

Alguns Métodos Gerais

Unidade I: Análise de Algoritmos

Agenda

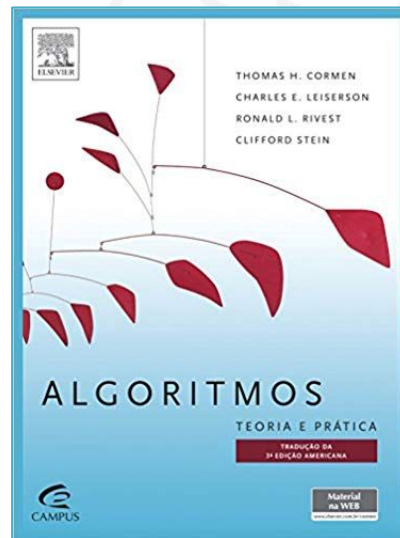
- Procure!!!
- Adivinhe a resposta, prove por indução
- Perturbe a soma



Procure!!!

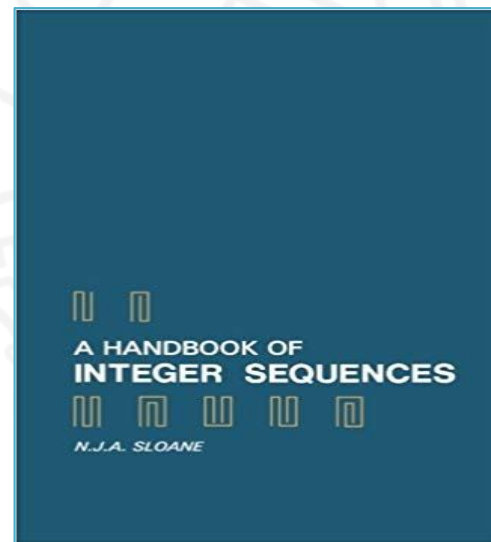
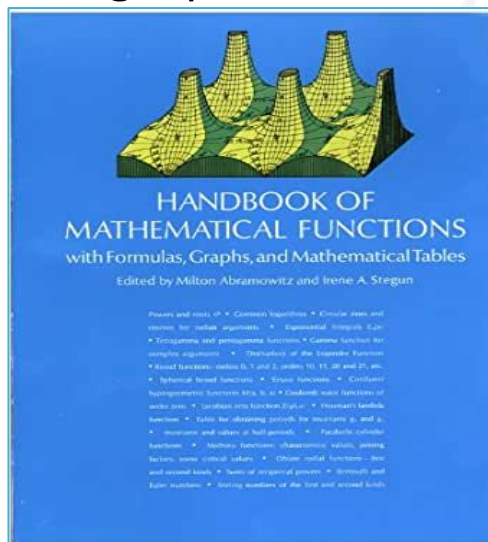
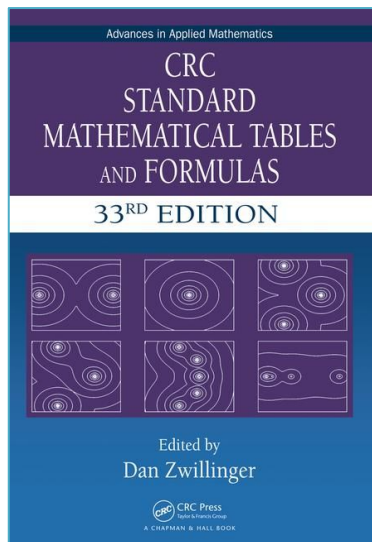
Método Procure!!!

- Possivelmente, qualquer fórmula de somatório que venhamos a precisar está resolvida na literatura, logo, procure!!!



Método Procure!!!

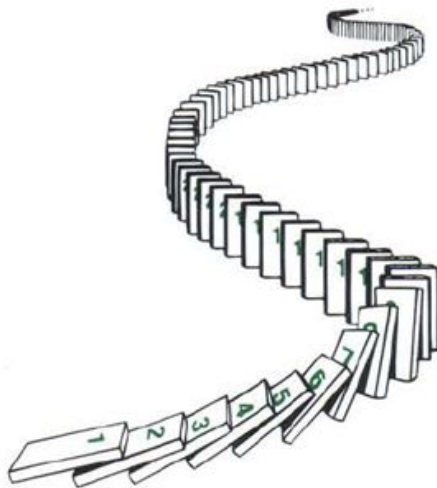
- Possivelmente, qualquer fórmula de somatório que venhamos a precisar está resolvida na literatura, logo, procure!!!



Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

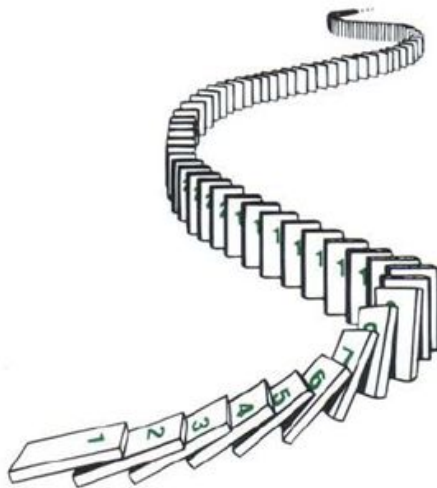
Método: Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

- Se, em um passe de mágica (ou inspiração ou dedução), descobrimos a resposta, basta prová-la por indução matemática



Método: Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

- Se, em um passe de mágica (ou inspiração ou dedução), descobrimos a resposta, basta prová-la por indução matemática



Indução Matemática:

Técnica simples e robusta para provas matemáticas

Prova por Indução

- **1º Passo (passo base):** Provar que a fórmula é verdadeira para o primeiro valor, substituindo n na equação pelo primeiro valor
- **2º Passo (indução propriamente dita):** Supondo que $n > 0$ e que a fórmula é válida quando substituimos n por $(n-1)$

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

S_{n-1} = é a equação substituindo n por $(n-1)$

a_n = n -ésimo termo da sequência

Exercício Resolvido (1)

- Prove por indução que a fórmula abaixo para a soma dos quadrados perfeitos é verdadeira:

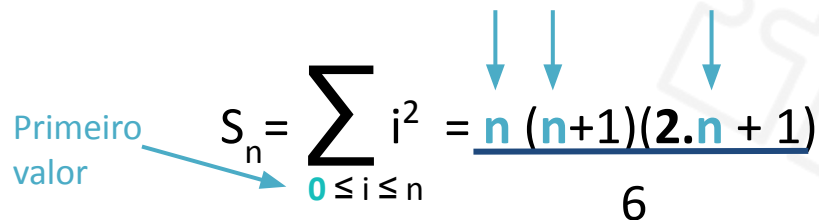
$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ para } n \geq 0$$

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | ... |
|----------------|---|---|---|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| n ² | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 | 121 | 144 | |
| S _n | 0 | 1 | 5 | 14 | 30 | 55 | 91 | 140 | 204 | 285 | 385 | 506 | 650 | |

Exercício Resolvido (1)

- **1º Passo (passo base):** Na equação, substituir n pelo primeiro valor (zero)

Primeiro valor

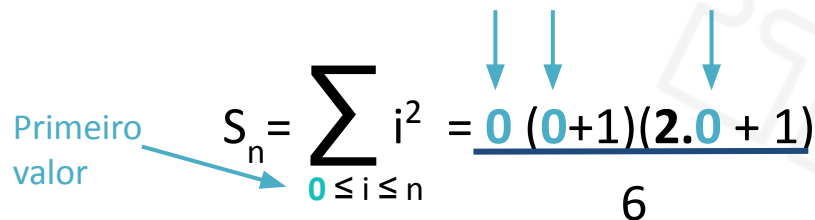
$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$




Exercício Resolvido (1)

- **1º Passo (passo base):** Na equação, substituir n pelo primeiro valor (zero)

Primeiro valor

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2 = \frac{0(0+1)(2 \cdot 0 + 1)}{6}$$




Exercício Resolvido (1)

- **1º Passo (passo base):** Na equação, substituir n pelo primeiro valor (zero)

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2 = \frac{0(0+1)(2 \cdot 0 + 1)}{6} = 0 \quad (\text{verdadeiro})$$

Lembre que 0^2 é igual a 0



Exercício Resolvido (1)

- **2º Passo (indução propriamente dita):** Aplicar a fórmula

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$



Exercício Resolvido (1)

- 2º Passo (indução propriamente dita):

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$



Exercício Resolvido (1)

- 2º Passo (indução propriamente dita):

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$a_n = n^2$$

$$S_{n-1} = \frac{(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6}$$



Exercício Resolvido (1)

- 2º Passo (indução propriamente dita):

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$a_n = n^2$$

$$S_{n-1} = \frac{(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}$$



Exercício Resolvido (1)

- 2º Passo (indução propriamente dita):

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2$$

Substituindo S_{n-1} e a_n



Exercício Resolvido (1)

- **2º Passo (indução propriamente dita):**

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \quad \Rightarrow$$

$$6S_n = (n-1)(n)(2n-1) + 6n^2$$

Multiplicando a equação por seis



Exercício Resolvido (1)

- **2º Passo (indução propriamente dita):**

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \quad \Rightarrow$$

$$6S_n = (n-1)(n)(2n-1) + 6n^2 \quad \Rightarrow$$

$$6S_n = (n^2 - n)(2n-1) + 6n^2$$

Resolvendo $(n-1)(n)$



Exercício Resolvido (1)

- 2º Passo (indução propriamente dita):

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \quad \Rightarrow$$

$$6S_n = (n-1)(n)(2n-1) + 6n^2 \quad \Rightarrow$$

$$6S_n = (n^2-n)(2n-1) + 6n^2 \quad \Rightarrow$$

$$6S_n = [2n^3 - n^2 - 2n^2 + n] + 6n^2$$

Resolvendo $(n^2-n)(2n-1)$



Exercício Resolvido (1)

- 2º Passo (indução propriamente dita):

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = (n-1)(n)(2n-1) + 6n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = (n^2 - n)(2n - 1) + 6n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = [2n^3 - n^2 - 2n^2 + n] + 6n^2 \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Resolvendo os termos com n^2 e invertendo o lado do “6”



Exercício Resolvido (1)

- **2º Passo (indução propriamente dita):**

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \quad \Rightarrow$$

$$6S_n = (n-1)(n)(2n-1) + 6n^2 \quad \Rightarrow$$

$$6S_n = (n^2 - n)(2n - 1) + 6n^2 \quad \Rightarrow$$

$$6S_n = [2n^3 - n^2 - 2n^2 + n] + 6n^2 \quad \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



Exercício Resolvido (1)

- **2º Passo (indução propriamente dita):**

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \quad \Rightarrow$$

$$6S_n = (n-1)(n)(2n-1) + 6n^2 \quad \Rightarrow$$

$$6S_n = (n^2 - n)(2n-1) + 6n^2 \quad \Rightarrow$$

$$6S_n = [2n^3 - n^2 - 2n^2 + n] + 6n^2 \quad \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (\text{verdadeiro})$$



Exercício Resolvido (2)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{i=0}^n (3 + i) =$$

Exercício Resolvido (2)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{i=0}^n (3 + i) =$$
$$\sum_{i=0}^n 3 + \sum_{i=0}^n i =$$

Usando associatividade



Exercício Resolvido (2)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n (3 + i) &= \\ \sum_{i=0}^n 3 + \sum_{i=0}^n i &= \\ 3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} &= \end{aligned}$$

Sabendo o valor dos dois somatórios:

- Somatório de 3
- Somatório de Gauss



Exercício Resolvido (2)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{i=0}^n (3 + i) =$$

$$\sum_{i=0}^n 3 + \sum_{i=0}^n i =$$

$$3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$\frac{6n + 6 + n^2 + n}{2} =$$

Efetuando algebrismo



Exercício Resolvido (2)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{i=0}^n (3 + i) =$$

$$\sum_{i=0}^n 3 + \sum_{i=0}^n i =$$

$$3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$\frac{6n + 6 + n^2 + n}{2} =$$

$$\frac{n^2 + 7n + 6}{2}$$

Continuando nosso algebrismo



Exercício Resolvido (2)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n (3+i) &= \\ \sum_{i=0}^n 3 + \sum_{i=0}^n i &= \\ 3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} &= \\ \frac{6n+6+n^2+n}{2} &= \\ \frac{n^2+7n+6}{2}\end{aligned}$$

Provando por
indução

Prova por indução:

1) Passo base:

2) Indução propriamente dita:



Exercício Resolvido (2)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n (3+i) &= \\ \sum_{i=0}^n 3 + \sum_{i=0}^n i &= \\ 3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} &= \\ \frac{6n+6+n^2+n}{2} &= \\ \frac{n^2+7n+6}{2}\end{aligned}$$

Passo base

Prova por indução:

1) Passo base:

$$\frac{0^2 + 7 \cdot 0 + 6}{2} = 3 \text{ (verdadeiro)}$$

2) Indução propriamente dita:

Exercício Resolvido (2)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n (3+i) &= \\ \sum_{i=0}^n 3 + \sum_{i=0}^n i &= \\ 3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} &= \\ \frac{6n+6+n^2+n}{2} &= \\ \frac{n^2+7n+6}{2}\end{aligned}$$

Indução
propriamente
dita

Prova por indução:

1) Passo base:

$$\frac{0^2 + 7 \cdot 0 + 6}{2} = 3 \text{ (verdadeiro)}$$

2) Indução propriamente dita:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)^2 + 7(n-1) + 6}{2} + (3+n)$$

$$S_n = \frac{(n^2 - 2n + 1) + (7n - 7) + 6}{2} + \frac{2(3+n)}{2}$$

$$S_n = \frac{(n^2 - 2n + 1) + (7n - 7) + 6 + (6 + 2n)}{2}$$

$$S_n = \frac{n^2 + 7n + 6}{2} \text{ (verdadeiro)}$$



Exercício Resolvido (3)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_1^n [(2i+1)^2 - (2i)^2] =$$

Exercício Resolvido (3)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_1^n [(2i+1)^2 - (2i)^2] =$$

$$\sum_1^n [(4i^2 + 4i + 1) - 4i^2] =$$

$$\sum_1^n [4i + 1] =$$

$$4 \sum_1^n [i] + \sum_1^n [1] =$$

$$4 \frac{n(n+1)}{2} + n =$$

$$2n^2 + 3n$$

Resolvendo

Exercício Resolvido (3)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_1^n [(2i+1)^2 - (2i)^2] =$$

$$\sum_1^n [(4i^2 + 4i + 1) - 4i^2] =$$

$$\sum_1^n [4i + 1] =$$

$$4 \sum_1^n [i] + \sum_1^n [1] =$$

$$4 \frac{n(n+1)}{2} + n =$$

$$2n^2 + 3n$$

Provando por
indução

Prova por indução:

1) Passo base:

2) Indução propriamente dita:



Exercício Resolvido (3)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_1^n [(2i+1)^2 - (2i)^2] =$$

$$\sum_1^n [(4i^2 + 4i + 1) - 4i^2] =$$

$$\sum_1^n [4i + 1] =$$

$$4 \sum_1^n [i] + \sum_1^n [1] =$$

$$4 \frac{n(n+1)}{2} + n =$$

$$2n^2 + 3n$$

Passo base

Prova por indução:

1) Passo base:

$$2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 5 \text{ (verdadeiro)}$$

2) Indução propriamente dita:



Exercício Resolvido (3)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_1^n [(2i+1)^2 - (2i)^2] =$$

$$\sum_1^n [(4i^2 + 4i + 1) - 4i^2] =$$

$$\sum_1^n [4i + 1] =$$

$$4 \sum_1^n [i] + \sum_1^n [1] =$$

$$4 \frac{n(n+1)}{2} + n =$$

$$2n^2 + 3n$$

Indução
propriamente
dita

Prova por indução:

1) Passo base:

$$2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 5 \text{ (verdadeiro)}$$

2) Indução propriamente dita:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = 2(n-1)^2 + 3(n-1) + (4n+1)$$

$$S_n = 2(n^2 - 2n + 1) + (3n - 3) + (4n + 1)$$

$$S_n = (2n^2 - 4n + 2) + (3n - 3) + (4n + 1)$$

$$S_n = 2n^2 + 3n \text{ (verdadeiro)}$$



Exercício Resolvido (4)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{i=1}^n [(5i+1)^2 - (5i-1)^2] =$$

Exercício Resolvido (4)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n [(5i+1)^2 - (5i-1)^2] = \\ & \sum_{i=1}^n [(25i^2 + 10i + 1) - (25i^2 - 10i + 1)] = \\ & \sum_{i=1}^n [25i^2 + 10i + 1 - 25i^2 + 10i - 1] = \\ & \sum_{i=1}^n [20i] = \\ & 20 \frac{n(n+1)}{2} = \end{aligned}$$

$$10n^2 + 10n$$

Resolvendo

Exercício Resolvido (4)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n [(5i+1)^2 - (5i-1)^2] = \\ & \sum_{i=1}^n [(25i^2 + 10i + 1) - (25i^2 - 10i + 1)] = \\ & \sum_{i=1}^n [25i^2 + 10i + 1 - 25i^2 + 10i - 1] = \\ & \sum_{i=1}^n [20i] = \\ & 20 \frac{n(n+1)}{2} = \end{aligned}$$

$$10n^2 + 10n$$

Provando por
indução

Prova por indução:

1) Passo base:

$$10 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 = 20 \text{ (verdadeiro)}$$

2) Indução propriamente dita:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = 10(n-1)^2 + 10(n-1) + (20n)$$

$$S_n = 10(n^2 - 2n + 1) + (10n - 10) + 20n$$

$$S_n = (10n^2 - 20n + 10) + (10n - 10) + 20n$$

$$S_n = 10n^2 + 10n \text{ (verdadeiro)}$$



Exercício Resolvido (5)

- Prove a fórmula apresentada anteriormente usando indução matemática

$$\sum_{0 \leq i \leq n} i \cdot 2^i = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$$

Exercício Resolvido (5)

- Prove a fórmula apresentada anteriormente usando indução matemática

$$\sum_{0 \leq i \leq n} i \cdot 2^i = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$$

Provando por
indução

Prova por indução:

1) Passo base:

$$(0 - 1)2^{0+1} + 2 = 0 \text{ (verdadeiro)}$$

2) Indução propriamente dita:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = [((n-1) - 1)2^{(n-1)+1} + 2] + (n2^n)$$

$$S_n = (n-2)2^n + 2 + n2^n$$

$$S_n = (2n-2)2^n + 2$$

$$S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$$

$$S_n = (n-1)2^{n+1} + 2 \text{ (verdadeiro)}$$



Perturbe a Soma

Método: Perturbe a Soma

- Aplicamos:
 - Regras básicas de transformação: distributividade, associatividade e comutatividade
 - Propriedades P1 e P2

Exercício Resolvido (6)

- Aplique perturbação para encontrar a fórmula do somatório abaixo:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2$$

$$S_n^{\text{COLA}} + a_{n+1} = a_0 + \sum_{i+1} a_i$$

$$a_i^{\text{COLA}} = i^2$$

Exercício Resolvido (6)

- Aplique perturbação para encontrar a fórmula do somatório abaixo:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2$$

- Aplicando P2, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = 0^2 + \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2$$

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{i+1} a_i$$
$$a_i = i^2$$

Exercício Resolvido (6)

- Aplique perturbação para encontrar a fórmula do somatório abaixo:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2$$

- Aplicando P2, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \cancel{0^2} + \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2$$

$$S_n^{\text{COLA}} + a_{n+1} = a_0 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i$$

COLA

$$a_i = i^2$$



Exercício Resolvido (6)

- Aplique perturbação para encontrar a fórmula do somatório abaixo:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2$$

- Aplicando P2, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2$$

$$S_n^{\text{COLA}} + a_{n+1} = a_0 + \sum_{i+1} a_i$$

$$a_i = i^2$$



Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2$$

Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2$$

Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1)$$

Resolvendo $(i+1)^2 = (i^2 + 2i + 1)$



Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2 + \sum_{0 \leq i \leq n} 2i + \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$

Aplicando associatividade



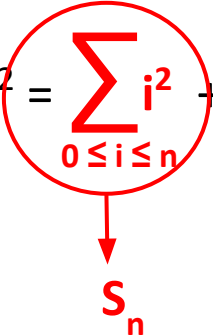
Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2 + \sum_{0 \leq i \leq n} 2i + \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$



Sabendo

Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \textcolor{red}{S}_n + \sum_{0 \leq i \leq n} 2i + \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$

Substituindo



Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + \sum_{0 \leq i \leq n} 2i + \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$

**Duas vezes o somatório
de Gauss: $[n \times (n+1)]$**

Sabendo

Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + \mathbf{n(n+1)} + \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$

Substituindo



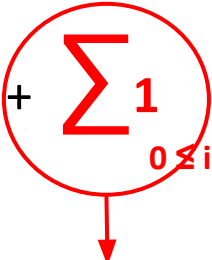
Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + n(n+1) + \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$


(n+1)

Sabendo

Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + n(n+1) + \mathbf{(n+1)}$$

Substituindo



Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + n(n+1) + (n+1)$$

Temos um problema, pois as somas se anulam...

E agora José?



Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2 + 2i + 1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + n(n+1) + (n+1)$$

Temos um problema, pois as somas se anulam...

... vamos tentar resolver o somatório dos cubos!!!



Exercício Resolvido (7)

- Perturbe o somatório dos cubos para encontrar a fórmula fechada do somatório dos quadrados

$$S_{\text{CUBO}}_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^3$$



Exercício Resolvido (7)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$S_{\text{CUBO}}_n + a_{\text{CUBO}}_{n+1} = a_{\text{CUBO}}_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^3$$

$$S_n^{\text{COLA}} + a_{n+1} = a_0 + \sum_{i+1} a_i$$

$$a_i^{\text{COLA}} = i^3$$

Exercício Resolvido (7)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$Scubo_n + \text{acubo}_{n+1} = \text{acubo}_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^3$$

Diagram illustrating the application of P2 to the sum of cubes. The terms acubo_{n+1} and acubo_0 are circled in red. Arrows point from these terms to $(n+1)^3$ and 0^3 respectively, indicating the substitution of the recursive formula.

Exercício Resolvido (7)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$SCUBO_n + (n+1)^3 = \cancel{0^3} + \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^3$$

Exercício Resolvido (7)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$S_{CUBO_n} + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^3$$

Exercício Resolvido (7)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$SCUBO_n + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^3 \Rightarrow$$

$$SCUBO_n + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^3 + 3i^2 + 3i + 1)$$

Resolvendo $(i+1)^3 = (i^3 + 3i^2 + 3i + 1)$



Exercício Resolvido (7)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$SCUBO_n + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^3 \Rightarrow$$

Aplicando associatividade

$$SCUBO_n + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^3 + 3i^2 + 3i + 1) \Rightarrow$$

$$SCUBO_n + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} i^3 + \sum_{0 \leq i \leq n} 3i^2 + \sum_{0 \leq i \leq n} 3i + \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$



Exercício Resolvido (7)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$SCUBO_n + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^3 \Rightarrow$$

Sabendo

$$SCUBO_n + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^3 + 3i^2 + 3i + 1) \Rightarrow$$

$$SCUBO_n + (n+1)^3 = \underbrace{\sum_{0 \leq i \leq n} i^3}_{SCUBO_n} + \underbrace{\sum_{0 \leq i \leq n} 3i^2}_{3S_n} + \underbrace{\sum_{0 \leq i \leq n} 3i}_{\frac{3n(n+1)}{2}} + \underbrace{\sum_{0 \leq i \leq n} 1}_{(n+1)}$$

Exercício Resolvido (7)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$SCUBO_n + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^3 \Rightarrow$$

$$SCUBO_n + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^3 + 3i^2 + 3i + 1) \Rightarrow$$

$$SCUBO_n + (n+1)^3 = SCUBO_n + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1)$$

Substituindo

Exercício Resolvido (7)

- Reorganizando:

$$S_{\text{CUBO}_n} + (n+1)^3 = S_{\text{CUBO}_n} + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1)$$

Exercício Resolvido (7)

- Reorganizando:

$$\text{Scubo}_n + (n+1)^3 = \text{Scubo}_n + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1)$$

Eliminando Scubo_n

Exercício Resolvido (7)

- Reorganizando:

$$SCUBO_n + (n+1)^3 = SCUBO_n + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)$$

Multiplicando a equação por dois e invertendo S_n de lado

Exercício Resolvido (7)

- Reorganizando:

Efetuando algebrismo

$$S_{CUBO_n} + (n+1)^3 = S_{CUBO_n} + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 3n^2 - 3n - 2n - 2$$

Exercício Resolvido (7)

- Reorganizando:

Efetuada algebrismo

$$S_{CUBO_n} + (n+1)^3 = S_{CUBO_n} + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = \mathbf{2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1)} - 3n^2 - 3n - 2n - 2 \Rightarrow$$

$$6S_n = 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 3n - 2n - 2$$

Exercício Resolvido (7)

- Reorganizando:

Efetuando algebrismo

$$S_{\text{CUBO}_n} + (n+1)^3 = S_{\text{CUBO}_n} + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 3n^2 - 3n - 2n - 2 \Rightarrow$$

$$6S_n = 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 3n - 2n - 2 \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Exercício Resolvido (7)

- Reorganizando:

Efetuando algebrismo

$$S_{CUBO_n} + (n+1)^3 = S_{CUBO_n} + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 3n^2 - 3n - 2n - 2 \Rightarrow$$

$$6S_n = 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 3n - 2n - 2 \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercícios

Exercício (1)

- Faça um método *int somatorioPA(double a, double b, int n)* que retorna o somatório dos n primeiros termos de uma PA com termo inicial a e razão b .

Exercício (2)

- Um algoritmo de ordenação tradicional é o Inserção. Faça a análise de complexidade desse algoritmo para os números de comparações e movimentações entre registros no pior e melhor caso