Unidade III:
Fundamentos de Análise de Algoritmos

PUC Minas

Instituto de Ciências Exatas e Informática
Departamento de Ciência da Computação

Agenda

- Potência, Logaritmo, Piso e Teto, e Função
- Contagem de operações
- Aspectos da análise de algoritmos
- Função de complexidade
- Notações O, Ω e Θ

Agenda

- **Potência, Logaritmo, Piso e Teto, e Função**
- Contagem de operações
- Aspectos da análise de algoritmos
- Função de complexidade
- Notações O, Ω e Θ

Exercício Resolvido (1)

- Resolva as equações abaixo:

  a) $2^{10} =$

  b) $lg(1024) =$

  c) $lg(17) =$

  d) $\lceil lg(17) \rceil =$

  e) $\lfloor lg(17) \rfloor =$

Nota: lg (n) é a mesma coisa que o logaritmo de n na base dois, ou seja, $\log_2(n)$

Exercício Resolvido (1)

- Resolva as equações abaixo:

a) 2^{10} = **1024**

b) lg(1024) = **10**

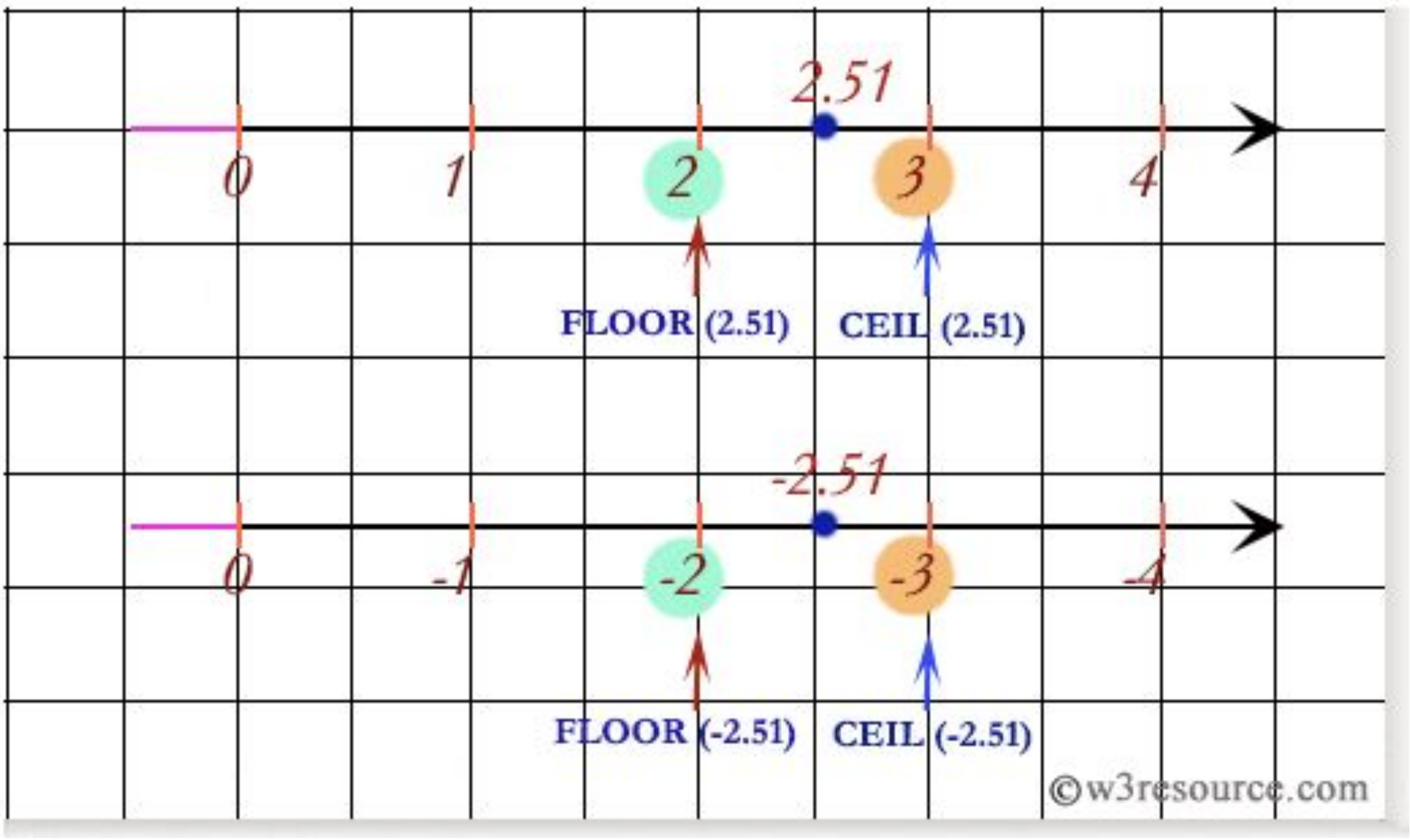
c) lg(17) = **4,08746284125034**

d) $\lceil \lg(17) \rceil$ = **5**

e) $\lfloor \lg(17) \rfloor$ = **4**

Nota: lg (n) é a mesma coisa que o logaritmo de n na base dois, ou seja, $\log_2(n)$

Piso e Teto


2.51
0
1
2
3
4
FLOOR (2.51)
CEIL (2.51)
-2.51
0
-1
-2
-3
-4
FLOOR (-2.51)
CEIL (-2.51)
©w3resource.com

Exercício Resolvido (2)

- Plote um gráfico com todas as funções abaixo:

a) $f(n) = n^3$

b) $f(n) = n^2$

c) $f(n) = n x lg(n)$

d) $f(n) = n$

e) $f(n) = sqrt(n)$

f) $f(n) = lg(n)$

Exercício Resolvido (2)

- Plote um gráfico com todas as funções abaixo:

a) $f(n) = n^3$

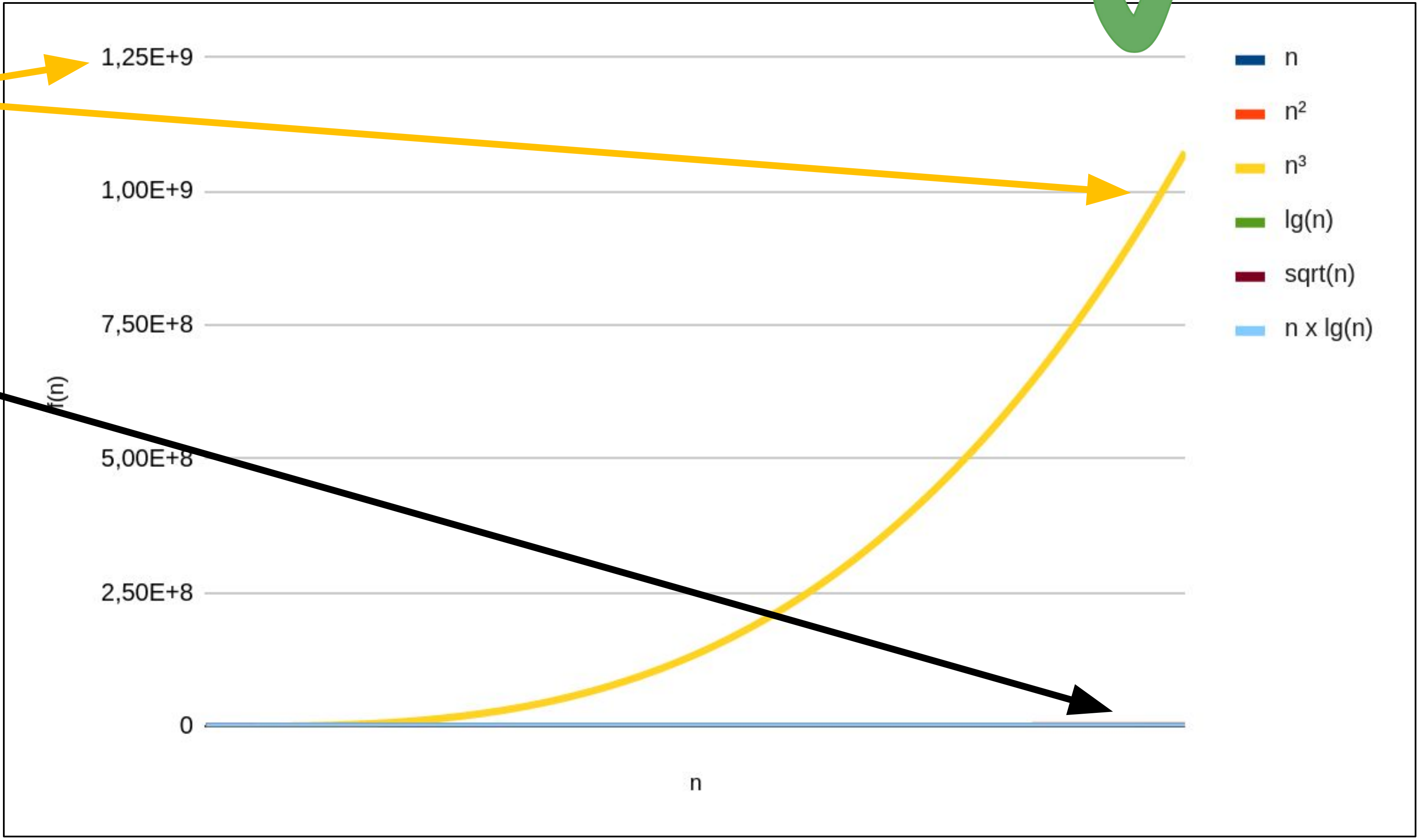
b) $f(n) = n^2$

c) $f(n) = n x lg(n)$

d) $f(n) = n$

e) $f(n) = sqrt(n)$

f) $f(n) = lg(n)$



Exercício Resolvido (2)

- Plote um gráfico com todas as funções abaixo:

a) $f(n) = n^3$

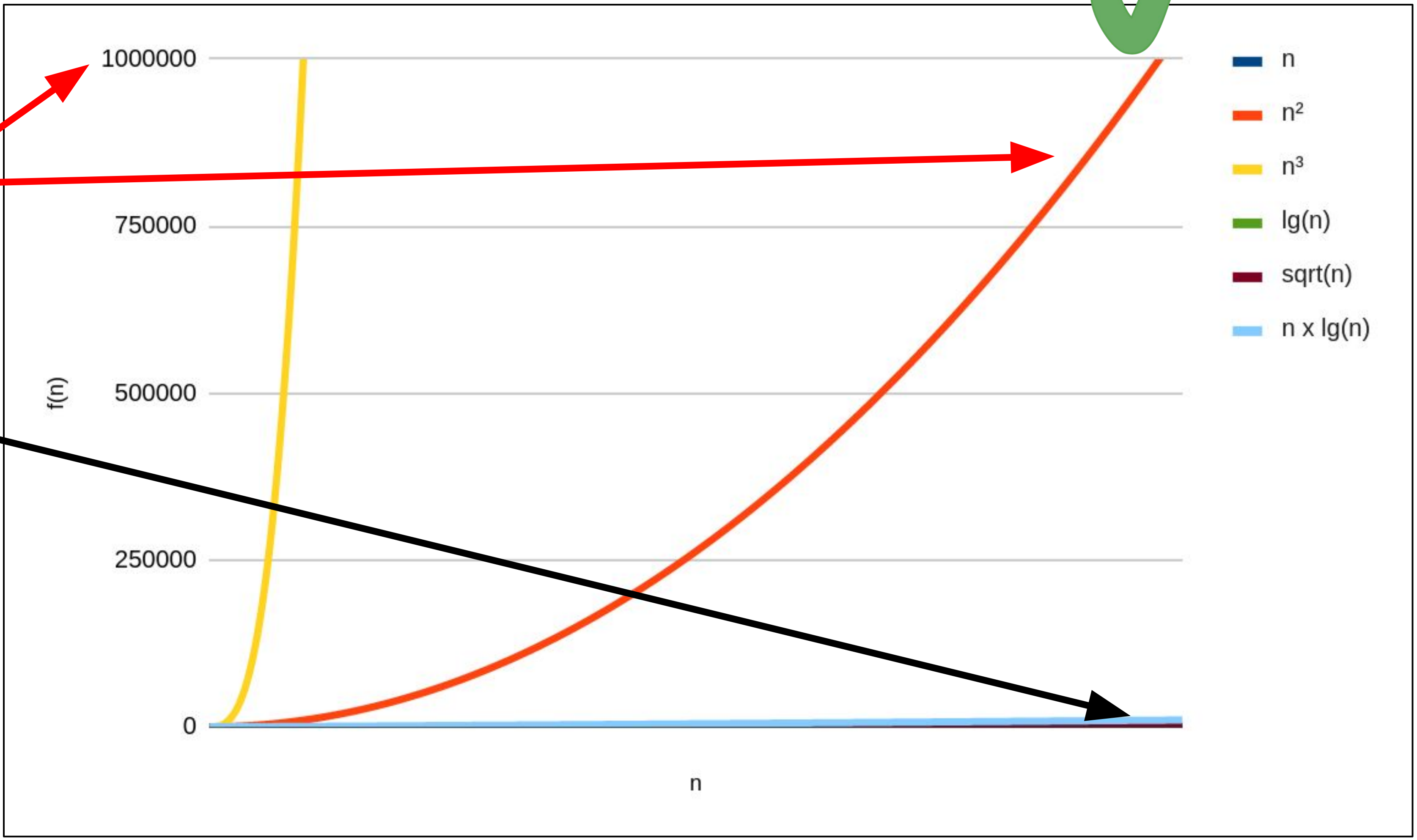
b) $f(n) = n^2$

c) f(n) = nxlg(n)

d) f(n) = n

e) f(n) = sqrt(n)

f) f(n) = lg(n)



Exercício Resolvido (2)

- Plote um gráfico com todas as funções abaixo:

a) $f(n) = n^3$

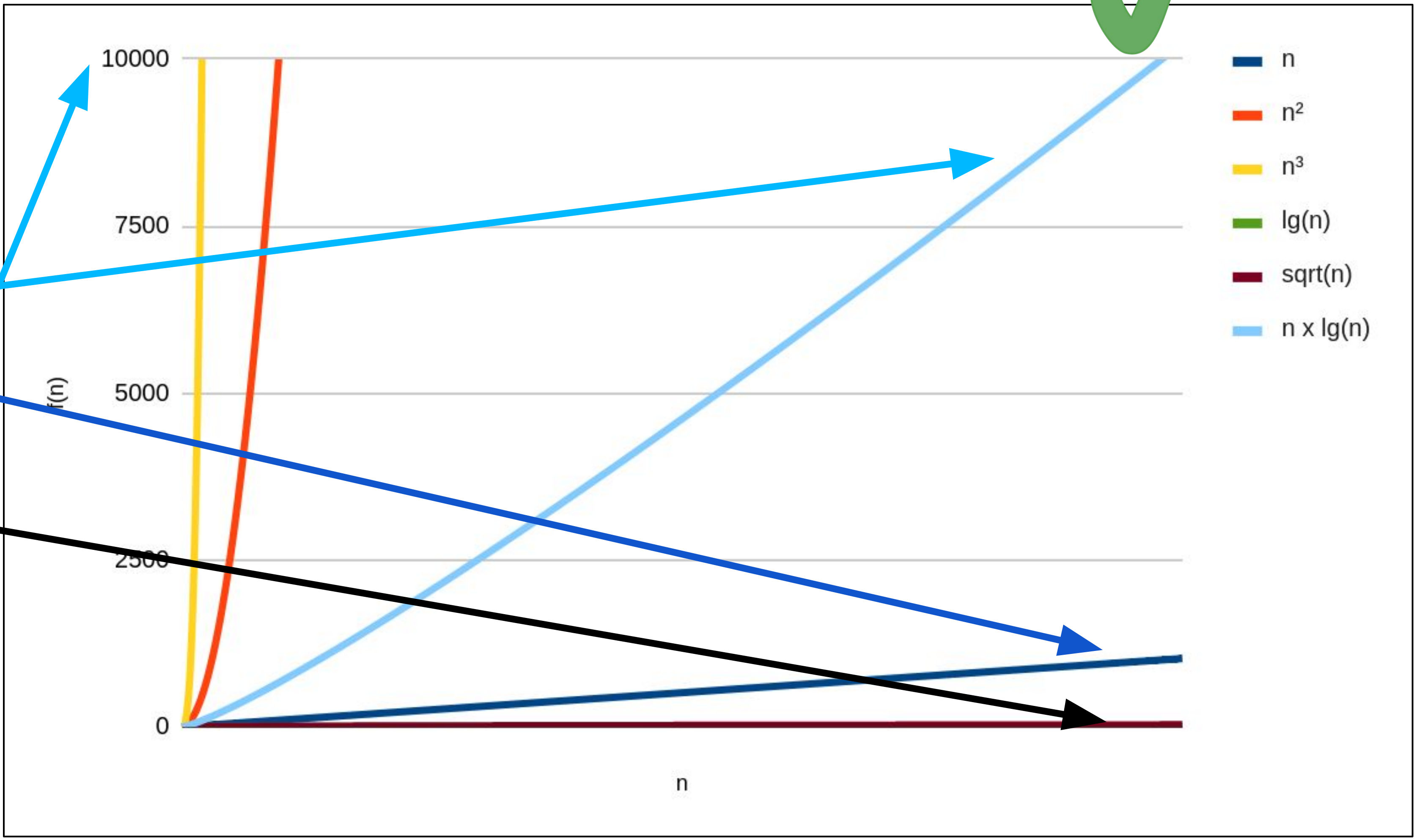
b) $f(n) = n^2$

c) $f(n) = n \times lg(n)$

d) $f(n) = n$

e) $f(n) = sqrt(n)$

f) $f(n) = lg(n)$



Exercício Resolvido (2)

- Plote um gráfico com todas as funções abaixo:

a) $f(n) = n^3$

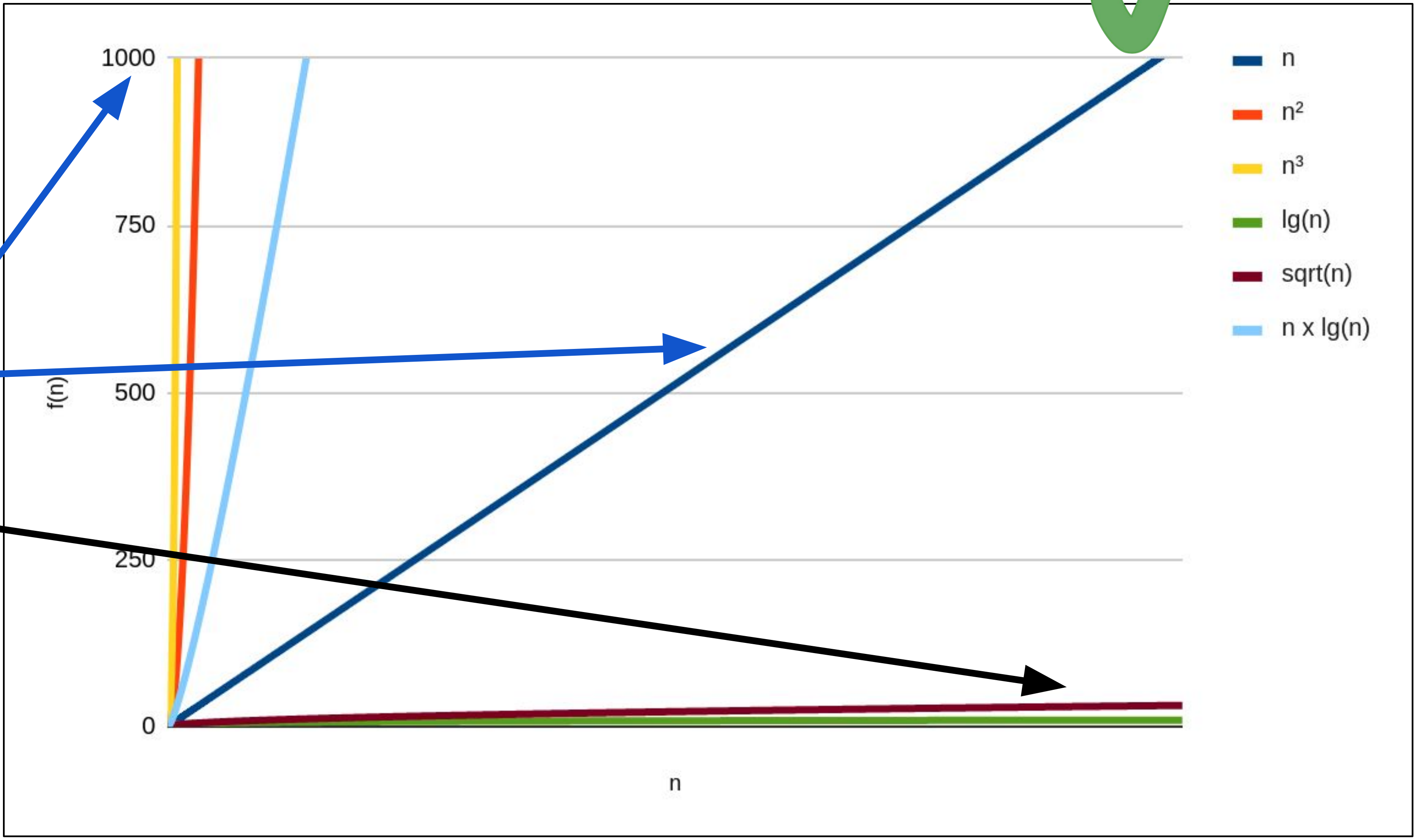
b) $f(n) = n^2$

c) $f(n) = n \times lg(n)$

d) $f(n) = n$

e) $f(n) = sqrt(n)$

f) $f(n) = lg(n)$



Exercício Resolvido (2)

- Plote um gráfico com todas as funções abaixo:

a) $f(n) = n^3$

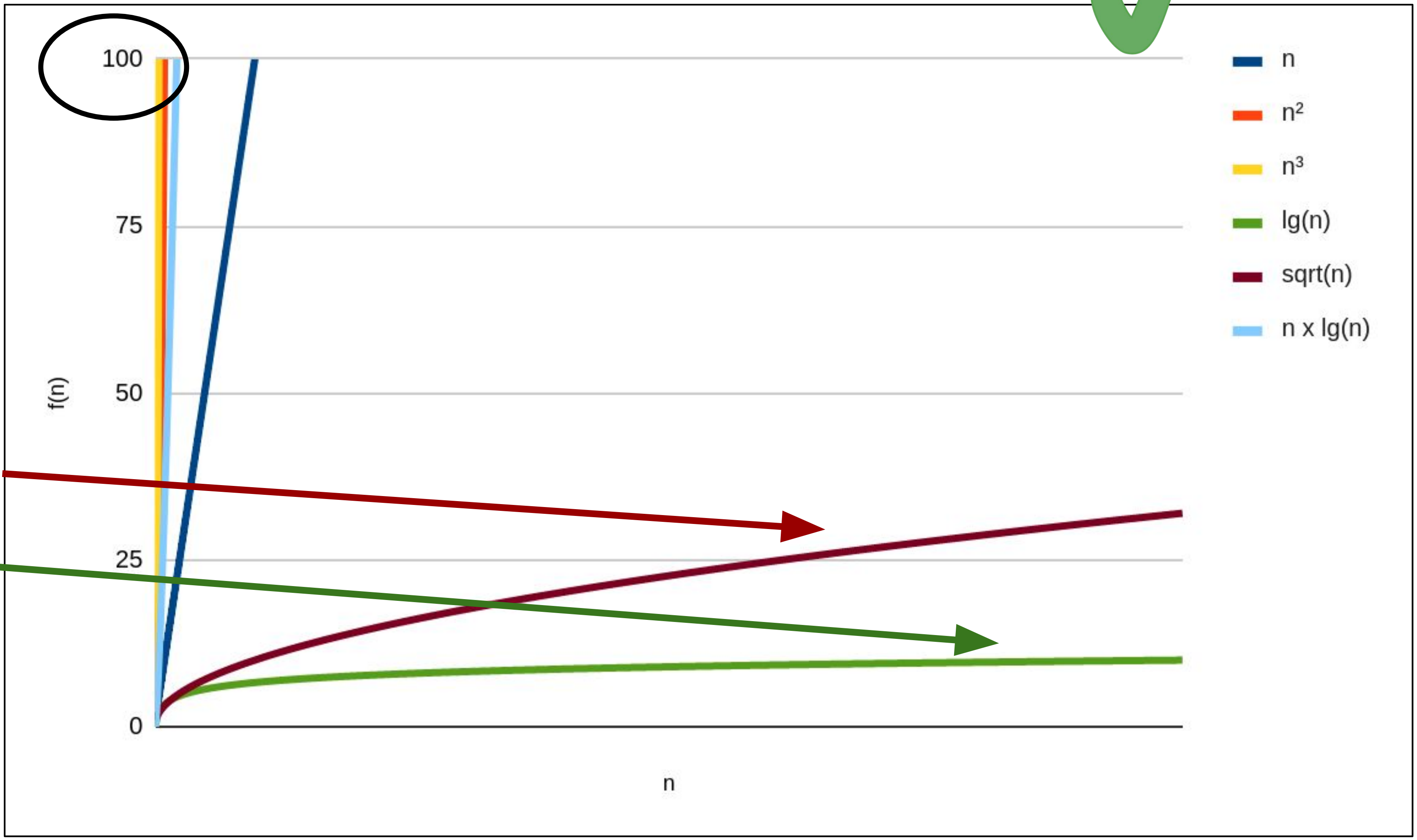
b) $f(n) = n^2$

c) $f(n) = n \times lg(n)$

d) $f(n) = n$

e) $f(n) = sqrt(n)$

f) $f(n) = lg(n)$



Agenda

- Potência, Logaritmo, Piso e Teto, e Função
- **Contagem de operações**
- Aspectos da análise de algoritmos
- Função de complexidade
- Notações O, Ω e $\mathbf{\Theta}$

Exercício Resolvido (3)

- Calcule o número de subtrações que o código abaixo realiza:

```
...
for (int i = 0; i < n; i++){
        if (i % 2 == 0){
                a--;
                b--;
        } else {
                c--;
        }
}
```

Exercício Resolvido (3)

- Calcule o número de subtrações que o código abaixo realiza:

```
...
for (int i = 0; i < n; i++){
        if (i % 2 == 0){
                a--;
                b--;
        } else {                        //Melhor caso: f(n) = n, logo, O(n), Ω(n) e Θ(n)
                c--;
        }                               //Pior caso:    f(n) = 2n, logo, O(n), Ω(n) e Θ(n)
}
```

Cenários Possíveis

- **Melhor caso**: menor "tempo de execução" para todas entradas possíveis de tamanho n

- **Pior caso**: maior "tempo de execução" para todas entradas possíveis

- **Caso médio (ou esperado)**: média dos tempos de execução para todas as entradas possíveis (abordado em PAA)

Contagem de Operações com Condicional

- Será o custo da condição mais ou o da lista de verdadeira ou o da falsa

```
if ( condição() ){
    listaVerdadeiro();
} else {
    listaFalso();
}
```

Melhor caso: condição() + mínimo(listaVerdadeiro(), listaFalso())

Pior caso: condição() + máximo(listaVerdadeiro(), listaFalso())

Exercício Resolvido (4)

- Calcule o número de subtrações que o código abaixo realiza:

```
...
for (int i = 3; i < n; i++){
        a--;
}
```

Exercício Resolvido (4)

- Calcule o número de subtrações que o código abaixo realiza:

```
...
for (int i = 3; i < n; i++){
        a--;
}                                   //n - 3 subtrações
                     // Logo, O(n), Ω(n) e Θ(n)
```

Se n = 6, temos subtrações quando i vale 3, 4, 5 (6 - 3 = 3, vezes)

n = 7 3, 4, 5, 6 (7 - 3 = 4 vezes)

....

n = 10 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (10 - 3 = 7 vezes)

Contagem de Operações com Repetição

- Será o custo da condição mais o número de interações multiplicado pela soma dos custos da condição e da lista a ser repetida

```
while ( condição() ){
    lista();
}
```

Custo: condição() + n * (lista() + condição()), onde n é o número de vezes que o laço será repetido

Exercício Resolvido (5)

- Calcule o número de multiplicações que o código abaixo realiza:

```
for (int i = n; i > 0; i /= 2)
    a *= 2;
```

Exercício Resolvido (5)

- Calcule o número de multiplicações que o código abaixo realiza:

```
for (int i = n; i > 0; i /= 2)
    a *= 2;
```

Quando n é uma potência de 2, realizamos lg(n) + 1 multiplicações

Se n = 8, efetuamos a multiplicação quando i vale 8, 4, 2, 1

n = 16, ... 16, 8, 4, 2, 1

n = 32, ... 32, 16, 8, 4, 2, 1

Exercício Resolvido (5)

- Calcule o número de multiplicações que o código abaixo realiza:

```
for (int i = n; i > 0; i /= 2)
    a *= 2;
```

Para um valor qualquer de n, temos $\lfloor lg(n) \rfloor + 1$ multiplicações, logo, $O(\lg n)$, $\Omega(\lg n)$ e $\Theta(\lg n)$

n = 7, ... 7, 3, 1
Se n = 8, efetuamos a multiplicação quando i vale 8, 4, 2, 1
n = 9, ... 9, 4, 2, 1
n = 15, ... 15, 7, 3, 1
n = 16, ... 16, 8, 4, 2, 1
n = 17, ... 17, 8, 4, 2, 1
n = 31, ... 31, 15, 7, 3, 1
n = 32, ... 32, 16, 8, 4, 2, 1
n = 33, ... 33, 16, 8, 4, 2, 1

Exercício Resolvido (6)

- Outra forma de compreender o código anterior é executando o mesmo

```
class Log {
   public static void main (String[] args) {
      int[] n = {4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,31,32,33,63,64,65};
      int cont;

      for(int k = 0; k < n.length; k++){
         System.out.print("\n[n = " + n[k] + "] => ");
         cont = 0;
         for(int i = n[k]; i > 0; i /= 2){
            System.out.print(" " + i);
            cont++;
         }
         System.out.print(" (" + cont + " vezes)");
      }
      System.out.print("\n");
   }
}
```

Contagem de Operações com Repetição

- Quando tivermos uma estrutura de repetição em que o escopo de busca é sistematicamente dividido pela metade, temos um custo logarítmico

```
for (int i = n; i > 0; i /= 2){
    lista();
}
```

Exercício Resolvido (7)

- Encontre o menor valor em um *array* de inteiros

```
int min = array[0];

for (int i = 1; i < n; i++){
        if (min > array[i]){
                min = array[i];
        }
}
```

1º) Qual é a operação relevante?

R: Comparação entre elementos do *array*

2º) Quantas vezes ela será executada?

R: Se tivermos n elementos: $T(n) = n - 1$

Exercício Resolvido (7)

- Encontre o menor valor em um *array* de inteiros

```
int min = array[0];

for (int i = 1; i < n; i++){
        if (min > array[i]){
                min = array[i];
        }
}
```

3º) O nosso T(n) = n – 1 é para qual dos três casos?

Agenda

- Potência, Logaritmo, Piso e Teto, e Função
- Contagem de operações
- **Aspectos da análise de algoritmos**
- Função de complexidade
- Notações O, Ω e Θ

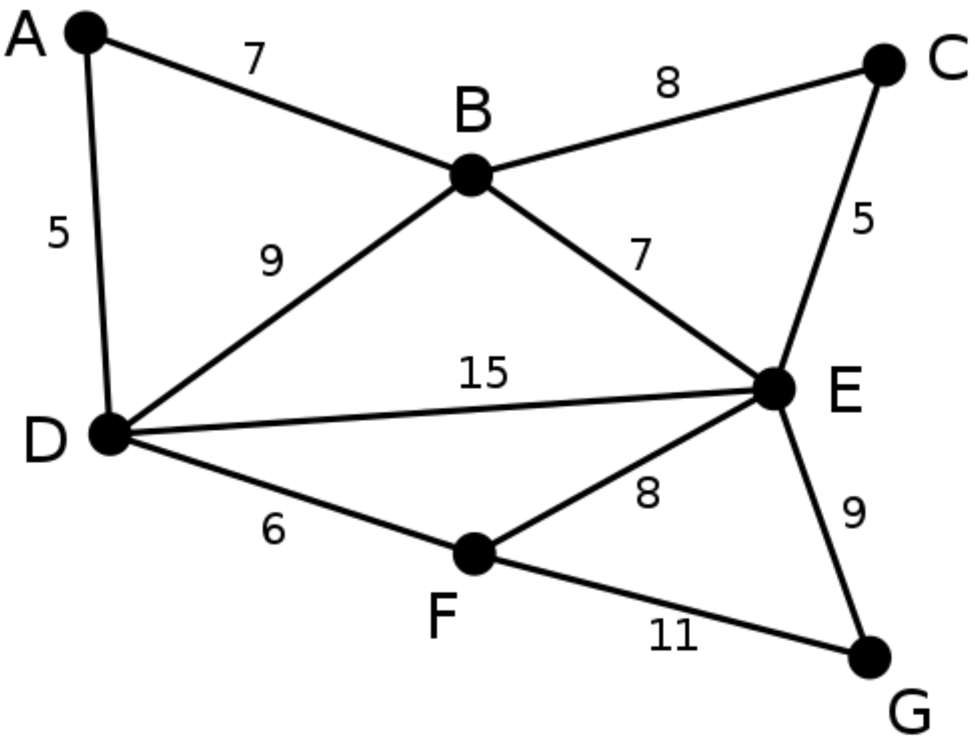
Restrição dos Algoritmos

- Nossos algoritmos devem ser implementados em um computador
- Restrições do computador: capacidade computacional e armazenamento
- Logo, devemos analisar a complexidade de se implementar algoritmos

Um algoritmo que leva séculos para terminar é uma opção inadequada

Exemplo (Rascunho) de Algoritmo NP-Completo

- Problema do Caixeiro Viajante



Exemplo (Rascunho) de Algoritmo NP-Completo

- Rascunho do algoritmo força bruta para encontrar a solução ótima do PCV

Número de cidades	Tempo de execução
5	5 s
6	5 x 5 = 25 s
7	6 x 25 = 150 s = 2,5 min
8	7 x 2,5 = 17,5 min
9	8 x 17,5 = 140 min = 2,34 h
10	9 x 2,34 = 21 h
11	10 x 21 = 210 = 8,75 dias
12	11 x 8,75 = 96,25 = dias
13	12 x 96,25 = 1155 = 3,15 anos
14	13 x 3,15 = 41,02 anos
15	14 x 41,02 = 574 anos
16	15 x 574 = 8,6 séculos

Exemplo (Rascunho) de Algoritmo NP-Completo

- Rascunho do algoritmo força bruta para encontrar a solução ótima do PCV

Observação (1): Na verdade, a solução ótima para o PCV é duas vezes mais rápida que a apresentada, contudo, isso é "indiferente" na tendência de crescimento

Observação (2): Se tivermos um computador 100 vezes mais rápido, isso também será "indiferente" na tendência de crescimento

Número de cidades	Tempo de execução
9	8 x 17,5 = 140 min = 2,34 h
10	9 x 2,34 = 21 h
15	14 x 41,02 = 574 anos
16	15 x 574 = 8,6 séculos

Métricas para a Análise de Complexidade

- Tempo de execução

- Espaço de memória ocupado

- Outros…

Tipos de Análise de Complexidade

- **Análise de um algoritmo particular**: analisamos o custo de um algoritmo específico para um problema específico

- **Análise de uma classe de algoritmos**: analisamos o menor custo possível para resolver um problema específico

    - **Limite da família de algoritmos**, nível mínimo de dificuldade para ser resolvido

Como Medir o Custo de um Algoritmo

?

Restrições no Modelo do Cronômetro

- Hardware
- Arquitetura
- Sistema Operacional
- Compilador
- Linguagem

Exemplo de Otimização do Compilador

```
for (int i = 0; i < 20 ; i++){
        array[i] = i;
}
```

Qual é a vantagem de cada um dos códigos?

```
array [0] = 0;
array [1] = 1;

...

array [19] = 19;
```

Ainda sobre Otimização de Compiladores ....

- Frequentemente, alunos fazem otimizações desnecessárias em termos de eficiência

- Por exemplo, frequentemente, o compilador gera o mesmo código objeto para if-else-if e switch-case; for e while; entre outros...

Como Medir o Custo de um Algoritmo

?

Como Medir o Custo de um Algoritmo

Modelo Matemático

Modelo Matemático para Contar Operações

- Determinamos e contamos as operações relevantes. Em AEDs II, quase sempre, comparações entre registros (elementos do *array*)

- O custo total de um algoritmo é igual a soma do custo de suas operações

- Desconsideramos sobrecargas de gerenciamento de memória ou E/S

- A menos que dito o contrário, consideramos o pior caso

- Precisamos definir a função de complexidade

Agenda

- Potência, Logaritmo, Piso e Teto, e Função
- Contagem de operações
- Aspectos da análise de algoritmos
- **Função de complexidade**
- Notações O, Ω e Θ

Algumas Funções de Complexidade

- **Função de complexidade de tempo** mede o tempo (número de execuções da operação relevante) de execução do algoritmo para um problema de tamanho n

- **Função de complexidade de espaço** mede a quantidade de memória necessária para executar um algoritmo de tamanho n

Como Calcular a Complexidade de um Algoritmo

?

Como Calcular a Complexidade de um Algoritmo

- Da mesma forma que calculamos o custo de um churrasco:
  - Carne: 400 gramas por pessoa (preço médio do kg R$ 20,00 - picanha, asinha, coraçãozinho ...)
  - Cerveja: 1,2 litros por pessoa (litro R$ 3,80)
  - Refrigerante: 1 litro por pessoa (Garrafa 2 litros R$ 3,50)

Exercício: Monte a função de complexidade (ou custo) do nosso churrasco.

Como Calcular a Complexidade de um Algoritmo

- Da mesma forma que calculamos o custo de um churrasco:
  - Carne: 400 gramas por pessoa (preço médio do kg R$ 20,00 - picanha, asinha, coraçãozinho ...)
  - Cerveja: 1,2 litros por pessoa (litro R$ 3,80)
  - Refrigerante: 1 litro por pessoa (Garrafa 2 litros R$ 3,50)

Exercício: Monte a função de complexidade (ou custo) do nosso churrasco.

$$f(n) = n * \frac{400}{1000} * 20 + n * 1,2 * 3,8 + n * 1 * \frac{3,5}{2}$$

$$= 14,31 * n$$

Como Calcular a Complexidade de um Algoritmo

- Da mesma forma que calculamos o custo de uma viagem:
  - Passagem:
  - Hotel:
  - Saídas:

Cálculo de Complexidade para Condicional

- Será o custo da condição mais ou o da lista de verdadeira ou o da falsa

```
if ( condição() ){
    listaVerdadeiro();
} else {
    listaFalso();
}
```

Melhor caso: condição() + mínimo(listaVerdadeiro(), listaFalso())

Pior caso: condição() + máximo(listaVerdadeiro(), listaFalso())

Cálculo de Complexidade para Repetição

- Será o custo da condição mais o número de interações multiplicado pela soma dos custos da condição e da lista a ser repetida

```
while ( condição() ){
    lista();
}
```

Custo: condição() + n * (lista() + condição()), onde n é o número de vezes que o laço será repetido

Cálculo de Complexidade

- Outros laços: sempre consideramos o limite superior

- Métodos: consideramos o custo do método

- Métodos recursivos: utilizamos equações de recorrência (Teoria dos Grafos e Computabilidade)

Algoritmo Ótimo

- Algoritmo cujo custo é igual ao menor custo possível

Exercício Resolvido (8): Encontrar Mínimo

```
int min = array[0];

for (int i = 1; i < n; i++){
        if (min > array[i]){
                min = array[i];
        }
}
```

1º) Qual é a operação relevante?

R: Comparação entre elementos do *array*

2º) Quantas vezes ela será executada?

R: Se tivermos n elementos: $T(n) = n - 1$

3º) O nosso $T(n) = n – 1$ é para qual dos três casos?

R: Para os três casos

4º) O nosso algoritmo é ótimo? Por que?

Exercício Resolvido (8): Encontrar Mínimo

```
int min = array[0];

for (int i = 1; i < n; i++){
        if (min > array[i]){
                min = array[i];
        }
}
```

1º) Qual é a operação relevante?

R: Comparação entre elementos do *array*

2º) Quantas vezes ela será executada?

R: Se tivermos n elementos: T(n) = n - 1

3º) O nosso T(n) = n – 1 é para qual dos três casos?

R: Para os três casos

4º) O nosso algoritmo é ótimo? Por que?

R: Sim porque temos que testar todos os elementos para garantir nossa resposta

Exercício Resolvido (9): Pesquisa Sequencial

```
boolean resp = false;

 for (int i = 0; i < n; i++){
        if (array[i] == x){
                resp = true;
                i = n;
        }
}
```

1º) Qual é a operação relevante?

R: Comparação entre elementos do array

2º) Quantas vezes ela será executada?

R: Melhor caso: f(n) = 1
Pior caso: f(n) = n
Caso médio: f(n) = (n + 1) / 2

3º) O nosso algoritmo é ótimo? Por que?

Exercício Resolvido (9): Pesquisa Sequencial

```
boolean resp = false;

 for (int i = 0; i < n; i++){
        if (array[i] == x){
               resp = true;
               i = n;
        }
}
```

1º) Qual é a operação relevante?

R: Comparação entre elementos do array

2º) Quantas vezes ela será executada?

R: Melhor caso: $f(n) = 1$
Pior caso: $f(n) = n$
Caso médio: $f(n) = (n + 1) / 2$

3º) O nosso algoritmo é ótimo? Por que?

R: Sim porque temos que testar todos os elementos para garantir nossa resposta

Exercício (1)

- Encontre o maior e menor valores em um *array* de inteiros e, em seguida, encontre a função de complexidade de tempo para sua solução

Exercício (2)

- Considerando o problema de encontrar o maior e menor valores em um *array* de inteiros, veja os quatro códigos propostos e analisados no livro do Ziviani

Exercício Resolvido (10)

- Um aluno deve procurar um valor em um *array* de números reais. Ele tem duas alternativas. Primeiro, executar uma pesquisa sequencial. Segundo, ordenar o *array* e, em seguida, aplicar uma pesquisa binária. O que fazer?

Exercício Resolvido (10)

- Um aluno deve procurar um valor em um *array* de números reais. Ele tem duas alternativas. Primeiro, executar uma pesquisa sequencial. Segundo, ordenar o *array* e, em seguida, aplicar uma pesquisa binária. O que fazer?

O aluno deve escolher a primeira opção, pois a pesquisa sequencial tem custo $\Theta(n)$. A segunda opção tem custo $\Theta(n * \lg n)$ para ordenar mais $\Theta(\lg n)$ para a pesquisa binária

Agenda

- Potência, Logaritmo, Piso e Teto, e Função
- Contagem de operações
- Aspectos da análise de algoritmos
- Função de complexidade
- **Notações O, Ω e Θ**

Noção sobre as Notações O, Ω e Θ

- Regras gerais

- Operações

- Definições

Regras Gerais das Notações O, Ω e Θ

- Consideramos apenas a maior potência

- Ignoramos os coeficientes

Diferença entre as Notações O, Ω e Θ

- **O é o limite superior**

- **Ω é o limite inferior**

- **Θ é o limite justo**

Diferença entre as Notações *O*, *Ω* e *Θ*

- **O é o limite superior**, logo, se um algoritmo é O(f(n)), ele também será O(g(n)) para toda função g(n) tal que "g(n) é **maior** que f(n)"

- ***Ω* é o limite inferior**, logo, se um algoritmo é Ω(f(n)), ele também será Ω (g(n)) para toda função g(n) tal que "g(n) é **menor** que f(n)"

- **Θ é o limite justo**, logo, g(n) é O(f(n)) and Ω(f(n)) se e somente se g(n) é Θ (f(n))

Exercício Resolvido (11)

- Responda se as afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) $3n^2 + 5n + 1$ é $O(n)$:

b) $3n^2 + 5n + 1$ é $O(n^2)$:

c) $3n^2 + 5n + 1$ é $O(n^3)$:

d) $3n^2 + 5n + 1$ é $\Omega(n)$:

e) $3n^2 + 5n + 1$ é $\Omega(n^2)$:

f) $3n^2 + 5n + 1$ é $\Omega(n^3)$:

g) $3n^2 + 5n + 1$ é $\Theta(n)$:

h) $3n^2 + 5n + 1$ é $\Theta(n^2)$:

i) $3n^2 + 5n + 1$ é $\Theta(n^3)$:

Exercício Resolvido (11)

- Responda se as afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) $3n^2 + 5n + 1$ é $O(n)$:

b) **$3n^2 + 5n + 1$ é $O(n^2)$: verdadeira**

c) $3n^2 + 5n + 1$ é $O(n^3)$:

d) $3n^2 + 5n + 1$ é $\Omega(n)$:

e) **$3n^2 + 5n + 1$ é $\Omega(n^2)$: verdadeira**

f) $3n^2 + 5n + 1$ é $\Omega(n^3)$:

g) $3n^2 + 5n + 1$ é $\Theta(n)$:

h) **$3n^2 + 5n + 1$ é $\Theta(n^2)$: verdadeira**

i) $3n^2 + 5n + 1$ é $\Theta(n^3)$:

Exercício Resolvido (11)

- Responda se as afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) $3n^2 + 5n + 1$ é $O(n)$:

b) $3n^2 + 5n + 1$ é $O(n^2)$: verdadeira

c) **$3n^2 + 5n + 1$ é $O(n^3)$: verdadeira**

d) **$3n^2 + 5n + 1$ é $\Omega(n)$: verdadeira**

e) $3n^2 + 5n + 1$ é $\Omega(n^2)$: verdadeira

f) $3n^2 + 5n + 1$ é $\Omega(n^3)$:

g) $3n^2 + 5n + 1$ é $\Theta(n)$:

h) $3n^2 + 5n + 1$ é $\Theta(n^2)$: verdadeira

i) $3n^2 + 5n + 1$ é $\Theta(n^3)$:

Exercício Resolvido (11)

- Responda se as afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) **$3n^2 + 5n + 1$ é $O(n)$: falsa**

b) $3n^2 + 5n + 1$ é $O(n^2)$: verdadeira

c) $3n^2 + 5n + 1$ é $O(n^3)$: verdadeira

d) $3n^2 + 5n + 1$ é $\Omega(n)$: verdadeira

e) $3n^2 + 5n + 1$ é $\Omega(n^2)$: verdadeira

f) **$3n^2 + 5n + 1$ é $\Omega(n^3)$: falsa**

g) **$3n^2 + 5n + 1$ é $\Theta(n)$: falsa**

h) $3n^2 + 5n + 1$ é $\Theta(n^2)$: verdadeira

i) **$3n^2 + 5n + 1$ é $\Theta(n^3)$: falsa**

Exercício (3)

- Preencha verdadeiro ou falso na tabela abaixo:

	$O(1)$	$O(\lg n)$	$O(n)$	$O(n.\lg(n))$	$O(n^2)$	$O(n^3)$	$O(n^5)$	$O(n^{20})$
$f(n) = \lg(n)$								
$f(n) = n \,.\, \lg(n)$								
$f(n) = 5n + 1$								
$f(n) = 7n^5 - 3n^2$								
$f(n) = 99n^3 - 1000n^2$								
$f(n) = n^5 - 99999n^4$								

Exercício (4)

- Preencha verdadeiro ou falso na tabela abaixo:

	$\Omega(1)$	$\Omega(\lg n)$	$\Omega(n)$	$\Omega(n.\lg(n))$	$\Omega(n^2)$	$\Omega(n^3)$	$\Omega(n^5)$	$\Omega(n^{20})$
$f(n) = \lg(n)$								
$f(n) = n \cdot \lg(n)$								
$f(n) = 5n + 1$								
$f(n) = 7n^5 - 3n^2$								
$f(n) = 99n^3 - 1000n^2$								
$f(n) = n^5 - 99999n^4$								

Exercício (5)

- Preencha verdadeiro ou falso na tabela abaixo:

	$\Theta(1)$	$\Theta(\lg n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n.\lg(n))$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^3)$	$\Theta(n^5)$	$\Theta(n^{20})$
$f(n) = \lg(n)$								
$f(n) = n \,.\, \lg(n)$								
$f(n) = 5n + 1$								
$f(n) = 7n^5 - 3n^2$								
$f(n) = 99n^3 - 1000n^2$								
$f(n) = n^5 - 99999n^4$								

Operações com as Notações O, Ω e Θ

1) f(n) = O(f(n))

2) c *x* O(f(n)) = O(f(n))

3) O(f(n)) + O(f(n)) = O(f(n))

4) O(O(f(n))) = O(f(n))

5) O(f(n)) + O(g(n)) = O(máximo(f(n),g(n)))

6) O(f(n)) *x* O(g(n)) = O(f(n) *x* g(n))

7) f(n) *x* O(g(n)) = O(f(n) *x* g(n))

*) As mesmas propriedades são aplicadas para Ω e Θ

Exercício (6)

- Dado $f(n) = 3n^2 - 5n - 9$, $g(n) = n * lg(n)$, $l(n) = n.lg^2(n)$ e $h(n) = 99n^8$, qual é a ordem de complexidade das operações:

a) $f(n) + g(n) - h(n)$

b) $O(f(n) + O(g(n)) - O(h(n))$

c) $f(n)$ *x* $g(n)$

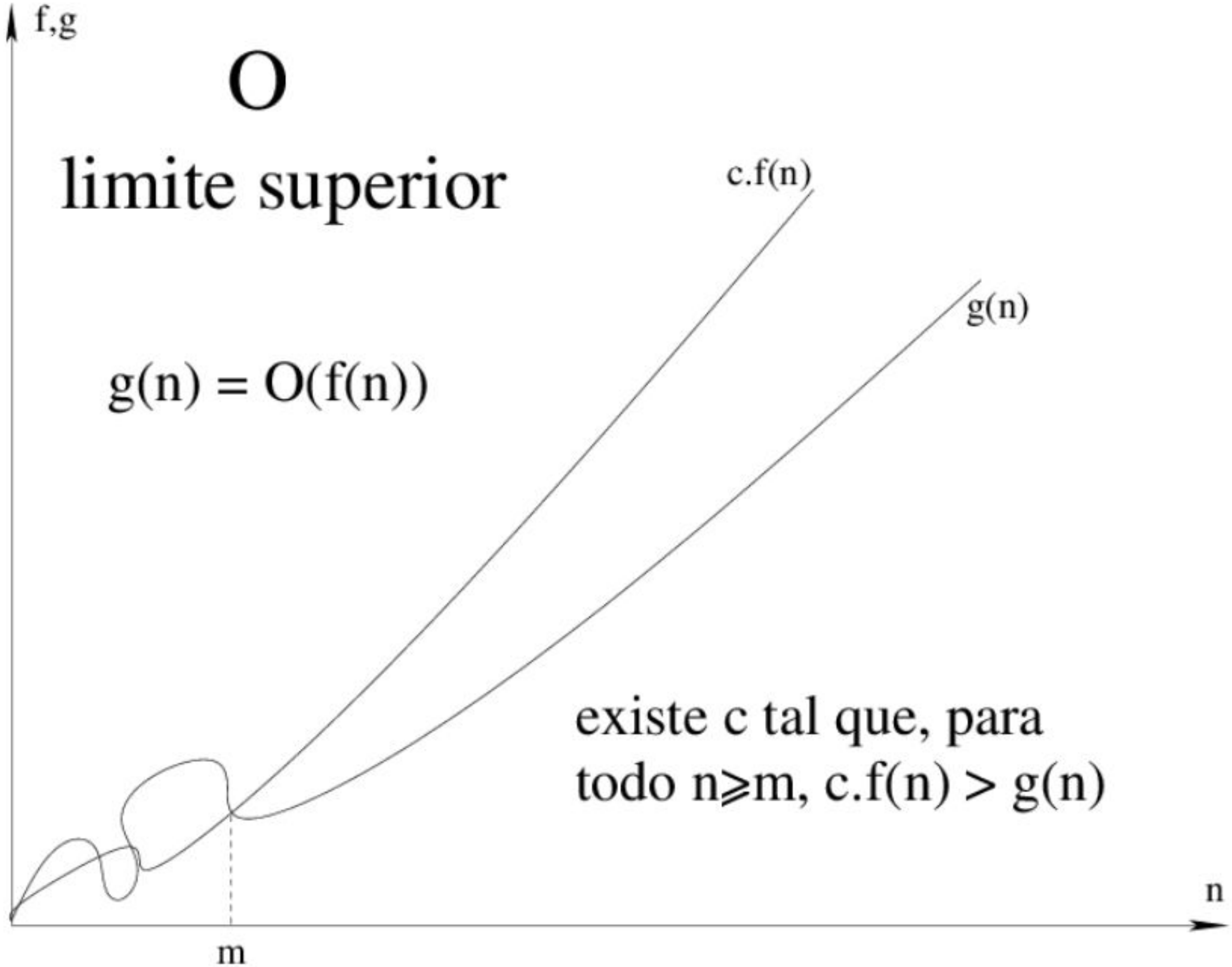
d) $g(n)$ *x* $l(n) + h(n)$

e) $f(n)$ *x* $g(n)$ *x* $l(n)$

f) $O(O(O(O(f(n)))))$

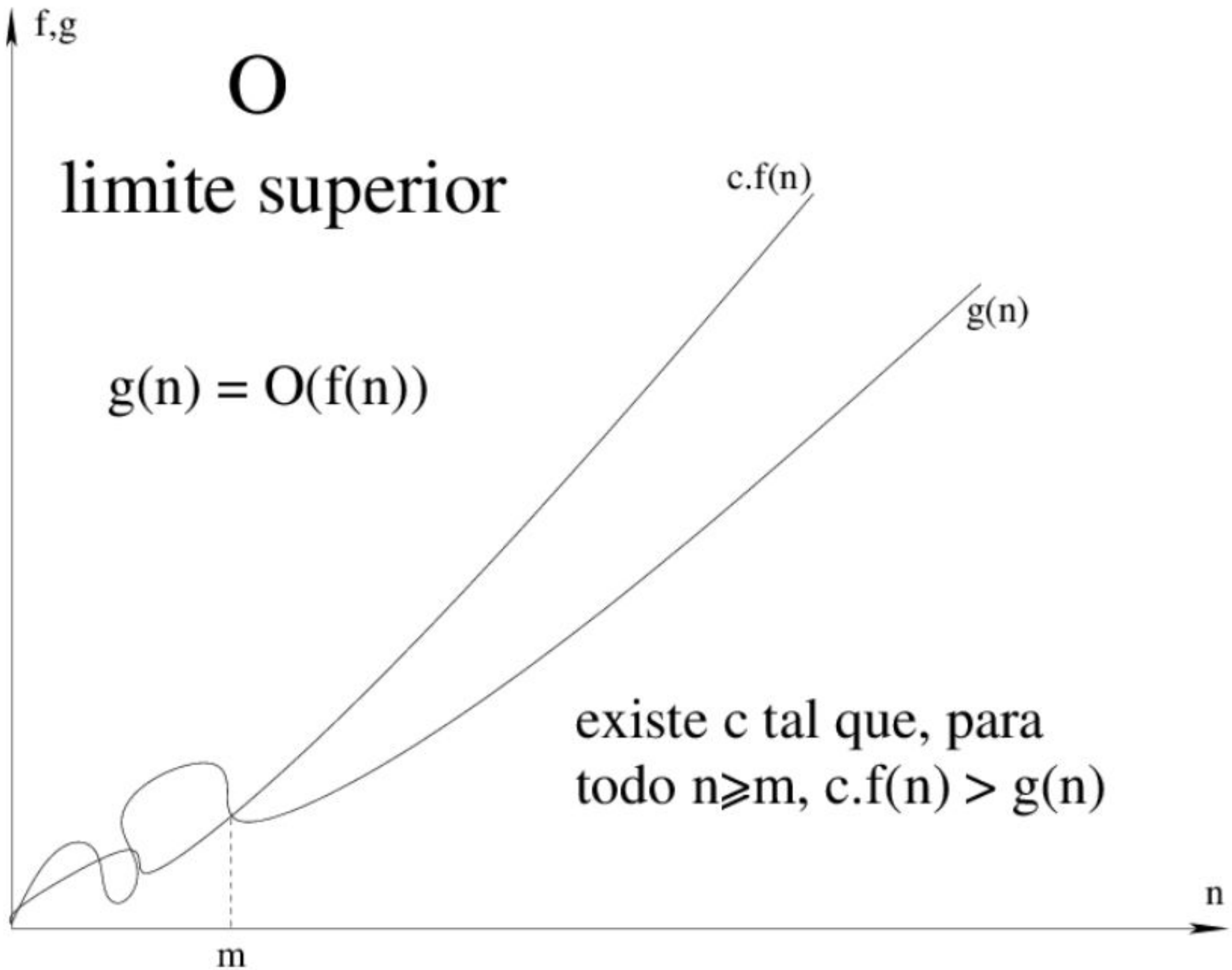
Definição da Notação *O*

- g(n) = O(f(n)), se existirem constantes positivas *c* e *m* tais que, para *n* ≥ *m*, temos que |g(n)| ≤ c x |f(n)|



Definição da Notação *O*

- g(n) = O(f(n)), se existirem constantes positivas *c* e *m* tais que, para *n* ≥ *m*, temos que |g(n)| ≤ c x |f(n)|



f(n) é um limite assintótico superior para g(n)

f(n) domina assintoticamente g(n)

O comportamento assintótico das funções de custo representa o limite quando n cresce

Exercício (7)

- Dada a definição da notação O:

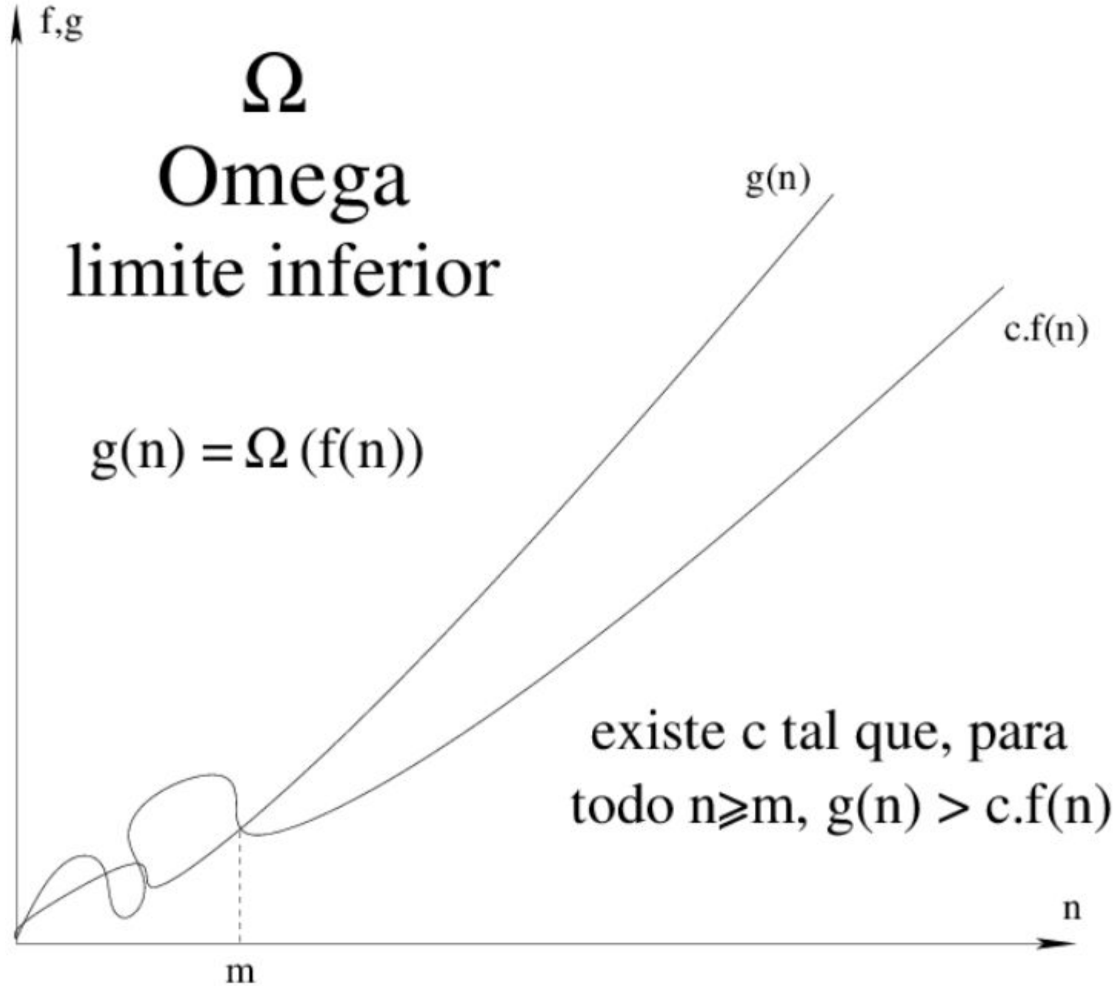
a) Mostre um valor c e outro m tal que, para $n \geq m$, $|3n^2 + 5n + 1| \leq c \times |n^2|$, provando que $3n^2 + 5n + 1$ é $O(n^2)$

b) Mostre um valor c e outro m tal que, para $n \geq m$, $|3n^2 + 5n + 1| \leq c \times |n^3|$, provando que $3n^2 + 5n + 1$ é $O(n^3)$

c) Prove que $3n^2 + 5n + 1$ não é $O(n)$

Definição da Notação Ω

- g(n) = Ω(f(n)), se existirem constantes positivas c e m tais que, para $n \geq m$, temos que $|g(n)| \geq c \times |f(n)|$



f(n) é um limite assintótico inferior para g(n)

Note que g(n) é Ω(f(n)) sss f(n) é O(g(n))

Exercício (8)

- Dada a definição da notação Ω:

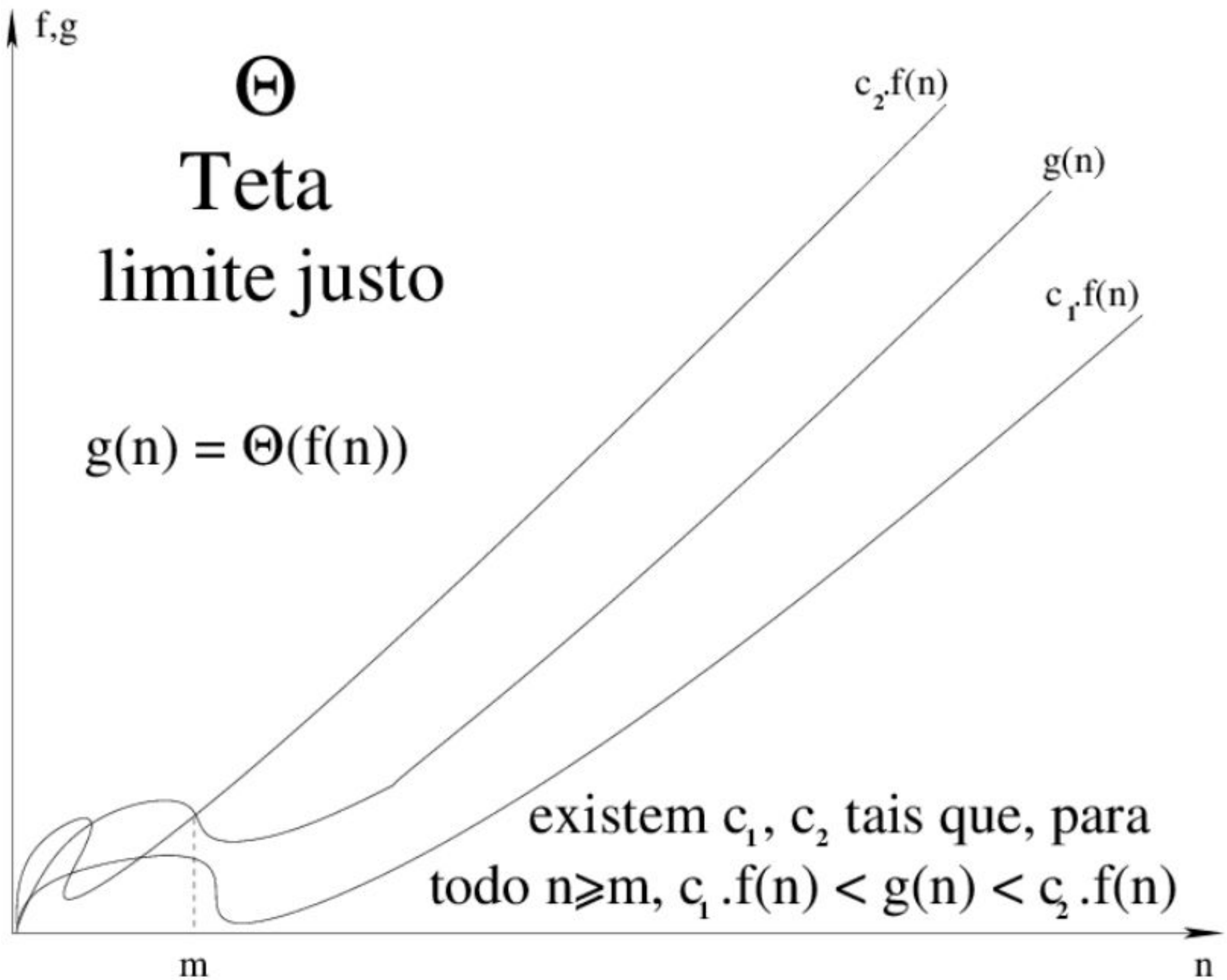
a) Mostre um valor c e outro m tal que, para $n \geq m$, $|g(n)| \geq c \times |f(n)|$, provando que $3n^2 + 5n + 1$ é $\Omega(n^2)$

b) Mostre um valor c e outro m tal que, para $n \geq m$, $|g(n)| \geq c \times |f(n)|$, provando que $3n^2 + 5n + 1$ é $\Omega(n)$

c) Prove que $3n^2 + 5n + 1$ não é $\Omega(n^3)$

Definição da Notação Θ

- g(n) = Θ(f(n)), se existirem constantes positivas c_1, c_2 e m tais que, para n ≥ m, temos que $c_1 \times |f(n)| \leq |g(n)| \leq c_2 \times |f(n)|$



f(n) é um limite assintótico justo para g(n)

Se g(n) é Θ(f(n)), então, g(n) é O(f(n)) e Ω(f(n))

Se g(n) é O(f(n)) e Ω(f(n)), então, g(n) é Θ(f(n))

Exercício (9)

- Dada a definição da notação Θ:

a) Mostre um valor para c_1, c_2 e m tal que, para $n \geq m$, $c_1 \times |f(n)| \leq |g(n)| \leq c_2 \times |f(n)|$, provando que $3n^2 + 5n + 1$ é $\Theta(n^2)$

b) Prove que $3n^2 + 5n + 1$ não é $\Theta(n)$

c) Prove que $3n^2 + 5n + 1$ não é $\Theta(n^3)$

Classe de Algoritmos

- Constante: $O(1)$
- Logarítmico: $O(\log n)$
- Linear: $O(n)$
- Linear-logarítmico: $O(n \log n)$
- Quadrático: $O(n^2)$
- Cúbico: $O(n^3)$
- Exponencial: $O(2^n)$

Algoritmos Polinomiais

- Um algoritmo é polinomial se é $O(n^p)$ para algum inteiro p

- Problemas com algoritmos polinomiais são considerados tratáveis

- Problemas para os quais não há algoritmos polinomiais são considerados intratáveis

- Classes de problemas e o problema $P \stackrel{?}{=} NP$

Exercício (10)

- Faça um resumo sobre Teoria da Complexidade, Classes de Problemas P, NP e NP-Completo. Use LaTeX e siga o modelo de artigos da SBC (sem abstract, resumo e seções) com no máximo duas página

Exercício Resolvido (12)

- Apresente a função e a complexidade para os números de comparações e movimentações de registros para o pior e melhor caso

```
void imprimirMaxMin( int [] array, int n){
    int maximo, minimo;

    if (array[0] > array[1]){
        maximo = array[0];     minimo = array[1];
    } else {
        maximo = array[1];     minimo = array[0];
    }

    for (int i = 2; i < n; i++){
        if (array[i] > maximo){
            maximo = array[i];
        } else if (array[i] < minimo){
            minimo = array[i];
        }
    }
}
```

Exercício Resolvido (12)

- Apresente a função e a complexidade para os números de comparação e movimentações de registros para o pior e melhor caso

```
void imprimirMaxMin( int [] array, int n){
```

função de complexidade

	MOV	CMP
PIOR	$f(n) = 2 + (n - 2)$	$f(n) = 1 + 2(n - 2)$
MELHOR	$f(n) = 2 + (n - 2) \times 0$	$f(n) = 1 + (n - 2)$

complexidade

	MOV	CMP
PIOR	$O(n)$, $\Omega(n)$ e $\Theta(n)$	$O(n)$, $\Omega(n)$ e $\Theta(n)$
MELHOR	$O(1)$, $\Omega(1)$ e $\Theta(1)$	$O(n)$, $\Omega(n)$ e $\Theta(n)$

```
}
```

Exercício Resolvido (13)

- Apresente a função e a complexidade para o número de subtrações para o pior e melhor caso

```
i = 0;

while (i < n) {
        i++;
        a--;
}

if (b > c) {
        i--;
} else {
        i--;
        a--;
}
```

Exercício Resolvido (13)

- Apresente a função e a complexidade para o número de subtrações para o pior e melhor caso

```
i = 0;

while (i < n) {
        i
        a
}

if (b >
        i
} else {
        i--;
        a--;
}
```

	função	complexidade
PIOR	f(n) = n + 2	O(n), Ω(n) e Θ(n)
MELHOR	f(n) = n +1	O(n), Ω(n) e Θ(n)

Exercício Resolvido (14)

- Apresente a função e a complexidade para o número de subtrações para o pior e melhor caso

```
for (i = 0; i < n; i++) {
    for (j = 0; j < n; j++) {
        a--;
        b--;
    }
    c--;
}
```

Exercício Resolvido (14)

- Apresente a função e a complexidade para o número de subtrações para o pior e melhor caso

```
for (i = 0; i < n; i++) {
    for (j = 0; j < n; j++) {
```

	função	complexidade
TODOS	$f(n) = (2n + 1)n$	$O(n^2)$, $\Omega(n^2)$ e $\Theta(n^2)$

Exercício Resolvido (15)

- Apresente a função e a complexidade para o número de subtrações para o pior e melhor caso

```
for (i = 0; i < n; i++) {
        for (j = 1; j <= n; j *= 2) {
                b--;
        }
}
```

Exercício Resolvido (15)

- Apresente a função e a complexidade para o número de subtrações para o pior e melhor caso

```
for (i = 0; i < n; i++) {
    for (j = 1; j <= n; j *= 2) {
        b--;
```

	função	complexidade
TODOS	f(n) = (lg(n) + 1) * n = n * lg(n) + n	O(n *x* lg(n)), Ω(n *x* lg(n)) e Θ(n *x* lg(n))

Exercício (11)

- Suponha um sistema de monitoramento contendo os métodos telefone, luz, alarme, sensor e câmera, apresente a função e ordem de complexidade para o pior e melhor caso: (a) método alarme; (b) outros métodos.

```
void sistemaMonitoramento() {
        if (telefone() == true && luz() == true){
                alarme(0);
        } else {
                alarme(1);
        }
        for (int i = 2; i < n; i++){
                if (sensor(i- 2) == true){
                        alarme (i - 2);
                } else if (camera(i- 2) == true){
                        alarme (i - 2 + n);
}   }   }
```

Exercício (12)

- Apresente um código, defina duas operações relevantes e apresente a função e a complexidade para as operações escolhidas no pior e melhor caso

Exercício Resolvido (16)

- Apresente o tipo de crescimento que melhor caracteriza as funções abaixo (Khan Academy, adaptado)

	Constante	Linear	Polinomial	Exponencial
$3n$				
1				
$(3/2)n$				
$2n^3$				
2^n				
$3n^2$				
1000				
$(3/2)^n$				

Exercício Resolvido (16)

- Apresente o tipo de crescimento que melhor caracteriza as funções abaixo (Khan Academy, adaptado)

	Constante	Linear	Polinomial	Exponencial
$3n$		✓		
1	✓			
$(3/2)n$		✓		
$2n^3$			✓	
2^n				✓
$3n^2$			✓	
1000	✓			
$(3/2)^n$				✓

Exercício Resolvido (17)

- Classifique as funções $f_1(n) = n^2$, $f_2(n) = n$, $f_3(n) = 2^n$, $f_4(n) = (3/2)^n$, $f_5(n) = n^3$ e $f_6(n) = 1$ de acordo com o crescimento, do mais lento para o mais rápido (Khan Academy, adaptado)

Exercício Resolvido (17)

- Classifique as funções $f_1(n) = n^2$, $f_2(n) = n$, $f_3(n) = 2^n$, $f_4(n) = (3/2)^n$, $f_5(n) = n^3$ e $f_6(n) = 1$ de acordo com o crescimento, do mais lento para o mais rápido (Khan Academy, adaptado)

$$f_6(n) = 1$$

$$f_2(n) = n$$

$$f_1(n) = n^2$$

$$f_5(n) = n^3$$

$$f_4(n) = (3/2)^n$$

$$f_3(n) = 2^n$$

Exercício Resolvido (18)

- Classifique as funções $f_1(n) = n.\log_6(n)$, $f_2(n) = \lg(n)$, $f_3(n) = \log_8(n)$, $f_4(n) = 8n^2$, $f_5(n) = n.\lg(n)$, $f_6(n) = 64$, $f_7(n) = 6n^3$, $f_8(n) = 8^{2n}$ e $f_9(n) = 4n$ de acordo com o crescimento, do mais lento para o mais rápido (Khan Academy, adaptado)

Exercício Resolvido (18)

- Classifique as funções $f_1(n) = n.\log_6(n)$, $f_2(n) = \lg(n)$, $f_3(n) = \log_8(n)$, $f_4(n) = 8n^2$, $f_5(n) = n.\lg(n)$, $f_6(n) = 64$, $f_7(n) = 6n^3$, $f_8(n) = 8^{2n}$ e $f_9(n) = 4n$ de acordo com o crescimento, do mais lento para o mais rápido (Khan Academy, adaptado)

$$f_6(n) = 64$$
$$f_3(n) = \log_8(n)$$
$$f_2(n) = \lg(n)$$
$$f_9(n) = 4n$$
$$f_1(n) = n.\log_6(n)$$
$$f_5(n) = n.\lg(n)$$
$$f_4(n) = 8n^2$$
$$f_7(n) = 6n^3$$
$$f_8(n) = 8^{2n}$$

Exercício Resolvido (19)

- Faça a correspondência entre cada função f(n) com sua g(n) equivalente, em termos de Θ. Essa correspondência acontece quando $f(n) = \Theta(g(n))$ (Khan Academy, adaptado)

f(n)	**g(n)**
$n + 30$	n^4
$n^2 + 2n - 10$	$3n - 1$
$n^3 . 3n$	$lg(2n)$
$lg(n)$	$n^2 + 3n$

Exercício Resolvido (19)

- Faça a correspondência entre cada função f(n) com sua g(n) equivalente, em termos de Θ. Essa correspondência acontece quando f(n) = Θ(g(n)) (Khan Academy, adaptado)

f(n)	g(n)
$n + 30$	n^4
$n^2 + 2n - 10$	$3n - 1$
$n^3 . 3n$	$lg(2n)$
$lg(n)$	$n^2 + 3n$

Exercício (13)

- No Exercício Resolvido (10), verificamos que quando desejamos pesquisar a existência de ***um*** elemento em um *array* de números reais é adequado executar uma pesquisa sequencial cujo custo é $\Theta(n)$. Nesse caso, o custo de ordenar o *array* e, em seguida, aplicar uma pesquisa binária é mais elevado, $\Theta(n * lg(n)) + \Theta(lg(n)) = \Theta(n * lg(n))$. Agora, supondo que desejamos efetuar ***n*** pesquisas, responda qual das duas soluções é mais eficiente