Manipulação de Somas

Unidade I: Análise de Algoritmos

Agenda

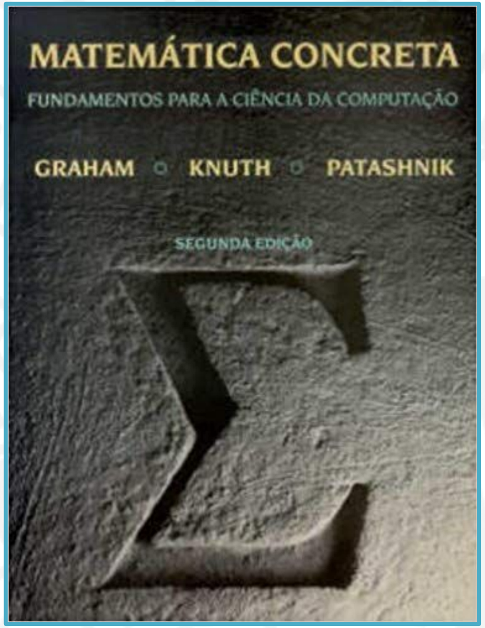
- Introdução
- Regras Básicas de Transformação
- Propriedades

Introdução

PUC Minas Virtual

Frase de [GRAHAM, 95]

A chave do sucesso na manipulação de somas está na habilidade de transformar uma soma em outra mais simples ou mais perto de algum objetivo



Regras Básicas de Transformação

As Três Regras Básicas de Transformação

- Distributividade
- Associatividade
- Comutatividade

Distributividade

- Permite mover constantes para dentro ou fora de um somatório

$$\boxed{\sum_{i \in I} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i \in I} a_i}$$

- Por exemplo, temos:

$$c.a_0 + c.a_1 + c.a_2 = c.(a_0 + a_1 + a_2)$$

Distributividade

- Permite mover constantes para dentro ou fora de um somatório

$$\sum_{i \in I} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i \in I} a_i$$

- Outro exemplo (visto na Introdução aos Somatórios)

$$\sum_{1}^{5} 3i = 3.\sum_{1}^{5} i = 3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 3 \cdot 15 = 45$$

Distributividade

- Permite mover constantes para dentro ou fora de um somatório

$$\sum_{i \in I} c \,.\, a_i = c \,.\, \sum_{i \in I} a_i$$

- Também se aplica à divisão

$$\sum_{i \in I} \frac{a_i}{c} = \frac{1}{c} \,.\, \sum_{i \in I} a_i$$

Associatividade

- Permite quebrar um somatório em partes ou unificá-las em um somatório

$$\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$$

- Por exemplo, temos:

$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) = (a_0 + a_1 + a_2) + (b_0 + b_1 + b_2)$$

Associatividade

- Permite quebrar um somatório em partes ou unificá-las em um somatório

$$\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$$

- Outro exemplo (visto na Introdução aos Somatórios)

$$\sum_{1}^{5} (3 - 2i) = 3.\sum_{1}^{5} 1 - \sum_{1}^{5} 2i = 3(1+1+1+1+1) - [2.1+2.2+2.3+2.4+2.5]$$
$$= -15$$

Associatividade

- Permite quebrar um somatório em partes ou unificá-las em um somatório

$$\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$$

- Também se aplica à subtração

$$\sum_{i \in I} (a_i - b_i) = \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in I} b_i$$

Comutatividade

- Permite colocar os termos em qualquer ordem

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{p(i) \in I} a_{p(i)}$$

- Por exemplo, temos:

$$a_0 + a_1 + a_2 = a_2 + a_0 + a_1$$

Exemplo de Aplicação da Comutatividade

- O resultado dos programas abaixo é igual devido à regra de comutatividade

```
for(int i = 0; i < n; i++)
    for(int j = 0; j < n; j++)
        soma += mat[i][j];
```

```
for(int j = 0; j < n; j++)  //invertendo os fors
    for(int i = 0; i < n; i++)
        soma += mat[i][j];
```

```
for(int i = n-1; i >= 0; i--) //decrementando
    for(int j = n-1; j >= 0; j--)
        soma += mat[i][j];
```

Resumo das Regras Básicas de Transformação

- Distributividade

$$\sum_{i \in I} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i \in I} a_i$$

- Associatividade

$$\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$$

- Comutatividade

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{p(i) \in I} a_{p(i)}$$

Exercício Resolvido (1)

- Mostre (e justifique) se cada expressão abaixo é verdadeira ou falsa:

a) ( ) $\sum_{k=0}^{200} k^3 = \sum_{k=1}^{200} k^3$

b) ( ) $\sum_{p=0}^{1000} (3+p) = 3 + \sum_{p=0}^{1000} p$

c) ( ) $\sum_{l=1}^{n} 3l = 3.\sum_{l=1}^{n} l$

d) ( ) $\sum_{k=0}^{12} k^p = \left(\sum_{k=0}^{12} k\right)^p$

e) ( ) $\sum_{t=8}^{32} (3+t) = 75 + \sum_{t=8}^{32} t$

Exercício Resolvido (1)

- Mostre (e justifique) se cada expressão abaixo é verdadeira ou falsa:

a) (✓) $\sum_{k=0}^{200} k^3 = \sum_{k=1}^{200} k^3$

c) (✓) $\sum_{l=1}^{n} 3l = 3.\sum_{l=1}^{n} l$

e) (✓) $\sum_{t=8}^{32} (3+t) = 75+\sum_{t=8}^{32} t$

b) (✗) $\sum_{p=0}^{1000} (3+p) = 3+\sum_{p=0}^{1000} p$

d) (✗) $\sum_{k=0}^{12} k^p = \left(\sum_{k=0}^{12} k\right)^p$

Exercício Resolvido (2)

- Aplique associatividade para unificar os dois somatórios abaixo:

$$S_n = \sum_{3}^{n} a_i + \sum_{1}^{n} b_i$$

Exercício Resolvido (2)

- Aplique associatividade para unificar os dois somatórios abaixo:

$$S_n = \sum_{3}^{n} a_i + \sum_{1}^{n} b_i$$

$$= (a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n)$$

$$= b_1 + b_2 + \sum_{3}^{n} (a_i + b_i)$$

$$= -a_1 - a_2 + \sum_{1}^{n} (a_i + b_i)$$

Exercício Resolvido (3)

- Usando a comutatividade, prove que os somatórios abaixo são iguais

$$\sum_{0 \le i \le 4} (3 + 2.i) = \sum_{0 \le i \le 4} (3 + 2.(4-i))$$

Exercício Resolvido (3)

- Usando a comutatividade, prove que os somatórios abaixo são iguais

$$\sum_{0 \leq i \leq 4} (3 + 2.i) = \sum_{0 \leq i \leq 4} (3 + 2.(4-i))$$

RESPOSTA:

Primeiro somatório: (3 + 2.**0**) + (3 + 2.**1**) + (3 + 2.**2**) + (3 + 2.**3**) + (3 + 2.**4**)

No segundo, temos: (3 + 2.**[4-0]**) + (3 + 2.**[4-1]**) + (3 + 2.**[4-2]**) + (3 + 2.**[4-3]**) + (3 + 2.**[4-4]**)

Logo, por comutatividade, temos apenas a alteração da ordem dos elementos

Exercício Resolvido (3)

- Usando a comutatividade, prove que os somatórios abaixo são iguais

$$\sum_{0 \leq i \leq 4} (3 + 2.i) = \sum_{0 \leq i \leq 4} (3 + 2.(4-i))$$

RESPOSTA:

Primeiro somatório: (3 + 2.**0**) + (3 + 2.**1**) + (3 + 2.**2**) + (3 + 2.**3**) + (3 + 2.**4**)

No segundo, temos: (3 + 2.**[4-0]**) + (3 + 2.**[4-1]**) + (3 + 2.**[4-2]**) + (3 + 2.**[4-3]**) + (3 + 2.**[4-4]**)

Logo, por comutatividade, temos apenas a alteração da ordem dos elementos

OBSERVAÇÃO: (n-i) “simula” um decremento no valor de i

Exercício Resolvido (4)

- Aplique as regras de transformação para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma **Progressão Aritmética (PA)**

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} (a + b.i)$$

Exercício Resolvido (4)

- Aplique as regras de transformação para obter a fórmula fechada da soma S dos

Recordando Progressão Aritmética

- Uma PA é uma sequência cuja razão (diferença) entre dois termos consecutivos é constante. Por exemplo, 5, 7, 9, 11, 13, …
- Cada termo da PA será $\mathbf{a_i = a + b.i}$, onde **a** é o termo inicial; **b**, a razão; e, **i**, a ordem do termo
- Na sequência acima, **a** e **b** são iguais a 5 e 2, respectivamente. Logo, temos: (5 + 2.0), (5 + 2.1), (5 + 2.2), (5 + 2.3), (5 + 2.4), …

Exercício Resolvido (4)

- Aplique as regras de transformação para obter a fórmula fechada da soma S dos

Recordando Progressão Aritmética

- **<u>Exercício</u>**: Mostre os valores de **a** e **b** na sequência 1, 4, 7, 10, 13, …

PUC Minas Virtual

Exercício Resolvido (4)

- Aplique as regras de transformação para obter a fórmula fechada da soma S dos

Recordando Progressão Aritmética

- **<u>Exercício</u>**: Mostre os valores de **a** e **b** na sequência 1, 4, 7, 10, 13, …

Os valores a e b são 1 e 3, respectivamente, logo, temos:

$1 + 3 \,.\, 0 = 1$

$1 + 3 \,.\, 1 = 4$

$1 + 3 \,.\, 2 = 7$

$1 + 3 \,.\, 3 = 10$

$1 + 3 \,.\, 4 = 13$

…

Exercício Resolvido (4)

- Aplique as regras de transformação para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma Progressão Aritmética (PA)

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} (a + b.i)$$

Exercício Resolvido (4)

- Aplique as regras de transformação para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma Progressão Aritmética (PA)

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} (a + b.i)$$

- **Aplicando a comutatividade**, podemos somar do maior para o menor, trocando ***i*** por ***(n-i)***:

$$S_n = \sum_{0 \leq (n-i) \leq n} [a + b.(n-i)]$$

Exercício Resolvido (4)

- Aplique as regras de transformação para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma Progressão Aritmética (PA)

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} (a + b.i)$$

- **Aplicando a comutatividade**, podemos somar do maior para o menor, trocando ***i*** por ***(n-i)***:

$$S_n = \sum_{0 \leq (n-i) \leq n} [a + b.(n-i)] \quad = \quad \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.(n-i)] \quad = \quad \sum_{0 \leq i \leq n} [a + bn - bi]$$

Exercício Resolvido (4)

- Como $S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i] = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.n - b.i]$, podemos afirmar que:

$$2S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i] + \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.n - b.i]$$

Exercício Resolvido (4)

- Como $S_n = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.i] = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.n - b.i]$, podemos afirmar que:

$$2S_n = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.i] + \sum_{0 \le i \le n} [a + b.n - b.i]$$

- **Aplicando associatividade**, podemos combinar os dois somatórios:

$$2S_n = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.i + a + b.n - b.i]$$

Exercício Resolvido (4)

- Como $S_n = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.i] = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.n - b.i]$, podemos afirmar que:

$$2S_n = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.i] + \sum_{0 \le i \le n} [a + b.n - b.i]$$

- **Aplicando associatividade**, podemos combinar os dois somatórios:

$$2S_n = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.i + a + b.n - b.i] = \sum_{0 \le i \le n} [2.a + b.n]$$

- **Simplificando**, temos:

Exercício Resolvido (4)

- **Usando distributividade**, temos:

$$2S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [2.a + b.n] = (2.a + b.n) \, . \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$

OBSERVAÇÃO:
Como [2.a + b.n] não depende de i, ele pode “sair” do somatório

Exercício Resolvido (4)

- **Substituindo no somatório**, temos:

$$2S_n = \sum_{0 \le i \le n} [2.a + b.n] = (2.a + b.n) \cdot \sum_{0 \le i \le n} 1$$

(n+1)

Exercício Resolvido (4)

- **Substituindo no somatório**, temos:

$$2S_n = (2.a + b.n).(n+1)$$

Exercício Resolvido (4)

- **Substituindo no somatório**, temos:

$$2S_n = (2.a + b.n).(n+1)$$

- **Dividindo por dois**, temos:

$$S_n = \frac{(2.a + b.n).(n+1)}{2}$$

Exercício Resolvido (4)

- **Finalmente**, temos:

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.i] = \frac{(2.a + b.n).(n+1)}{2}$$

Exercício Resolvido (5)

- Sabendo a fórmula da soma de uma progressão aritmética qualquer, mostre a fórmula fechada para o somatório de Gauss

$$\sum_{0 \le i \le n} i = 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

COLA

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.i] = \frac{(2.a + b.n).(n+1)}{2}$$

Exercício Resolvido (5)

- Sabendo a fórmula da soma de uma progressão aritmética qualquer, mostre a fórmula fechada para o somatório de Gauss

$$\sum_{0 \le i \le n} i = 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

RESPOSTA: Nesse caso, temos uma progressão cujos valores **a** e **b** são zero e um, respectivamente

$$\boxed{S_n = \sum_{0 \le i \le n} [0 + 1.i] = \frac{(2.0 + 1.n).(n+1)}{2} = \frac{n.(n+1)}{2}}$$

Exercício Resolvido (6)

- Dada a fórmula fechada do somatório dos ***n*** primeiros números inteiros, mostre um algoritmo mais eficiente que o apresentado abaixo:

```
int somatorio(int n){
    int soma = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        soma += i;
    }
    return soma;
}
```

Exercício Resolvido (6)

- Dada a fórmula fechada do somatório dos ***n*** primeiros números inteiros, mostre um algoritmo mais eficiente que o apresentado abaixo:

```
int somatorio(int n){
    int soma = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        soma += i;
    }
    return soma;
}
```

```
int somatorio(int n){
    return ((n * (n+1))/2);
}
```

Exercício Resolvido (7)

- O Algoritmo de Seleção realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

PUC Minas Virtual

Exercício Resolvido (7)

- O Algoritmo de Seleção realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- **Aplicando associatividade**, temos:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) = \sum_{0 \leq i \leq n-2} n - \sum_{0 \leq i \leq n-2} i - \sum_{0 \leq i \leq n-2} 1$$

Exercício Resolvido (7)

- O Algoritmo de Seleção realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- **Substituindo nos somatórios**, temos:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) = \sum_{0 \leq i \leq n-2} n - \sum_{0 \leq i \leq n-2} i - \sum_{0 \leq i \leq n-2} 1$$

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} n \rightarrow \boxed{n \, . \, (n-1)}$$

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} 1 \rightarrow \boxed{1 \, . \, (n-1)}$$

Exercício Resolvido (7)

- O Algoritmo de Seleção realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- **Substituindo nos somatórios**, temos:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) = n.(n-1) - \sum_{0 \leq i \leq n-2} i - 1 . (n-1)$$

$$\boxed{n . (n-1)} \qquad \boxed{1 . (n-1)}$$

Exercício Resolvido (7)

- O Algoritmo de Seleção realiza $\sum_{0 \le i \le n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- **Substituindo nos somatórios**, temos:

$$\sum_{0 \le i \le n-2} (n - i - 1) = n.(n-1) - \sum_{0 \le i \le n-2} i - 1 . (n-1)$$

Sabendo que: $\sum_{0 \le i \le \mathbf{n}} i = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \sum_{0 \le i \le n-2} i = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$

Exercício Resolvido (7)

- O Algoritmo de Seleção realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- **Substituindo nos somatórios**, temos:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) = n.(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - 1 . (n-1)$$

Sabendo que: $\sum_{0 \leq i \leq n} i = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \sum_{0 \leq i \leq n-2} i = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$

Exercício Resolvido (7)

- O Algoritmo de Seleção realiza $\sum_{0 \le i \le n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- **Assim**, temos:

$$\sum_{0 \le i \le n-2} (n - i - 1) = n.(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - 1 . (n-1)$$

Exercício Resolvido (7)

- O Algoritmo de Seleção realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- **Assim**, temos:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) = n.(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - 1 . (n-1)$$

$$= \frac{2n(n-1) - (n-2)(n-1) - 2(n-1)}{2}$$

Exercício Resolvido (7)

- O Algoritmo de Seleção realiza $\sum_{0 \le i \le n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- **Assim**, temos:

$$\sum_{0 \le i \le n-2} (n - i - 1) = n.(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - 1 . (n-1)$$

$$= \frac{2n(n-1) - (n-2)(n-1) - 2(n-1)}{2}$$

$$= \frac{2n^2 - 2n - [n^2 - 3n + 2] - 2n + 2}{2}$$

Exercício Resolvido (7)

- O Algoritmo de Seleção realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- **Assim**, temos:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) = n.(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - 1 . (n-1)$$

$$= \frac{2n(n-1) - (n-2)(n-1) - 2(n-1)}{2}$$

$$= \frac{2n^2 - 2n - [n^2 - 3n + 2] - 2n + 2}{2}$$

$$= \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \Theta(n^2)$$

Exercício Resolvido (8): Justifique as Expressões

a) $\sum_{1}^{n} i = \sum_{0}^{n} i$

b) $\sum_{1}^{n} a_i \neq \sum_{0}^{n} a_i$

c) $\sum_{1}^{n} a_i = \sum_{0}^{n-1} a_{i+1}$

Exercício Resolvido (8): Justifique as Expressões

$$a)\ \sum_{1}^{n} i = \sum_{0}^{n} i$$

Resposta: Os dois somatórios são iguais, entretanto, o segundo faz uma soma a mais que é com seu primeiro termo cujo valor é zero.

Exercício Resolvido (8): Justifique as Expressões

b) $\sum_{1}^{n} a_i \neq \sum_{0}^{n} a_i$

Resposta: Os somatórios são diferentes, porque, não necessariamente, o primeiro termo (a_0) é igual a zero

Exercício Resolvido (8): Justifique as Expressões

c) $\sum_{1}^{n} a_i = \sum_{0}^{n-1} a_{i+1}$

Resposta: O resultado dos dois somatórios é $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n)$

Propriedades

Agenda - Propriedades

- P1: Combinando Conjuntos
- P2: Base para a Perturbação

Propriedade P1: Combinando Conjuntos

Propriedade (P1): Combinando Conjuntos

- Combina conjuntos de índices diferentes. No caso, se I e I' são dois conjuntos quaisquer de inteiros, então:

$$\sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I'} a_i = \sum_{i \in I \cup I'} a_i + \sum_{i \in I \cap I'} a_i$$

Propriedade (P1): Combinando Conjuntos

- Combina conjuntos de índices diferentes. No caso, se I e I' são dois conjuntos quaisquer de inteiros, então:

$$\sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I'} a_i = \sum_{i \in I \cup I'} a_i + \sum_{i \in I \cap I'} a_i$$

Observe que a união garante todos os elementos e a interseção, os repetidos

Propriedade (P1): Combinando Conjuntos

- Combina conjuntos de índices diferentes. No caso, se I e I' são dois conjuntos quaisquer de inteiros, então:

$$\sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I'} a_i = \sum_{i \in I \cup I'} a_i + \sum_{i \in I \cap I'} a_i$$

Observe que a união garante todos os elementos e a interseção, os repetidos

EXEMPLO: Se A = {1, 2, 3} e B = {3, 5, 7}, então $A \cup B$ = {1, 2, 3, 5, 7} e $A \cap B$ = {3}

Exercício Resolvido (9)

- Sendo $1 \leq m \leq n$, aplique a propriedade P1 para unificar os dois somatórios (quase disjuntos) abaixo:

$$\sum_{1}^{m} a_i + \sum_{m}^{n} a_i =$$

PUC Minas Virtual

Exercício Resolvido (9)

- Sendo 1 ≤ m ≤ n, aplique a propriedade P1 para unificar os dois somatórios (quase disjuntos) abaixo:

$$\sum_{1}^{m} a_i + \sum_{m}^{n} a_i = \sum_{1}^{n} a_i + a_m$$

Exercício Resolvido (10)

- Sendo 1 ≤ m ≤ n, aplique a propriedade P1 para unificar os dois somatórios (quase disjuntos) abaixo:

$$\sum_{1}^{m-3} a_i + \sum_{m}^{n} a_i =$$

Exercício Resolvido (10)

- Sendo $1 \leq m \leq n$, aplique a propriedade P1 para unificar os dois somatórios (quase disjuntos) abaixo:

$$\sum_{1}^{m-3} a_i + \sum_{m}^{n} a_i = \sum_{1}^{n} a_i - a_{m-2} - a_{m-1}$$

Propriedade P2:
Base para a Perturbação

Propriedade (P2): Base para a Perturbação

- Dada uma soma genérica qualquer $S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i$, temos que:

$$S_{n+1} = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{(n+1)}$$

Propriedade (P2): Base para a Perturbação

- Podemos reescrever S_{n+1} de duas formas:

1ª Forma

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

2ª Forma

$$S_{n+1} = \sum_{0 \leq i \leq n+1} a_i$$

Propriedade (P2): Base para a Perturbação

- Podemos reescrever S_{n+1} de duas formas:

1ª Forma

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

2ª Forma

$$S_{n+1} = \sum_{0 \leq i \leq n+1} a_i = a_0 + \sum_{1 \leq i \leq n+1} a_i$$

Propriedade (P2): Base para a Perturbação

- Podemos reescrever S_{n+1} de duas formas:

1ª Forma

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

2ª Forma

$$S_{n+1} = \sum_{0 \leq i \leq n+1} a_i = a_0 + \sum_{1 \leq i \leq n+1} a_i = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$$

Propriedade (P2): Base para a Perturbação

- Podemos reescrever S_{n+1} de duas formas:

1ª Forma

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

2ª Forma

$$S_{n+1} = \sum_{0 \leq i \leq n+1} a_i = a_0 + \sum_{1 \leq i \leq n+1} a_i = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$$

Em ambos: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n+1}$

Propriedade (P2): Base para a Perturbação

- Podemos reescrever S_{n+1} de duas formas:

1ª Forma	$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$
2ª Forma	$S_{n+1} = \cancel{\sum_{0 \le i \le n+1} a_i} = a_0 + \cancel{\sum_{1 \le i \le n+1} a_i} = a_0 + \sum_{0 \le i \le n} a_{i+1}$

Propriedade (P2): Base para a Perturbação

- Podemos reescrever S_{n+1} de duas formas:

1ª Forma

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

2ª Forma

$$S_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$$

Propriedade (P2): Base para a Perturbação

- Resumindo, temos as duas igualdades:

$$\cancel{S_{n+1}} = S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$$

1ª Forma **2ª Forma**

Propriedade (P2): Base para a Perturbação

- Resumindo, temos as duas igualdades:

$$\cancel{S_{n+1}} = \underbrace{S_n + a_{n+1}}_{\text{1ª Forma}} = \underbrace{a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}}_{\text{2ª Forma}}$$

Na prática, para perturbar, resolveremos a igualdade abaixo

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$$

Isso, frequentemente, **resulta na equação fechada para S_n**

Exercício Resolvido (11)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i$$

COLA

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$$

COLA

$$a_i = a.x^i$$

Exercício Resolvido (11)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} a.x^i$$

- **Aplicando P2**, temos:

$$S_n + a.x^{n+1} = a.x^0 + \sum_{0 \le i \le n} a.x^{i+1}$$

COLA

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \le i \le n} a_{i+1}$$

COLA

$$a_i = a.x^i$$

Exercício Resolvido (11)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i$$

- **Aplicando P2**, temos:

$$\boxed{S_n + a.x^{n+1} = a.x^0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^{i+1}}$$

Exercício Resolvido (11)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} a.x^i$$

- **Fazendo algebrismo**, temos:

$$\boxed{S_n + a.x^{n+1} = a.x^0 + \sum_{0 \le i \le n} a.x^{i+1}}$$

Lembre que $x^{i+1} = x \,.\, x^i$

Exercício Resolvido (11)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i$$

- **Fazendo algebrismo**, temos:

$$S_n + a.x^{n+1} = a.x^0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^{i+1}$$

$$\sum_{0 \leq i \leq n} (a.x^i x)$$

Exercício Resolvido (11)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} a.x^i$$

- **Aplicando a distributividade**, temos:

$$S_n + a.x^{n+1} = a.x^0 + \sum_{0 \le i \le n} a.x^{i+1}$$

$$\sum_{0 \le i \le n} (a.x^i x) = x. \sum_{0 \le i \le n} (a.x^i)$$

Exercício Resolvido (11)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i$$

- **Aplicando a distributividade**, temos:

$$S_n + a.x^{n+1} = a.x^0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^{i+1}$$

$$\sum_{0 \leq i \leq n} (a.x^i x) = x.\sum_{0 \leq i \leq n} (a.x^i) = x.S_n$$

Exercício Resolvido (11)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} a.x^i$$

- **Aplicando a distributividade**, temos:

$$\boxed{S_n + a.x^{n+1} = a.x^0 + \sum_{0 \le i \le n} a.x^{i+1}}$$

$$\boxed{\sum_{0 \le i \le n} (a.x^i x) = x.\sum_{0 \le i \le n} (a.x^i) = \mathbf{x.S_n}}$$

Exercício Resolvido (11)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i$$

- **Aplicando a distributividade**, temos:

$$S_n + a.x^{n+1} = a.x^0 + x.S_n$$

$$\sum_{0 \leq i \leq n} (a.x^i x) = x.\sum_{0 \leq i \leq n} (a.x^i) = x.S_n$$

Exercício Resolvido (11)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i$$

- **Aplicando a distributividade**, temos:

$$\boxed{S_n + a.x^{n+1} = a.x^0 + x.S_n}$$

Exercício Resolvido (11)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i$$

- **Fazendo algebrismo**, temos:

$$S_n + a.x^{n+1} = a.x^0 + x.S_n$$

$$x^0 = 1$$

Exercício Resolvido (11)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i$$

- **Fazendo algebrismo**, temos:

$$S_n + a.x^{n+1} = a + x.S_n$$

$$x^0 = 1$$

Exercício Resolvido (11)

- **Fazendo algebrismo**, temos:

$$S_n + a.x^{n+1} = a + x.S_n$$

Exercício Resolvido (11)

- **Fazendo algebrismo**, temos:

$$S_n + \mathbf{a.x^{n+1}} = a + \mathbf{x.S_n} \Rightarrow$$

$$S_n - \mathbf{x.S_n} = a - \mathbf{a.x^{n+1}}$$

Invertendo o lado dos termos marcados

Exercício Resolvido (11)

- **Fazendo algebrismo**, temos:

$$S_n + a.x^{n+1} = a + x.S_n \quad \Rightarrow$$

$$S_n - x.S_n = a - a.x^{n+1} \quad \Rightarrow$$

Colocando S_n em evidência

$$(1 - x)\, S_n = a - a.x^{n+1}$$

Exercício Resolvido (11)

- **Fazendo algebrismo**, temos:

$$S_n + a.x^{n+1} = a + x.S_n \quad \Rightarrow$$

$$S_n - x.S_n = a - a.x^{n+1} \quad \Rightarrow$$

$$(1 - x)\, S_n = a - a.x^{n+1} \quad \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \quad \text{para } x \neq 1 \quad \Rightarrow$$

Invertendo o lado de (1-x)

Exercício Resolvido (11)

- **Fazendo algebrismo**, temos:

$$S_n + a.x^{n+1} = a + x.S_n \quad \Rightarrow$$

$$S_n - x.S_n = a - a.x^{n+1} \quad \Rightarrow$$

$$(1 - x)\, S_n = a - a.x^{n+1} \quad \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \text{ para } x \neq 1 \quad \Rightarrow$$

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \text{ para } x \neq 1$$

Exercício Resolvido (11)

- **Fazendo algebrismo**, temos:

$$S_n + a.x^{n+1} = a + x.S_n \qquad \Rightarrow$$

Observe que quando x = 1, temos:

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} (a.1^i) = \sum_{0 \le i \le n} a = (n+1).a$$

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} a.x^i = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \quad \text{para } x \neq 1$$

Exercício Resolvido (12)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i.2^i$$

COLA

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$$

Exercício Resolvido (12)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i.2^i$$

$$S_n = 0.2^0 + 1.2^1 + 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + 5.2^5 + \ldots + n.2^n$$

$$S_{n+1} = 0.2^0 + 1.2^1 + 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + 5.2^5 + \ldots + n.2^n + (n+1).2^{(n+1)}$$

COLA

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$$

Exercício Resolvido (12)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i.2^i$$

$$S_n = 0.2^0 + 1.2^1 + 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + 5.2^5 + \dots + n.2^n$$

$$S_{n+1} = 0.2^0 + 1.2^1 + 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + 5.2^5 + \dots + n.2^n + (n+1).2^{(n+1)}$$

COLA

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$$

Exercício Resolvido (12)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i.2^i$$

$$S_n = 0.2^0 + 1.2^1 + 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + 5.2^5 + ... + n.2^n$$

$$S_{n+1} = 0.2^0 + 1.2^1 + 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + 5.2^5 + ... + n.2^n + (n+1).2^{(n+1)}$$

COLA

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$$

$$\sum_{0 \leq i \leq n} (i+1).2^{(i+1)}$$

Exercício Resolvido (12)

- **Aplicando P2,** temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} \quad = \quad 0.2^0 + \sum_{0 \le i \le n} (i+1).2^{i+1}$$

COLA	$a_i = i.2^i$
COLA	$S_n = \sum_{0 \le i \le n} i.2^i$
COLA	$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \le i \le n} a_{i+1}$

Exercício Resolvido (12)

- **Aplicando P2,** temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 0.2^0 + \sum_{0 \le i \le n} (i+1).2^{i+1}$$

$$0.2^0 \rightarrow \boxed{0}$$

Exercício Resolvido (12)

- **Como $0.2^0 = 0$,** temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = \sum_{0 \le i \le n} (i+1).2^{i+1}$$

Exercício Resolvido (12)

- **Aplicando associatividade**, temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = \sum_{0 \le i \le n} (i+1).2^{i+1}$$

$$\sum_{0 \le i \le n} (i+1).2^{i+1} = \sum_{0 \le i \le n} (i.2^{i+1} + 1.2^{i+1})$$

Exercício Resolvido (12)

- **Aplicando associatividade**, temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = \sum_{0 \le i \le n} (i+1).2^{i+1}$$

$$\sum_{0 \le i \le n} (i+1).2^{i+1} = \sum_{0 \le i \le n} (i.2^{i+1} + 1.2^{i+1})$$

$$\sum_{0 \le i \le n} i.2^{i+1} + \sum_{0 \le i \le n} 2^{i+1}$$

Exercício Resolvido (12)

- **Aplicando associatividade**, temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = \sum_{0 \le i \le n} i.2^{i+1} + \sum_{0 \le i \le n} 2^{i+1}$$

$$\sum_{0 \le i \le n} (i+1).2^{i+1} = \sum_{0 \le i \le n} (i.2^{i+1} + 1.2^{i+1})$$

$$\sum_{0 \le i \le n} i.2^{i+1} + \sum_{0 \le i \le n} 2^{i+1}$$

Exercício Resolvido (12)

- **Aplicando distributividade**, temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = \sum_{0 \le i \le n} i.2^{i+1} + \sum_{0 \le i \le n} 2^{i+1}$$

Lembre que $2^{i+1} = 2 \times 2^i$

Exercício Resolvido (12)

- **Aplicando distributividade**, temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = \mathbf{2}.\sum_{0 \le i \le n} i.2^{i} + \mathbf{2}.\sum_{0 \le i \le n} 2^{i}$$

Exercício Resolvido (12)

- **Substituindo S_n**, temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.\sum_{0 \le i \le n} i.2^i + 2 . \sum_{0 \le i \le n} 2^i$$

$$\boxed{S_n}$$

COLA

$$\boxed{S_n = \sum_{0 \le i \le n} i.2^i}$$

Exercício Resolvido (12)

- **Substituindo S_n**, temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2 . \sum_{0 \le i \le n} 2^i$$

S_n

Exercício Resolvido (12)

- **Substituindo S_n**, temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2S_n + 2 . \sum_{0 \leq i \leq n} 2^i$$

Exercício Resolvido (12)

- E agora José?

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2S_n + 2 . \sum_{0 \leq i \leq n} 2^i$$

E agora José?

Exercício Resolvido (12)

- **Vimos que**:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2S_n + 2 . \sum_{0 \le i \le n} 2^i$$

E agora José?

Vimos que

$$\sum_{0 \le i \le n} a.x^i = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \quad \text{para } x \neq 1$$

Exercício Resolvido (12)

- **Logo**:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2S_n + 2 . \sum_{0 \leq i \leq n} 2^i$$

E agora José?

$$\sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \text{ para } x \neq 1$$

Fazendo a = 1 e x = 2, temos $\sum_{0 \leq i \leq n} 1.2^i$

Exercício Resolvido (12)

- **Logo**:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2S_n + 2 . \sum_{0 \leq i \leq n} 2^i$$

E agora José?

$$\sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \quad \text{para } x \neq 1$$

Fazendo a = 1 e x = 2, temos $\sum_{0 \leq i \leq n} 2^i$

Exercício Resolvido (12)

- **Logo**:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2S_n + 2 . \sum_{0 \leq i \leq n} 2^i$$

E agora José?

$$\sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \text{ para } x \neq 1$$

Fazendo a = 1 e x = 2, temos $\sum_{0 \leq i \leq n} 2^i = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$

Exercício Resolvido (12)

- **Logo**:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2S_n + 2 . \sum_{0 \le i \le n} 2^i$$

E agora José?

$$\sum_{0 \le i \le n} a.x^i = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \text{ para } x \neq 1$$

Fazendo a = 1 e x = 2, temos $\sum_{0 \le i \le n} 2^i = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{n+1}}{-1}$

Exercício Resolvido (12)

- **Logo**:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2S_n + 2 . \sum_{0 \le i \le n} 2^i$$

E agora José?

$$\sum_{0 \le i \le n} a.x^i = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \quad \text{para } x \neq 1$$

Fazendo a = 1 e x = 2, temos $\sum_{0 \le i \le n} 2^i = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 1$

Exercício Resolvido (12)

- **Logo**:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2S_n + 2 . (2^{n+1} - 1)$$

E agora José?

$$\sum_{0 \le i \le n} a.x^i = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \quad \text{para } x \neq 1$$

Fazendo a = 1 e x = 2, temos $\sum_{0 \le i \le n} 2^i = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 1$

Exercício Resolvido (12)

- **Fazendo algebrismo**, temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2(2^{n+1} - 1)$$

Exercício Resolvido (12)

- **Fazendo algebrismo**, temos:

$$\mathbf{S_n} + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + \mathbf{2(2^{n+1} - 1)} \Rightarrow$$

$$(n+1).2^{n+1} - 2.(2^{n+1} - 1) = 2.S_n - S_n$$

Invertendo os termos em vermelho de lado

Exercício Resolvido (12)

- **Fazendo algebrismo**, temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2(2^{n+1} - 1) \Rightarrow$$

$$(n+1).2^{n+1} - 2.(2^{n+1} - 1) = \mathbf{2.S_n - S_n} \Rightarrow$$

$$S_n = (n+1).2^{n+1} - 2.2^{n+1} + 2$$

Invertendo S_n de lado

Exercício Resolvido (12)

- **Fazendo algebrismo**, temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2(2^{n+1} - 1) \Rightarrow$$

$$(n+1).2^{n+1} - 2.(2^{n+1} - 1) = 2.S_n - S_n \Rightarrow$$

$$S_n = \mathbf{(n+1).2^{n+1}} - 2.2^{n+1} + 2 \Rightarrow$$

$$S_n = n2^{n+1} + 2^{n+1} - 2.2^{n+1} + 2$$

Resolvendo $(n+1).2^{n+1}$

Exercício Resolvido (12)

- **Fazendo algebrismo**, temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2(2^{n+1} - 1) \Rightarrow$$

$$(n+1).2^{n+1} - 2.(2^{n+1} - 1) = 2.S_n - S_n \Rightarrow$$

$$S_n = (n+1).2^{n+1} - 2.2^{n+1} + 2 \Rightarrow$$

$$S_n = n2^{n+1} + \mathbf{2^{n+1} - 2.2^{n+1}} + 2 \Rightarrow$$

$$S_n = n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2$$

Resolvendo $2^{n+1} - 2.2^{n+1}$

Exercício Resolvido (12)

- **Fazendo algebrismo**, temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2(2^{n+1} - 1) \Rightarrow$$

$$(n+1).2^{n+1} - 2.(2^{n+1} - 1) = 2.S_n - S_n \Rightarrow$$

$$S_n = (n+1).2^{n+1} - 2.2^{n+1} + 2 \Rightarrow$$

$$S_n = n2^{n+1} + 2^{n+1} - 2.2^{n+1} + 2 \Rightarrow$$

$$S_n = \mathbf{n2^{n+1} - 2^{n+1}} + 2 \Rightarrow$$

$$S_n = (n-1).2^{n+1} + 2$$

Colocando 2^{n+1} em evidência

Exercício Resolvido (12)

- Finalmente:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i.2^i = (n-1).2^{n+1} + 2$$