramente locais
- As duas técnicas sempre operam em um caminho da raiz até uma folha
- A complexidade para o número de comparações das duas técnicas no pior e no caso médio é  $\Theta(\lg(n))$

# Observações

- A primeira técnica demanda uma pilha para restaurar o equilíbrio da árvore, repassando o caminho inverso de pesquisa
- A segunda técnica é mais fácil de parallelizar dado que os reequilíbrios são locais e não existe a dependência do caminho inverso de pesquisa
- Uma desvantagem da segunda técnica é que ela pode consumir mais memória, pois sua taxa de ocupação dos nós é menor do que a outra

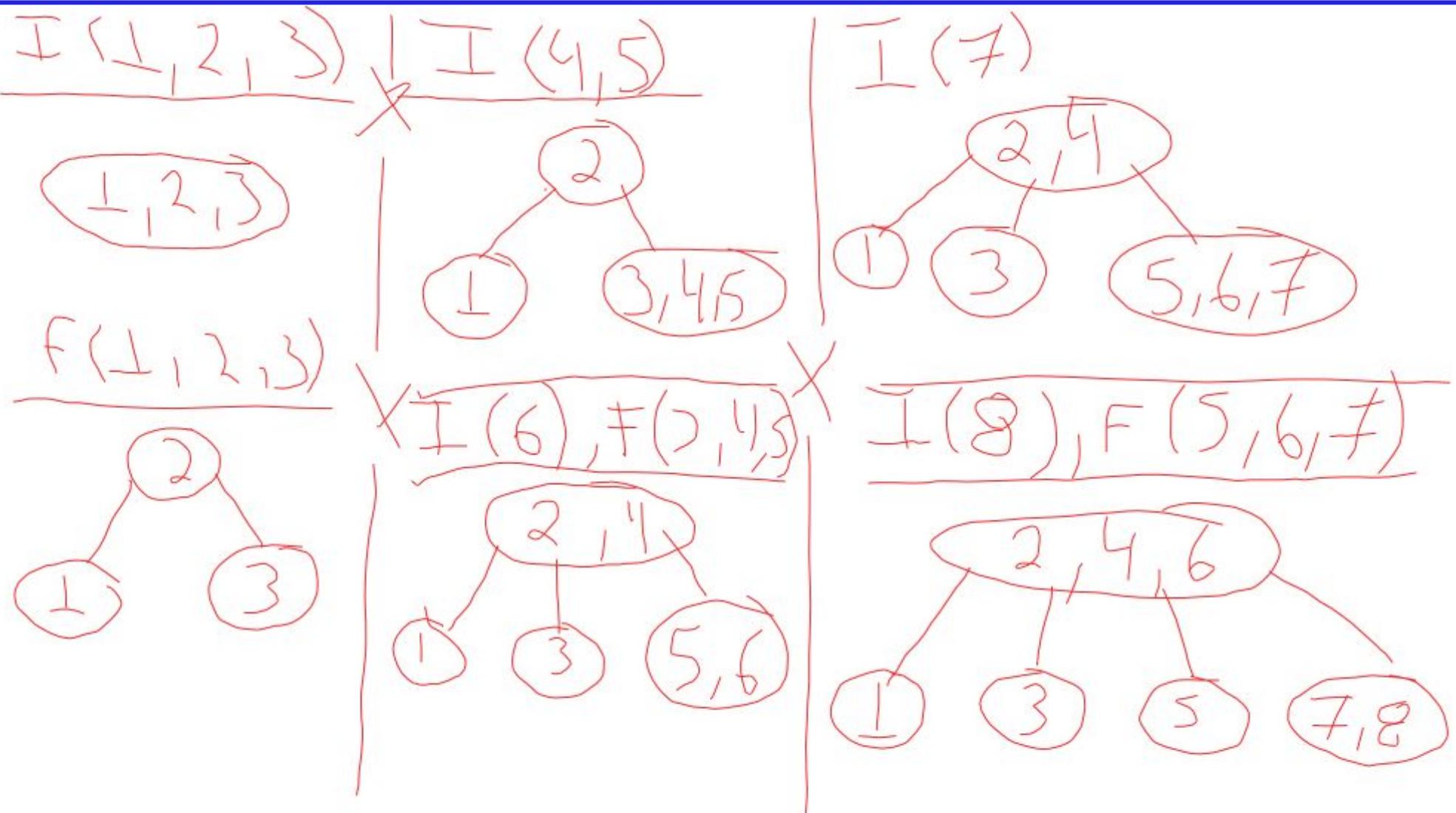
# Técnica Pró-ativa vs. Reativa

- A inserção com fragmentação por ascensão é reativa, a na descida, pró-ativa
- Técnicas reativas esperam um problema para atuar
- Técnicas pró-ativas se adiantam e tentam resolver/minimizar o problema antes que o mesmo aconteça
- Várias soluções na Computação são classificadas como pró-ativas e reativas

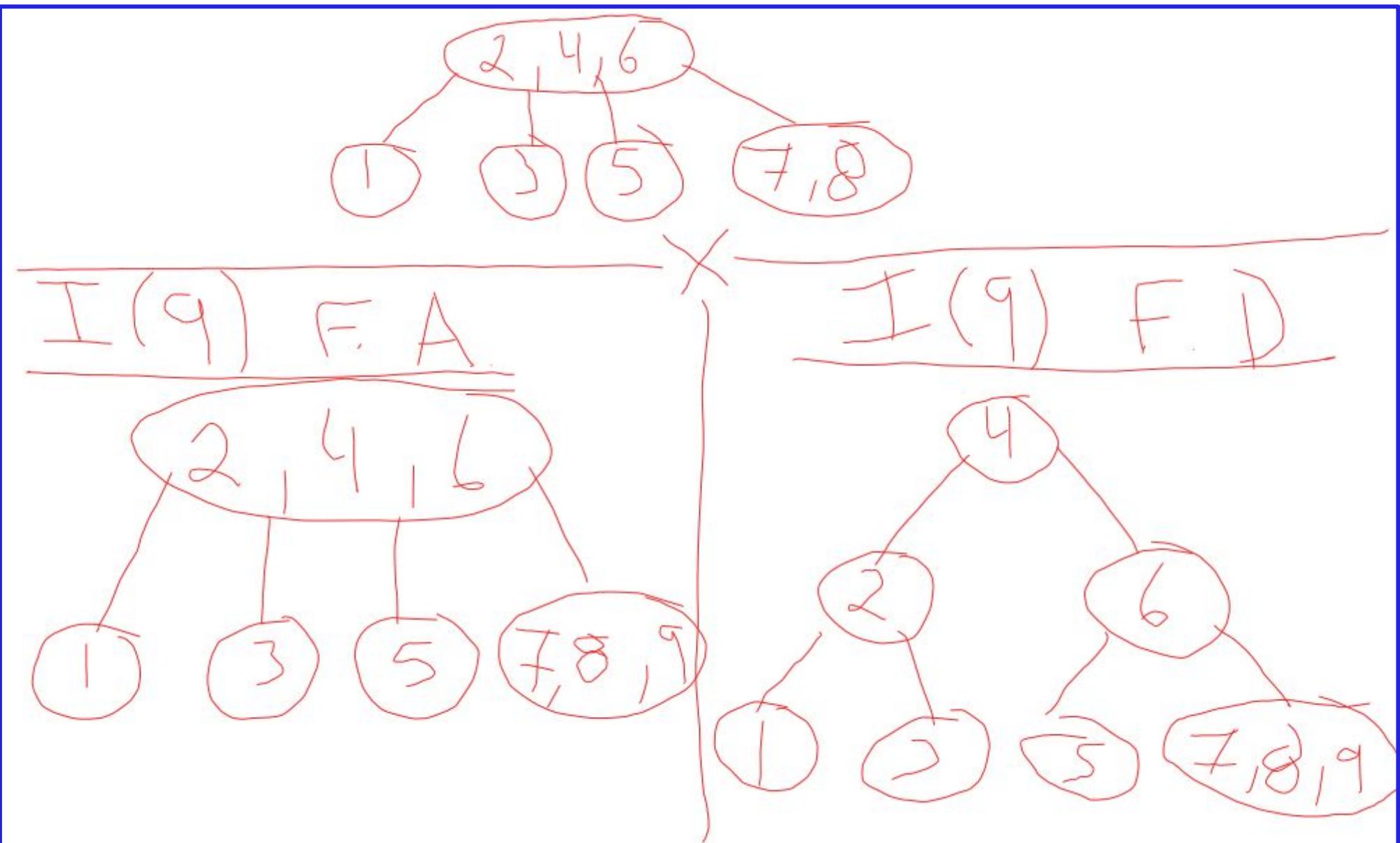
# Exercício Resolvido

- Insira os números 1 a 20 em uma 2.3.4 usando fragmentação por ascensão
- Insira os números 1 a 20 em uma 2.3.4 usando fragmentação na descida
- Insira os números 20 a 1 em uma 2.3.4 usando fragmentação por ascensão
- Insira os números 20 a 1 em uma 2.3.4 usando fragmentação na descida

## Exercício Resolvido

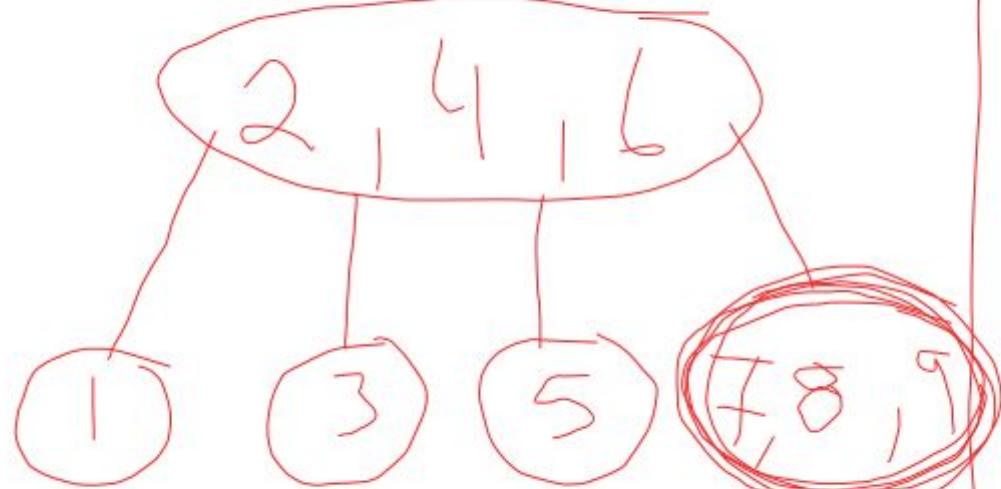


## Exercício Resolvido

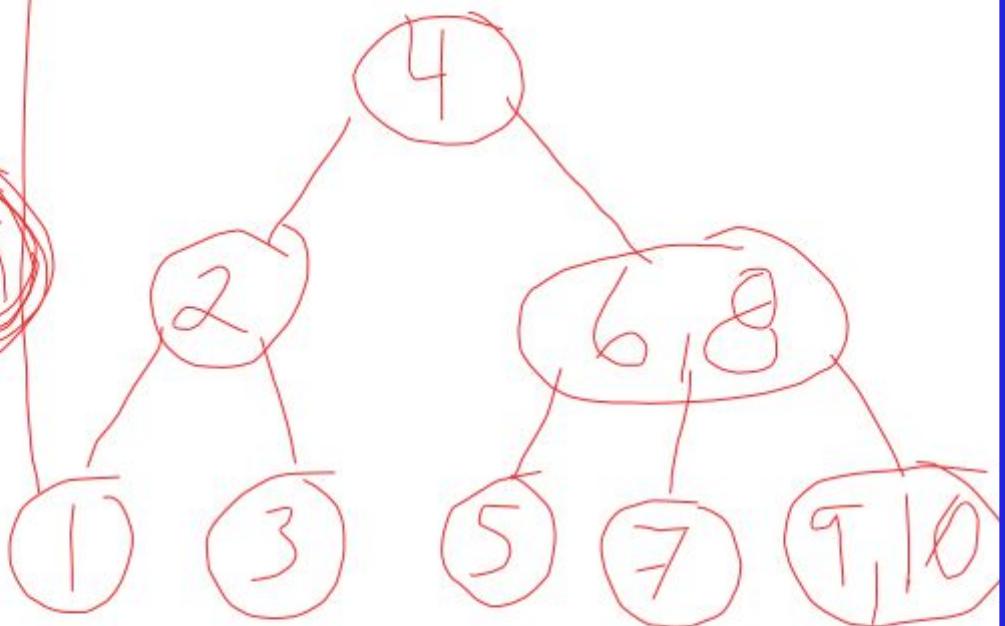


## Exercício Resolvido

I(9) F. A.



I(10) F. A.



# Exercício Resolvido

