

Alguns Métodos Gerais

Unidade I: Análise de Algoritmos

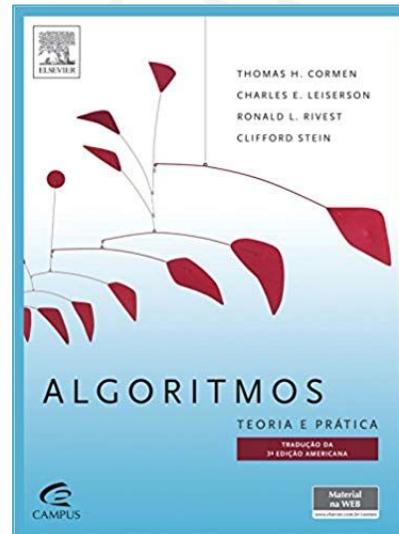
Agenda

- Procure!!!
- Adivinhe a resposta, prove por indução
- Perturbe a soma

Procure!!!

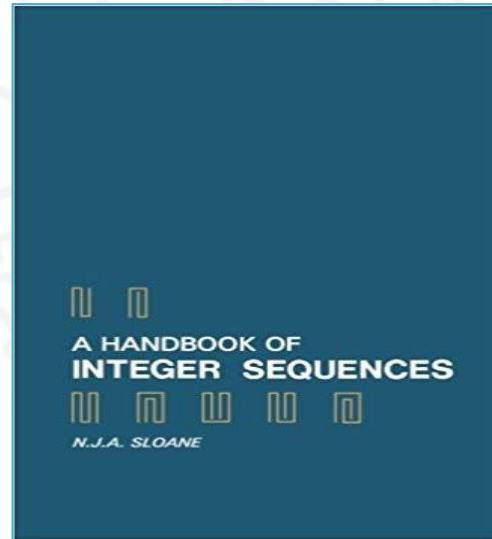
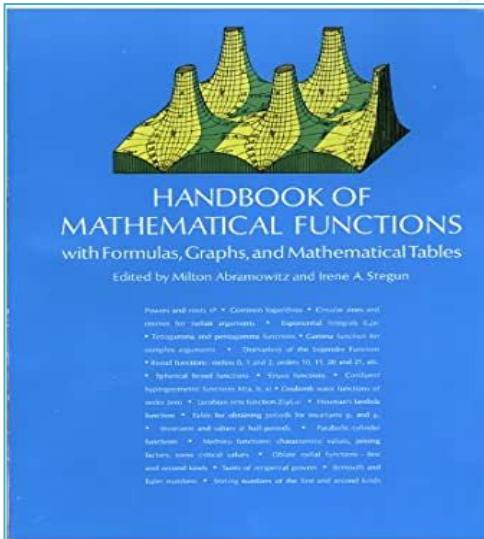
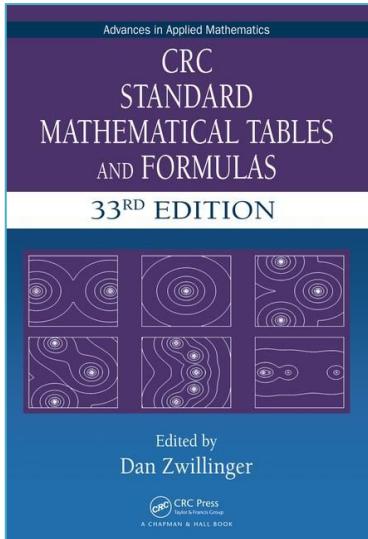
Método Procure!!!

- Possivelmente, qualquer fórmula de somatório que venhamos a precisar está resolvida na literatura, logo, procure!!!



Método Procure!!!

- Possivelmente, qualquer fórmula de somatório que venhamos a precisar está resolvida na literatura, logo, procure!!!

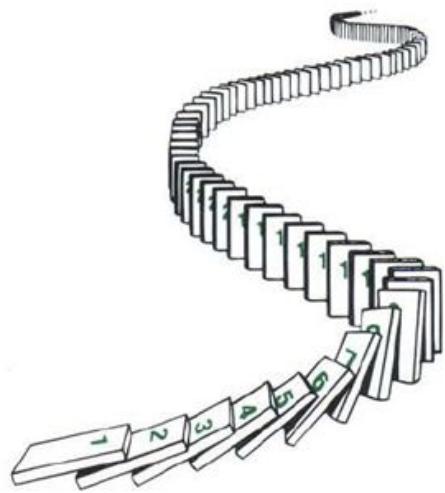




Adivinhe a Resposta,
Prove por Indução

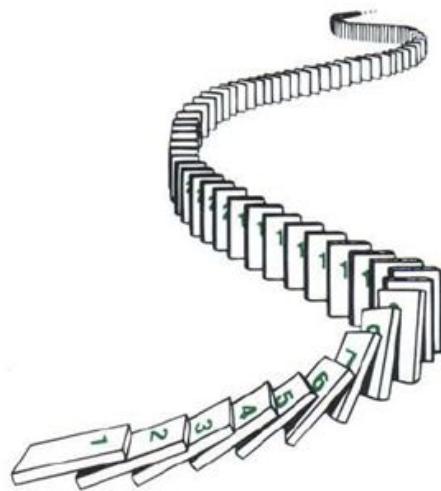
Método: Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

- Se, em um passe de mágica (ou inspiração ou dedução), descobrimos a resposta, basta prová-la por indução matemática



Método: Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

- Se, em um passe de mágica (ou inspiração ou dedução), descobrimos a resposta, basta prová-la por indução matemática



Indução Matemática:
Técnica simples e
robusta para provas
matemáticas

Prova por Indução

- **1º Passo (passo base):** Provar que a fórmula é verdadeira para o primeiro valor, substituindo n na equação pelo primeiro valor
- **2º Passo (indução propriamente dita):** Supondo que $n > 0$ e que a fórmula é válida quando substituímos n por $(n-1)$

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

S_{n-1} = é a equação substituindo n por $(n-1)$

a_n = n -ésimo termo da sequência

Exercício Resolvido (1)

- Prove por indução que a fórmula abaixo para a soma dos quadrados perfeitos é verdadeira:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ para } n \geq 0$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
n^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	
S_n	0	1	5	14	30	55	91	140	204	285	385	506	650	

Exercício Resolvido (1)

- **1º Passo (passo base):** Na equação, substituir n pelo primeiro valor (zero)

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Primeiro valor → $0 \leq i \leq n$





Exercício Resolvido (1)

- **1º Passo (passo base):** Na equação, substituir n pelo primeiro valor (zero)

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2 = \frac{0(0+1)(2 \cdot 0 + 1)}{6}$$

Primeiro valor → 0



Exercício Resolvido (1)

- **1º Passo (passo base):** Na equação, substituir n pelo primeiro valor (zero)

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2 = \frac{0(0+1)(2 \cdot 0 + 1)}{6} = 0$$

(verdadeiro)

Lembre que 0^2 é igual a 0



Exercício Resolvido (1)

- **2º Passo (indução propriamente dita):** Aplicar a fórmula

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$



Exercício Resolvido (1)

- 2º Passo (indução propriamente dita):

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$



Exercício Resolvido (1)

- 2º Passo (indução propriamente dita):

$$S_n = \underline{S_{n-1}} + \underline{a_n}$$

$$a_n = n^2$$

$$S_{n-1} = \frac{(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6}$$



Exercício Resolvido (1)

- 2º Passo (indução propriamente dita):

$$S_n = \underline{S_{n-1}} + \underline{a_n}$$

$$a_n = n^2$$

$$S_{n-1} = \frac{(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}$$



Exercício Resolvido (1)

- 2º Passo (indução propriamente dita):

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \underline{(n-1)(n)(2n-1)} + n^2$$

6

Substituindo S_{n-1} e a_n



Exercício Resolvido (1)

- 2º Passo (indução propriamente dita):

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \quad \Rightarrow$$

$$6S_n = (n-1)(n)(2n-1) + 6n^2$$

Multiplicando a equação por seis



Exercício Resolvido (1)

- 2º Passo (indução propriamente dita):

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = (n-1)(n)(2n-1) + 6n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = (n^2-n)(2n-1) + 6n^2$$

Resolvendo $(n-1)(n)$



Exercício Resolvido (1)

- 2º Passo (indução propriamente dita):

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = (n-1)(n)(2n-1) + 6n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = (n^2-n)(2n-1) + 6n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = [2n^3 - n^2 - 2n^2 + n] + 6n^2$$

Resolvendo $(n^2-n)(2n-1)$



Exercício Resolvido (1)

- 2º Passo (indução propriamente dita):

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = (n-1)(n)(2n-1) + 6n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = (n^2-n)(2n-1) + 6n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = [2n^3 - n^2 - 2n^2 + n] + 6n^2 \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Resolvendo os termos com n^2 e
invertendo o lado do “6”



Exercício Resolvido (1)

- **2º Passo (indução propriamente dita):**

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = (n-1)(n)(2n-1) + 6n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = (n^2-n)(2n-1) + 6n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = [2n^3 - n^2 - 2n^2 + n] + 6n^2 \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \underline{n(n+1)(2n+1)}$$



Exercício Resolvido (1)

- **2º Passo (indução propriamente dita):**

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = (n-1)(n)(2n-1) + 6n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = (n^2-n)(2n-1) + 6n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = [2n^3 - n^2 - 2n^2 + n] + 6n^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{S_n}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \quad (\text{verdadeiro})$$



Exercício Resolvido (2)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_0^n (3 + i) =$$

Exercício Resolvido (2)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove-a usando indução matemática

$$\sum_{0}^n (3 + i) =$$
$$\sum_{0}^n 3 + \sum_{0}^n i =$$

Usando associatividade



Exercício Resolvido (2)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{0}^n (3 + i) =$$

$$\sum_{0}^n 3 + \sum_{0}^n i =$$

$$3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} =$$

Sabendo o valor dos dois somatórios:

- Somatório de 3
- Somatório de Gauss



Exercício Resolvido (2)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove-a usando indução matemática

$$\sum_{0}^n (3 + i) =$$

$$\sum_{0}^n 3 + \sum_{0}^n i =$$

$$3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$\frac{6n + 6 + n^2 + n}{2} =$$

Efetuando algebrismo



Exercício Resolvido (2)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove-a usando indução matemática

$$\sum_0^n (3 + i) =$$

$$\sum_0^n 3 + \sum_0^n i =$$

$$3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$\frac{6n + 6 + n^2 + n}{2} =$$

$$\frac{n^2 + 7n + 6}{2}$$

Continuando nosso algebrismo



Exercício Resolvido (2)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_0^n (3 + i) =$$

$$\sum_0^n 3 + \sum_0^n i =$$

$$3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$\frac{6n + 6 + n^2 + n}{2} =$$

$$\frac{n^2 + 7n + 6}{2}$$

Prova por indução:

1) Passo base:

2) Indução propriamente dita:

Provando por
indução



Exercício Resolvido (2)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove-a usando indução matemática

Prova por indução:

1) Passo base:

$$\frac{0^2 + 7 \cdot 0 + 6}{2} = 3 \text{ (verdadeiro)}$$

2) Indução propriamente dita:

$$\sum_0^n (3 + i) =$$

$$\sum_0^n 3 + \sum_0^n i =$$

$$3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$\frac{6n + 6 + n^2 + n}{2} =$$

$$\frac{n^2 + 7n + 6}{2}$$

Passo base



Exercício Resolvido (2)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove-a usando indução matemática

Prova por indução:

1) Passo base:

$$\sum_0^n (3 + i) =$$

$$\sum_0^n 3 + \sum_0^n i =$$

$$3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$\frac{6n + 6 + n^2 + n}{2} =$$

$$\frac{n^2 + 7n + 6}{2}$$

Indução
propriamente
dita

$$\frac{0^2 + 7.0 + 6}{2} = 3 \text{ (verdadeiro)}$$

2) Indução propriamente dita:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)^2 + 7(n-1) + 6}{2} + (3+n)$$

$$S_n = \frac{(n^2 - 2n + 1) + (7n - 7) + 6}{2} + \frac{2(3+n)}{2}$$

$$S_n = \frac{(n^2 - 2n + 1) + (7n - 7) + 6 + (6 + 2n)}{2}$$

$$S_n = \frac{n^2 + 7n + 6}{2} \text{ (verdadeiro)}$$



Exercício Resolvido (3)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{1}^{n} [(2i + 1)^2 - (2i)^2] =$$

Exercício Resolvido (3)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove-a usando indução matemática

$$\sum_{1}^n [(2i+1)^2 - (2i)^2] =$$

$$\sum_{1}^n [(4i^2 + 4i + 1) - 4i^2] =$$

$$\sum_{1}^n [4i + 1] =$$

$$4 \sum_{1}^n [i] + \sum_{1}^n [1] =$$

$$4 \frac{n(n+1)}{2} + n =$$

$$2n^2 + 3n$$

Resolvendo

Exercício Resolvido (3)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove-a usando indução matemática

$$\sum_{1}^n [(2i+1)^2 - (2i)^2] =$$

$$\sum_{1}^n [(4i^2 + 4i + 1) - 4i^2] =$$

$$\sum_{1}^n [4i + 1] =$$

$$4 \sum_{1}^n [i] + \sum_{1}^n [1] =$$

$$4 \frac{n(n+1)}{2} + n =$$

$$2n^2 + 3n$$

Prova por indução:

1) Passo base:

2) Indução propriamente dita:

Provando por
indução

Exercício Resolvido (3)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove-a usando indução matemática

$$\sum_{1}^n [(2i+1)^2 - (2i)^2] =$$

$$\sum_{1}^n [(4i^2 + 4i + 1) - 4i^2] =$$

$$\sum_{1}^n [4i + 1] =$$

$$4 \sum_{1}^n [i] + \sum_{1}^n [1] =$$

$$4 \frac{n(n+1)}{2} + n =$$

$$2n^2 + 3n$$

Prova por indução:

1) Passo base:

$$2.1^2 + 3.1 = 5 \text{ (verdadeiro)}$$

2) Indução propriamente dita:

Passo base



Exercício Resolvido (3)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove-a usando indução matemática

Prova por indução:

1) Passo base:

$$2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 5 \text{ (verdadeiro)}$$

$$\sum_{1}^{n} [(2i+1)^2 - (2i)^2] =$$

$$\sum_{1}^{n} [(4i^2 + 4i + 1) - 4i^2] =$$

$$\sum_{1}^{n} [4i + 1] =$$

$$4 \sum_{1}^{n} [i] + \sum_{1}^{n} [1] =$$

$$4 \frac{n(n+1)}{2} + n =$$

$$2n^2 + 3n$$

Indução
propriamente
dita

2) Indução propriamente dita:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = 2(n-1)^2 + 3(n-1) + (4n+1)$$

$$S_n = 2(n^2 - 2n + 1) + (3n - 3) + (4n+1)$$

$$S_n = (2n^2 - 4n + 2) + (3n - 3) + (4n+1)$$

$$S_n = 2n^2 + 3n \text{ (verdadeiro)}$$



Exercício Resolvido (4)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{1}^{n} [(5i + 1)^2 - (5i - 1)^2] =$$

Exercício Resolvido (4)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove-a usando indução matemática

$$\sum_{1}^n [(5i + 1)^2 - (5i - 1)^2] =$$

$$\sum_{1}^n [(25i^2 + 10i + 1) - (25i^2 - 10i + 1)] =$$

$$\sum_{1}^n [25i^2 + 10i + 1 - 25i^2 + 10i - 1] =$$

$$\sum_{1}^n [20i] =$$

$$20 \frac{n(n + 1)}{2} =$$

$$10n^2 + 10n$$

Resolvendo

Exercício Resolvido (4)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove-a usando indução matemática

$$\sum_{i=1}^n [(5i+1)^2 - (5i-1)^2] =$$

$$\sum_{i=1}^n [(25i^2 + 10i + 1) - (25i^2 - 10i + 1)] =$$

$$\sum_{i=1}^n [25i^2 + 10i + 1 - 25i^2 + 10i - 1] =$$

$$\sum_{i=1}^n [20i] =$$

$$20 \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$10n^2 + 10n$$

Provando por
indução

Prova por indução:

1) Passo base:

$$10 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 = 20 \text{ (verdadeiro)}$$

2) Indução propriamente dita:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = 10(n-1)^2 + 10(n-1) + (20n)$$

$$S_n = 10(n^2 - 2n + 1) + (10n - 10) + 20n$$

$$S_n = (10n^2 - 20n + 10) + (10n - 10) + 20n$$

$$S_n = 10n^2 + 10n \text{ (verdadeiro)}$$



Exercício Resolvido (5)

- Prove a fórmula apresentada anteriormente usando indução matemática

$$\sum_{0 \leq i \leq n} i \cdot 2^i = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$$

Exercício Resolvido (5)

- Prove a fórmula apresentada anteriormente usando indução matemática

$$\sum_{0 \leq i \leq n} i \cdot 2^i = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$$

Provando por
indução

Prova por indução:

1) Passo base:

$$(0 - 1)2^{0+1} + 2 = 0 \text{ (verdadeiro)}$$

2) Indução propriamente dita:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = [((n - 1) - 1)2^{(n-1)+1} + 2] + (n2^n)$$

$$S_n = (n - 2)2^n + 2 + n2^n$$

$$S_n = (2n - 2)2^n + 2$$

$$S_n = (n - 1)2^n 2 + 2$$

$$S_n = (n - 1)2^{n+1} + 2 \text{ (verdadeiro)}$$



Perturbe a Soma

Método: Perturbe a Soma

- Aplicamos:
 - Regras básicas de transformação: distributividade, associatividade e comutatividade
 - Propriedades P1 e P2

Exercício Resolvido (6)

- Aplique perturbação para encontrar a fórmula do somatório abaixo:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2$$

$$S_n^{COLA} + a_{n+1} = a_0 + \sum a_{i+1}$$

$$COLA$$
$$a_i = i^2$$

Exercício Resolvido (6)

- Aplique perturbação para encontrar a fórmula do somatório abaixo:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2$$

- Aplicando P2, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = 0^2 + \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2$$

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum a_{i+1}$$
$$a_i = i^2$$



Exercício Resolvido (6)

- Aplique perturbação para encontrar a fórmula do somatório abaixo:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2$$

- Aplicando P2, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \cancel{i^2} + \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2$$

$$S_n^{\text{COLA}} + a_{n+1} = a_0 + \sum a_{i+1}$$

$$\text{COLA} \\ a_i = i^2$$



Exercício Resolvido (6)

- Aplique perturbação para encontrar a fórmula do somatório abaixo:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2$$

- Aplicando P2, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \dots + \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2$$

$$S_n^{\text{COLA}} + a_{n+1} = a_0 + \sum a_{i+1}$$

$$\text{COLA} \\ a_i = i^2$$



Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2$$

Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2$$

Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1)$$

Resolvendo $(i+1)^2 = (i^2 + 2i + 1)$

Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2 + \sum_{0 \leq i \leq n} 2i + \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$

Aplicando associatividade

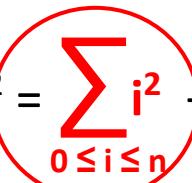
Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2 + \sum_{0 \leq i \leq n} 2i + \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$

$$S_n$$

Sabendo

Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + \sum_{0 \leq i \leq n} 2i + \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$

Substituindo

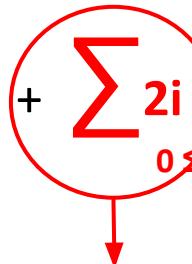
Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + \sum_{0 \leq i \leq n} 2i + \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$



Duas vezes o somatório
de Gauss: $[n \times (n+1)]$

Sabendo

Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + \textcolor{red}{n(n+1)} + \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$

Substituindo

Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + n(n+1) + \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$

\downarrow
 $(n+1)$

Sabendo

Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + n(n+1) + (n+1)$$

Substituindo

Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + n(n+1) + (n+1)$$

Temos um problema, pois as somas se anulam...

E agora José?



Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + n(n+1) + (n+1)$$

Temos um problema, pois as somas se anulam...

... vamos tentar resolver o somatório dos cubos!!!



Exercício Resolvido (7)

- Perturbe o somatório dos cubos para encontrar a fórmula fechada do somatório dos quadrados

$$S_{\text{CUBO}}_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^3$$

Exercício Resolvido (7)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$S_{\text{CUBO}}_n + a_{\text{CUBO}_{n+1}} = a_{\text{CUBO}_0} + \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^3$$

$$S_n^{\text{COLA}} + a_{n+1} = a_0 + \sum a_{i+1}$$

$$\text{COLA} \\ a_i = i^3$$



Exercício Resolvido (7)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$S_{CUBO_n} + \cancel{a_{CUBO_{n+1}}} = \cancel{a_{CUBO_0}} + \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^3$$

\downarrow \downarrow

$(n+1)^3$ 0^3

Exercício Resolvido (7)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$S_{CUBO_n} + (n+1)^3 = \cancel{0^3} + \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^3$$

Exercício Resolvido (7)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$S_{CUBO_n} + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^3$$

Exercício Resolvido (7)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$S_{\text{CUBO}_n} + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^3 \Rightarrow$$

$$S_{\text{CUBO}_n} + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^3 + 3i^2 + 3i + 1)$$

Resolvendo $(i+1)^3 = (i^3 + 3i^2 + 3i + 1)$

Exercício Resolvido (7)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$S_{\text{CUBO}_n} + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^3 \Rightarrow$$

Aplicando associatividade

$$S_{\text{CUBO}_n} + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^3 + 3i^2 + 3i + 1) \Rightarrow$$

$$S_{\text{CUBO}_n} + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} i^3 + \sum_{0 \leq i \leq n} 3i^2 + \sum_{0 \leq i \leq n} 3i + \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$



Exercício Resolvido (7)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$S_{\text{CUBO}_n} + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^3 \Rightarrow$$

Sabendo

$$S_{\text{CUBO}_n} + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^3 + 3i^2 + 3i + 1) \Rightarrow$$

$$S_{\text{CUBO}_n} + (n+1)^3$$

$$= \sum_{0 \leq i \leq n} i^3 + \sum_{0 \leq i \leq n} 3i^2 + \sum_{0 \leq i \leq n} 3i + \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$

$$S_{\text{CUBO}_n}$$

$$3S_n$$

$$\frac{3n(n+1)}{2}$$

$$(n+1)$$



Exercício Resolvido (7)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$S_{CUBO_n} + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^3 \Rightarrow$$

Substituindo

$$S_{CUBO_n} + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^3 + 3i^2 + 3i + 1) \Rightarrow$$

$$S_{CUBO_n} + (n+1)^3 = S_{CUBO_n} + 3S_n + \underline{3n(n+1)} + (n+1)^2$$

Exercício Resolvido (7)

- Reorganizando:

$$S_{\text{CUBO}_n} + \frac{(n+1)^3}{2} = S_{\text{CUBO}_n} + 3S_n + \underline{3n(n+1)} + (n+1)$$

Exercício Resolvido (7)

- Reorganizando:

$$\text{Scubo}_n + (n+1)^3 = \text{Scubo}_n + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1)$$

Eliminando Scubo_n

Exercício Resolvido (7)

- Reorganizando:

$$S_{\text{CUBO}_n} + \frac{(n+1)^3}{2} = S_{\text{CUBO}_n} + 3S_n + \underline{3n(n+1)} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = \cancel{3S_n} + \underline{3n(n+1)} + (n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)$$

Multiplicando a equação por dois e invertendo S_n de lado

Exercício Resolvido (7)

- Reorganizando:

Efetuando algebrismo

$$S_{\text{CUBO}_n} + \frac{(n+1)^3}{2} = S_{\text{CUBO}_n} + 3S_n + \underline{3n(n+1)} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = \frac{3S_n + 3n(n+1) + (n+1)}{2} \Rightarrow$$

$$6S_n = \cancel{2(n+1)^3} - \cancel{3n(n+1)} - \cancel{2(n+1)} \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 3n^2 - 3n - 2n - 2$$

Exercício Resolvido (7)

- Reorganizando:

Efetuando algebrismo

$$S_{\text{CUBO}_n} + \frac{(n+1)^3}{2} = S_{\text{CUBO}_n} + 3S_n + \underline{3n(n+1)} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + \underline{3n(n+1)} + (n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = \mathbf{2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1)} - 3n^2 - 3n - 2n - 2 \Rightarrow$$

$$6S_n = 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 3n - 2n - 2$$

Exercício Resolvido (7)

- Reorganizando:

Efetuando algebrismo

$$S_{\text{CUBO}_n} + \frac{(n+1)^3}{2} = S_{\text{CUBO}_n} + 3S_n + \underline{3n(n+1)} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = \frac{3S_n + 3n(n+1) + (n+1)}{2} \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 3n^2 - 3n - 2n - 2 \Rightarrow$$

$$\color{red}{6S_n = 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 3n - 2n - 2} \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{\underline{2n^3 + 3n^2 + n}}{6}$$

Exercício Resolvido (7)

- Reorganizando:

Efetuando algebrismo

$$S_{\text{CUBO}_n} + \frac{(n+1)^3}{2} = S_{\text{CUBO}_n} + 3S_n + \underline{3n(n+1)} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = \frac{3S_n + 3n(n+1) + (n+1)}{2} \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 3n^2 - 3n - 2n - 2 \Rightarrow$$

$$6S_n = 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 3n - 2n - 2 \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{\underline{2n^3 + 3n^2 + n}}{6} = \underline{n(n+1)(2n+1)}$$

Exercícios

Exercício (1)

- Faça um método *int somatorioPA(double a, double b, int n)* que retorna o somatório dos n primeiros termos de uma PA com termo inicial a e razão b.

Exercício (2)

- Um algoritmo de ordenação tradicional é o Inserção. Faça a análise de complexidade desse algoritmo para os números de comparações e movimentações entre registros no pior e melhor caso