Alguns Métodos Gerais

Unidade I: Análise de Algoritmos

PUC Minas Virtual

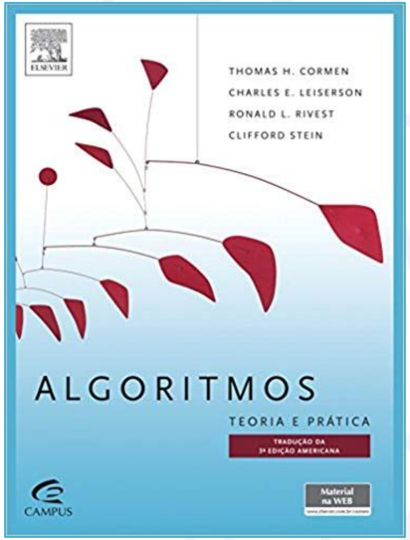
Agenda

- Procure!!!
- Adivinhe a resposta, prove por indução
- Perturbe a soma

Procure!!!

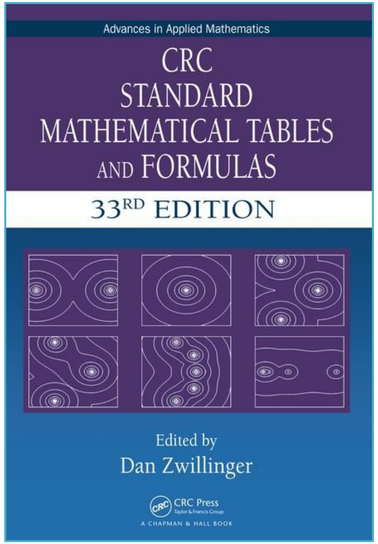
Método Procure!!!

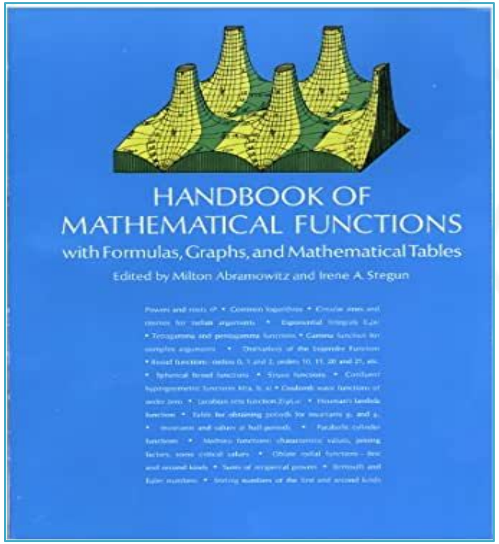
- Possivelmente, qualquer fórmula de somatório que venhamos a precisar está resolvida na literatura, logo, procure!!!

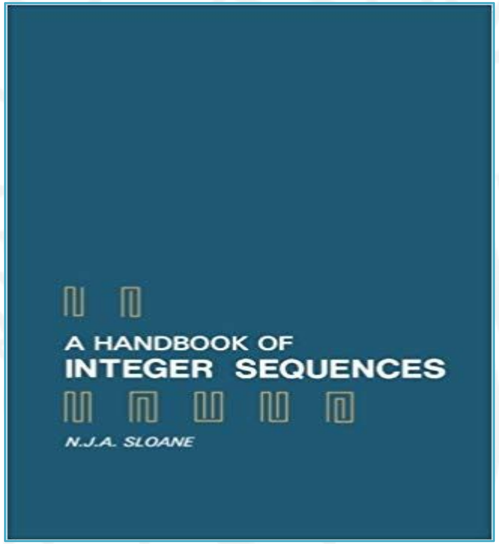


Método Procure!!!

- Possivelmente, qualquer fórmula de somatório que venhamos a precisar está resolvida na literatura, logo, procure!!!





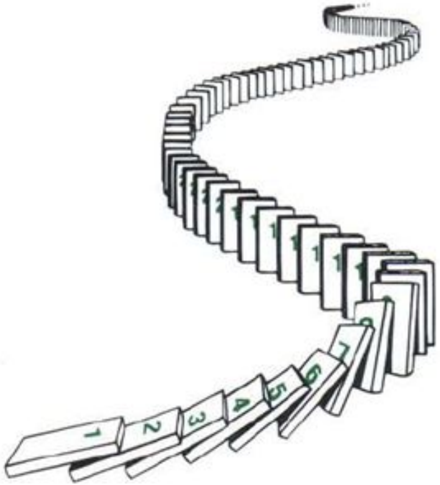


Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

PUC Minas Virtual

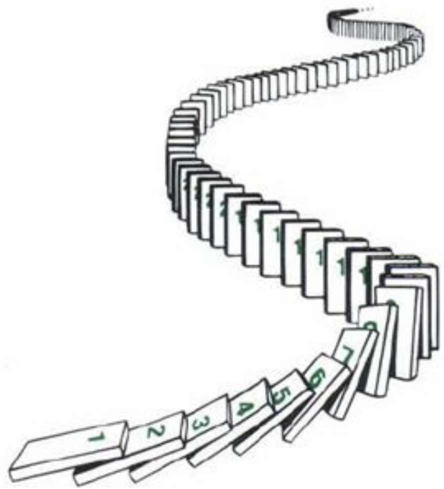
Método: Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

- Se, em um passe de mágica (ou inspiração ou dedução), descobrimos a resposta, basta prová-la por indução matemática



Método: Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

- Se, em um passe de mágica (ou inspiração ou dedução), descobrimos a resposta, basta prová-la por indução matemática



Indução Matemática:
Técnica simples e robusta para provas matemáticas

Prova por Indução

- 1º Passo (passo base): Provar que a fórmula é verdadeira para o primeiro valor, substituindo ***n*** na equação pelo primeiro valor

- 2º Passo (indução propriamente dita): Supondo que n > 0 e que a fórmula é válida quando substituímos ***n*** por ***(n-1)***

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

S_{n-1} = é a equação substituindo ***n*** por ***(n-1)***

a_n = n-ésimo termo da sequência

Exercício Resolvido (1)

- Prove por indução que a fórmula abaixo para a soma dos quadrados perfeitos é verdadeira:

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} i^2 = \frac{n\,(n+1)(2.n + 1)}{6}, \text{ para } n \ge 0$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
n^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	...
S_n	0	1	5	14	30	55	91	140	204	285	385	506	650	

Exercício Resolvido (1)

- **1º Passo (passo base)**: Na equação, substituir ***n*** pelo primeiro valor (zero)

Primeiro valor

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2 = \frac{n\,(n+1)(2.n + 1)}{6}$$

Exercício Resolvido (1)

- **1º Passo (passo base)**: Na equação, substituir ***n*** pelo primeiro valor (zero)

Primeiro valor

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} i^2 = \frac{0\,(0+1)(\mathbf{2.}0 + 1)}{6}$$

Exercício Resolvido (1)

- **1º Passo (passo base)**: Na equação, substituir ***n*** pelo primeiro valor (zero)

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2 = \frac{0\,(0+1)(2.0+1)}{6} = 0$$

(verdadeiro)

Lembre que 0^2 é igual a 0

Exercício Resolvido (1)

- **2º Passo (indução propriamente dita)**: Aplicar a fórmula
  $S_n = S_{n-1} + a_n$

Exercício Resolvido (1)

- 2º Passo (indução propriamente dita):

  $S_n = S_{n-1} + a_n$

Exercício Resolvido (1)

- 2º Passo (indução propriamente dita):

$S_n = S_{n-1} + a_n$

$a_n = n^2$

$$S_{n-1} = \frac{(n-1)\,((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6}$$

Exercício Resolvido (1)

- 2º Passo (indução propriamente dita):

$S_n = S_{n-1} + a_n$

$a_n = n^2$

$$S_{n-1} = \frac{(n-1)\,((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}$$

Exercício Resolvido (1)

- **2º Passo (indução propriamente dita):**

  $S_n = \mathbf{S_{n-1}} + \mathbf{a_n}$

  $S_n = \dfrac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2$

Substituindo S_{n-1} e a_n

Exercício Resolvido (1)

- **2º Passo (indução propriamente dita):**

$S_n = S_{n-1} + a_n$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \quad \Rightarrow$$

$$6S_n = (n-1)(n)(2n-1) + 6n^2$$

Multiplicando a equação por seis

Exercício Resolvido (1)

- **2º Passo (indução propriamente dita)**:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \quad \Rightarrow$$

$$6S_n = (n-1)(n)(2n-1) + 6n^2 \quad \Rightarrow$$

$$6S_n = \mathbf{(n^2-n)}(2n-1) + 6n^2$$

Resolvendo (n-1)(n)

Exercício Resolvido (1)

- 2º Passo (indução propriamente dita):

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \quad \Rightarrow$$

$$6S_n = (n-1)(n)(2n-1) + 6n^2 \quad \Rightarrow$$

$$6S_n = (n^2-n)(2n-1) + 6n^2 \quad \Rightarrow$$

$$6S_n = \mathbf{[2n^3 - n^2 - 2n^2 + n]} + 6n^2$$

Resolvendo **$(n^2-n)(2n-1)$**

✓

Exercício Resolvido (1)

- 2º Passo (indução propriamente dita):

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \quad \Rightarrow$$

$$6S_n = (n-1)(n)(2n-1) + 6n^2 \quad \Rightarrow$$

$$6S_n = (n^2-n)(2n-1) + 6n^2 \quad \Rightarrow$$

$$6S_n = [2n^3 - n^2 - 2n^2 + n] + 6n^2 \quad \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Resolvendo os termos com n^2 e invertendo o lado do "6"

Exercício Resolvido (1)

- 2º Passo (indução propriamente dita):

$S_n = S_{n-1} + a_n$

$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \Rightarrow$

$6S_n = (n-1)(n)(2n-1) + 6n^2 \Rightarrow$

$6S_n = (n^2-n)(2n-1) + 6n^2 \Rightarrow$

$6S_n = [2n^3 - n^2 - 2n^2 + n] + 6n^2 \Rightarrow$

$S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ✓

Exercício Resolvido (1)

- **2º Passo (indução propriamente dita)**:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \quad \Rightarrow$$

$$6S_n = (n-1)(n)(2n-1) + 6n^2 \quad \Rightarrow$$

$$6S_n = (n^2-n)(2n-1) + 6n^2 \quad \Rightarrow$$

$$6S_n = [2n^3 - n^2 - 2n^2 + n] + 6n^2 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$ (verdadeiro)

Exercício Resolvido (2)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{0}^{n}(3+i) =$$

Exercício Resolvido (2)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{0}^{n}(3+i) =$$

$$\sum_{0}^{n} 3 + \sum_{0}^{n} i =$$

Usando associatividade

Exercício Resolvido (2)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{0}^{n}(3+i) =$$

$$\sum_{0}^{n} 3 + \sum_{0}^{n} i =$$

$$3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} =$$

Sabendo o valor dos dois somatórios:

- Somatório de 3
- Somatório de Gauss

Exercício Resolvido (2)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{0}^{n}(3+i) =$$

$$\sum_{0}^{n}3 + \sum_{0}^{n}i =$$

$$3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$\frac{6n+6+n^2+n}{2} =$$

Efetuando algebrismo

Exercício Resolvido (2)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{0}^{n}(3+i) =$$

$$\sum_{0}^{n} 3 + \sum_{0}^{n} i =$$

$$3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$\frac{6n + 6 + n^2 + n}{2} =$$

$$\frac{n^2 + 7n + 6}{2}$$

Continuando nosso algebrismo

Exercício Resolvido (2)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{0}^{n}(3+i) =$$

$$\sum_{0}^{n} 3 + \sum_{0}^{n} i =$$

$$3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$\frac{6n+6+n^2+n}{2} =$$

$$\frac{n^2+7n+6}{2}$$

Provando por indução

<u>Prova por indução:</u>

1) Passo base:

2) Indução propriamente dita:

Exercício Resolvido (2)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{0}^{n}(3+i) =$$

$$\sum_{0}^{n} 3 + \sum_{0}^{n} i =$$

$$3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$\frac{6n+6+n^2+n}{2} =$$

$$\frac{n^2+7n+6}{2}$$

Prova por indução:

1) Passo base:

$$\frac{0^2+7.0+6}{2} = 3 \; (verdadeiro)$$

2) Indução propriamente dita:

Passo base

Exercício Resolvido (2)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{0}^{n}(3+i) =$$

$$\sum_{0}^{n} 3 + \sum_{0}^{n} i =$$

$$3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$\frac{6n+6+n^2+n}{2} =$$

$$\frac{n^2+7n+6}{2}$$

Prova por indução:

1) Passo base:

$$\frac{0^2+7.0+6}{2} = 3 \ (verdadeiro)$$

2) Indução propriamente dita:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)^2+7(n-1)+6}{2} + (3+n)$$

$$S_n = \frac{(n^2-2n+1)+(7n-7)+6}{2} + \frac{2(3+n)}{2}$$

$$S_n = \frac{(n^2-2n+1)+(7n-7)+6+(6+2n)}{2}$$

$$S_n = \frac{n^2+7n+6}{2} \ (verdadeiro)$$

Indução propriamente dita

PUC Minas Virtual

Exercício Resolvido (3)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{1}^{n}[(2i+1)^2 - (2i)^2] =$$

Exercício Resolvido (3)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{1}^{n}[(2i+1)^2 - (2i)^2] =$$

$$\sum_{1}^{n}[(4i^2+4i+1) - 4i^2] =$$

$$\sum_{1}^{n}[4i+1] =$$

$$4\sum_{1}^{n}[i] + \sum_{1}^{n}[1] =$$

$$4\frac{n(n+1)}{2} + n =$$

$$2n^2+3n$$

Resolvendo

Exercício Resolvido (3)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{1}^{n}[(2i+1)^2-(2i)^2]=$$

$$\sum_{1}^{n}[(4i^2+4i+1)-4i^2]=$$

$$\sum_{1}^{n}[4i+1]=$$

$$4\sum_{1}^{n}[i]+\sum_{1}^{n}[1]=$$

$$4\frac{n(n+1)}{2}+n=$$

$$2n^2+3n$$

Provando por indução

Prova por indução:

1) Passo base:

2) Indução propriamente dita:

Exercício Resolvido (3)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{1}^{n}[(2i+1)^2 - (2i)^2] =$$

$$\sum_{1}^{n}[(4i^2 + 4i + 1) - 4i^2] =$$

$$\sum_{1}^{n}[4i + 1] =$$

$$4\sum_{1}^{n}[i] + \sum_{1}^{n}[1] =$$

$$4\frac{n(n+1)}{2} + n =$$

$$2n^2 + 3n$$

Prova por indução:

1) Passo base:

$$2.1^2 + 3.1 = 5 \ (verdadeiro)$$

2) Indução propriamente dita:

Passo base

PUC Minas Virtual

Exercício Resolvido (3)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{1}^{n}[(2i+1)^2 - (2i)^2] =$$

$$\sum_{1}^{n}[(4i^2+4i+1) - 4i^2] =$$

$$\sum_{1}^{n}[4i+1] =$$

$$4\sum_{1}^{n}[i] + \sum_{1}^{n}[1] =$$

$$4\frac{n(n+1)}{2} + n =$$

$$2n^2 + 3n$$

Indução propriamente dita

Prova por indução:

1) Passo base:

$$2.1^2 + 3.1 = 5\ (verdadeiro)$$

2) Indução propriamente dita:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = 2(n-1)^2 + 3(n-1) + (4n+1)$$

$$S_n = 2(n^2 - 2n + 1) + (3n - 3) + (4n + 1)$$

$$S_n = (2n^2 - 4n + 2) + (3n - 3) + (4n + 1)$$

$$S_n = 2n^2 + 3n\ (verdadeiro)$$

Exercício Resolvido (4)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{1}^{n}[(5i+1)^2 - (5i-1)^2] =$$

Exercício Resolvido (4)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{1}^{n}[(5i+1)^2-(5i-1)^2] =$$

$$\sum_{1}^{n}[(25i^2+10i+1)-(25i^2-10i+1)] =$$

$$\sum_{1}^{n}[25i^2+10i+1-25i^2+10i-1] =$$

$$\sum_{1}^{n}[20i] =$$

$$20\frac{n(n+1)}{2} =$$

$$10n^2+10n$$

Resolvendo

Exercício Resolvido (4)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{1}^{n}[(5i+1)^2-(5i-1)^2] =$$

$$\sum_{1}^{n}[(25i^2+10i+1)-(25i^2-10i+1)] =$$

$$\sum_{1}^{n}[25i^2+10i+1-25i^2+10i-1] =$$

$$\sum_{1}^{n}[20i] =$$

$$20\frac{n(n+1)}{2} =$$

$$10n^2+10n$$

Provando por indução

Prova por indução:

1) Passo base:

$$10.1^2+10.1=20\ (verdadeiro)$$

2) Indução propriamente dita:

$$S_n = S_{n-1}+a_n$$

$$S_n = 10(n-1)^2+10(n-1)+(20n)$$

$$S_n = 10(n^2-2n+1)+(10n-10)+20n$$

$$S_n = (10n^2-20n+10)+(10n-10)+20n$$

$$S_n = 10n^2+10n\ (verdadeiro)$$

Exercício Resolvido (5)

- Prove a fórmula apresentada anteriormente usando indução matemática

$$\sum_{0 \le i \le n} i.2^i = (n-1).2^{n+1} + 2$$

Exercício Resolvido (5)

- Prove a fórmula apresentada anteriormente usando indução matemática

$$\sum_{0 \leq i \leq n} i.2^i = (n-1).2^{n+1} + 2$$

Provando por indução

Prova por indução:

1) Passo base:

$$(0-1)2^{0+1} + 2 = 0 \ (verdadeiro)$$

2) Indução propriamente dita:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = [((n-1)-1)2^{(n-1)+1} + 2] + (n2^n)$$

$$S_n = (n-2)2^n + 2 + n2^n$$

$$S_n = (2n-2)2^n + 2$$

$$S_n = (n-1)2^n 2 + 2$$

$$S_n = (n-1)2^{n+1} + 2 \ (verdadeiro)$$

Perturbe a Soma

Método: Perturbe a Soma

- Aplicamos:
  - Regras básicas de transformação: distributividade, associatividade e comutatividade
  - Propriedades P1 e P2

Exercício Resolvido (6)

- Aplique perturbação para encontrar a fórmula do somatório abaixo:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2$$

COLA

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum a_{i+1}$$

COLA

$$a_i = i^2$$

PUC Minas Virtual

Exercício Resolvido (6)

- Aplique perturbação para encontrar a fórmula do somatório abaixo:

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} i^2$$

- Aplicando P2, temos: $S_n + (n+1)^2 = 0^2 + \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^2$

COLA

$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum a_{i+1}$

COLA

$a_i = i^2$

Exercício Resolvido (6)

- Aplique perturbação para encontrar a fórmula do somatório abaixo:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2$$

- Aplicando P2, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \cancel{0^2} + \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2$$

COLA

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum a_{i+1}$$

COLA

$$a_i = i^2$$

PUC Minas Virtual

Exercício Resolvido (6)

- Aplique perturbação para encontrar a fórmula do somatório abaixo:

$$\boxed{S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2}$$

- Aplicando P2, temos: $S_n + (n+1)^2 = \quad + \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2$

COLA

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum a_{i+1}$$

COLA

$$a_i = i^2$$

Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2$$

Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$\boxed{S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2}$$

Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} \mathbf{(i^2+2i+1)}$$

Resolvendo $(i+1)^2 = (i^2+2i+1)$

Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} (i^2+2i+1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} i^2 + \sum_{0 \le i \le n} 2i + \sum_{0 \le i \le n} 1$$

Aplicando associatividade

PUC Minas Virtual

Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

Sabendo

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2+2i+1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \underbrace{\sum_{0 \leq i \leq n} i^2}_{S_n} + \sum_{0 \leq i \leq n} 2i + \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$

Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

Substituindo

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} (i^2+2i+1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \mathbf{S_n} + \sum_{0 \le i \le n} 2i + \sum_{0 \le i \le n} 1$$

Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

Sabendo

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2+2i+1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + \sum_{0 \leq i \leq n} 2i + \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$

Duas vezes o somatório de Gauss: [n *x* (n+1)]

Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

Substituindo

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2+2i+1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n \quad + \mathbf{n\,(n+1)} + \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$

Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

Sabendo

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} (i^2+2i+1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + n(n+1) + \sum_{0 \le i \le n} 1$$

$$\sum_{0 \le i \le n} 1 \rightarrow (n+1)$$

Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} (i^2+2i+1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + n(n+1) + \mathbf{(n+1)}$$

Substituindo

Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} (i^2+2i+1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + n(n+1) + (n+1)$$

Temos um problema, pois as somas se anulam...

E agora José?

Exercício Resolvido (6)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} (i^2+2i+1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + n(n+1) + (n+1)$$

Temos um problema, pois as somas se anulam...

... vamos tentar resolver o somatório dos cubos!!!

Exercício Resolvido (7)

- Perturbe o somatório dos cubos para encontrar a fórmula fechada do somatório dos quadrados

$$\mathrm{S\small{CUBO}}_n = \sum_{0 \le i \le n} i^3$$

Exercício Resolvido (7)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$Scubo_n + acubo_{n+1} = acubo_0 + \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^3$$

COLA

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum a_{i+1}$$

COLA

$$a_i = i^3$$

Exercício Resolvido (7)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$S\text{CUBO}_n + \underset{(n+1)^3}{a\text{CUBO}_{n+1}} = \underset{0^3}{a\text{CUBO}_0} + \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^3$$

Exercício Resolvido (7)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$S_{CUBO_n} + (n+1)^3 = \cancel{0^3} + \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^3$$

Exercício Resolvido (7)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$S_{CUBO_n} + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^3$$

Exercício Resolvido (7)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$Scubo_n + (n+1)^3 = \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^3 \Rightarrow$$

Resolvendo $(i+1)^3 = (i^3+3i^2+3i+1)$

$$Scubo_n + (n+1)^3 = \sum_{0 \le i \le n} (i^3+3i^2+3i+1)$$

Exercício Resolvido (7)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$\mathrm{S{\scriptsize CUBO}}_n + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^3 \Rightarrow$$

$$\mathrm{S{\scriptsize CUBO}}_n + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^3+3i^2+3i+1) \Rightarrow$$

$$\mathrm{S{\scriptsize CUBO}}_n + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} i^3 + \sum_{0 \leq i \leq n} 3i^2 + \sum_{0 \leq i \leq n} 3i + \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$

Aplicando associatividade

Exercício Resolvido (7)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

Sabendo

$$S_{CUBO_n} + (n+1)^3 = \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^3 \Rightarrow$$

$$S_{CUBO_n} + (n+1)^3 = \sum_{0 \le i \le n} (i^3+3i^2+3i+1) \Rightarrow$$

$$S_{CUBO_n} + (n+1)^3 = \sum_{0 \le i \le n} i^3 + \sum_{0 \le i \le n} 3i^2 + \sum_{0 \le i \le n} 3i + \sum_{0 \le i \le n} 1$$

$$S_{CUBO_n} \qquad 3S_n \qquad \frac{3n(n+1)}{2} \qquad (n+1)$$

Exercício Resolvido (7)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$S\text{CUBO}_n + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^3 \Rightarrow$$

Substituindo

$$S\text{CUBO}_n + (n+1)^3 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^3+3i^2+3i+1) \Rightarrow$$

$$S\text{CUBO}_n + (n+1)^3 = S\text{CUBO}_n + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1)$$

Exercício Resolvido (7)

- Reorganizando:

$$S\text{CUBO}_n + (n+1)^3 = S\text{CUBO}_n + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1)$$

Exercício Resolvido (7)

- Reorganizando:

$$\text{S}_{\text{CUBO}_n} + (n+1)^3 = \text{S}_{\text{CUBO}_n} + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1)$$

Eliminando S_{CUBO_n}

Exercício Resolvido (7)

- Reorganizando:

$$S\text{CUBO}_n + (n+1)^3 = S\text{CUBO}_n + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)$$

Multiplicando a equação por dois e invertendo S_n de lado

Exercício Resolvido (7)

- Reorganizando:

Efetuando algebrismo

$$S_{CUBO_n} + (n+1)^3 = S_{CUBO_n} + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = \mathbf{2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)} \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 3n^2 - 3n - 2n - 2$$

Exercício Resolvido (7)

- Reorganizando:

Efetuando algebrismo

$$S\text{CUBO}_n + (n+1)^3 = S\text{CUBO}_n + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = \mathbf{2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1)} - 3n^2 - 3n - 2n - 2 \Rightarrow$$

$$6S_n = 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 3n - 2n - 2$$

Exercício Resolvido (7)

- Reorganizando:

Efetuando algebrismo

$$\text{S}_{\text{CUBO}_n} + (n+1)^3 = \text{S}_{\text{CUBO}_n} + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 3n^2 - 3n - 2n - 2 \Rightarrow$$

$$6S_n = \mathbf{2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 3n - 2n - 2} \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Exercício Resolvido (7)

- Reorganizando:

Efetuando algebrismo

$$S\text{CUBO}_n + (n+1)^3 = S\text{CUBO}_n + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 3n^2 - 3n - 2n - 2 \Rightarrow$$

$$6S_n = 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 3n - 2n - 2 \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercícios

Exercício (1)

- Faça um método *int somatorioPA(double a, double b, int n)* que retorna o somatório dos n primeiros termos de uma PA com termo inicial *a* e razão *b*.

Exercício (2)

- Um algoritmo de ordenação tradicional é o Inserção. Faça a análise de complexidade desse algoritmo para os números de comparações e movimentações entre registros no pior e melhor caso