Unidade II:
Somatórios (∑)

PUC Minas

Instituto de Ciências Exatas e Informática
Departamento de Ciência da Computação

Agenda

- Motivação
- Notação
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- Manipulação de Somas
- Alguns Métodos Gerais

Agenda

- **Motivação** Σ
- Notação
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- Manipulação de Somas
- Alguns Métodos Gerais

Principal Motivação na Ciência da Computação

- Levantamento de custo (e.g., tempo e memória) de algoritmos

- O custo de um algoritmo é a soma dos custos das suas operações

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros

Ciência da Computação

```
int somatorio(int n){
    int soma = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        soma += i;
    }
    return soma;
}
```

Matemática

$$\sum_{i=1}^{i \leq n} i$$

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros

Ciência da Computação

início

Matemática

```
int somatorio(int n){
    int soma = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        soma += i;
    }
    return soma;
}
```

$$\sum_{i=1}^{i \leq n} i$$

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros

Ciência da Computação

```
int somatorio(int n){
    int soma = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        soma += i;
    }
    return soma;
}
```

Matemática

$$\sum_{i=1}^{i \leq n} i$$

condição de parada

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros

✓

Ciência da Computação

```
int somatorio(int n){
    int soma = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        soma += i;
    }
    return soma;
}
```

termo

Matemática

$$\sum_{i=1}^{i \le n} i$$

Exercício Resolvido (2)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Quantas comparações entre registros ele realiza?

```
for (int i = 0; i < (n - 1); i++) {
    int menor = i;
    for (int j = (i + 1); j < n; j++){
        if (array[menor] > array[j]){
            menor = j;
        }
    }
    swap(menor, i);
}
```

Exercício Resolvido (2)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Quantas comparações entre registros ele realiza?

✓

```
for (int i = 0; i < (n - 1); i++) {
    int menor = i;
    for (int j = (i + 1); j < n; j++){
        if (array[menor] > array[j]){
            menor = j;
        }
    }
    swap(menor, i);
}
```

i	0	1	2	3	...	n-2
c(i) = (n - (i+1))	n-1	n-2	n-3	n-4		1

$$\sum_{i=0}^{n-2} (n - i - 1)$$

Agenda

- Motivação
- **Notação** $\sum$
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- Manipulação de Somas
- Alguns Métodos Gerais

Notação Sigma

- Forma abreviada para escrever a soma de um conjunto de termos que seguem um padrão matemático

$$\sum_{\underline{\textbf{limite inferior}}}^{\underline{\textbf{limite superior}}} \underline{\textbf{somando}}$$

Notação Sigma

- Forma abreviada para escrever a soma de um conjunto de termos que seguem um padrão matemático

$$\sum_{\underline{\textbf{limite inferior}}}^{\underline{\textbf{limite superior}}} \underline{\textbf{somando}}$$

Exemplo:

$$\sum_{i=0}^{n-2} (n - i - 1)$$

Notação Sigma

- Forma abreviada para escrever a soma de um conjunto de termos que seguem um padrão matemático

$$\sum_{\underline{\textbf{os dois limites}}} \underline{\textbf{somando}}$$

Notação Sigma

- Forma abreviada para escrever a soma de um conjunto de termos que seguem um padrão matemático

$$\sum_{\underline{\textbf{os dois limites}}} \underline{\textbf{somando}}$$

Exemplo:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$$

Notação Sigma

$$\sum_{P(i)} a_i$$

Propriedade P(i)

Notação Sigma

$$\sum_{P(i)}$$

Propriedade P(i)

Exemplo:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \text{ é ímpar}}} a_i = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \ldots + a_n \quad \text{(se n é ímpar)}$$

Variações da Notação Sigma

$$\sum_{i=1}^{i \leq n} a_i \quad = \quad \sum_{1}^{n} a_i \quad = \quad \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \quad = \quad \sum\nolimits_{i=1}^{i \leq n} a_i$$

Exercício Resolvido (3)

- Resolva os somatórios abaixo:

a) $\sum_{n=1}^{4} n^2 = ?$

b) $\sum_{1}^{4} 3i = ?$

c) $\sum_{1}^{4} (3 - 2i) = ?$

d) $\sum_{1}^{3} (2i + x) = ?$

e) $\sum_{0}^{5} i \,.\, (i-1) \,.\, (5-i) = ?$

f) $\sum_{m=1}^{4} 8k - 6m = ?$

Exercício Resolvido (3a)

$$\sum_{n=1}^{4} n^2 = ?$$

Escolha 1 resposta:

- $1 + 2 + 3 + 4$
- $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$
- $(1 + 2 + 3 + 4)^2$
- $1^2 + 4^2$

Exercício Resolvido (3a)

$$\sum_{n=1}^{4} n^2 = ?$$

Khan Academy

Escolha 1 resposta:

- $1 + 2 + 3 + 4$
- ✓ $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$
- $(1 + 2 + 3 + 4)^2$
- $1^2 + 4^2$

Exercício Resolvido (3b)

$$\sum_{1}^{4} 3i \;=\; ?$$

Exercício Resolvido (3b)

$$\sum_{1}^{4} 3i = ?$$

Neste material, a menos que dito o contrário, a notação $\sum_{1}^{n}$ incrementa o índice i. Para evitar ambiguidade, podemos usar a notação $\sum_{i=1}^{n}$

Exercício Resolvido (3b)

$$\sum_{1}^{4} 3i = (3 \, . \, 1) + (3 \, . \, 2) + (3 \, . \, 3) + (3 \, . \, 4) = 30$$

Exercício Resolvido (3b)

$$\sum_{1}^{4} 3i = 3 \,.\, \sum_{1}^{4} i = 3 \,.\, (1 + 2 + 3 + 4) = 30$$

Exercício Resolvido (3c)

$$\sum_{1}^{4} (3 - 2i) = ?$$

Exercício Resolvido (3c)

$$\sum_{1}^{4} (3 - 2i) = (3 - (2 . 1)) + (3 - (2 . 2)) + (3 - (2 . 3)) + (3 - (2 . 4)) = -8$$

Exercício Resolvido (3c)

$$\sum_{1}^{4} (3 - 2i) = \sum_{1}^{4} 3 - 2\sum_{1}^{4} i = (3+3+3+3) - 2(1+2+3+4) = -8$$

Exercício Resolvido (3c)

$$\sum_{1}^{4} (3 - 2i) = 3\sum_{1}^{4} 1 - 2\sum_{1}^{4} i = 3(1+1+1+1) - 2(1+2+3+4) = -8$$

Exercício Resolvido (3d)

$$\sum_{1}^{3} (2i + x) \;=\; ?$$

Exercício Resolvido (3d)

$$\sum_{1}^{3} (2i + x) = 2(1+2+3) + (x+x+x) = 12 + 3x$$

Exercício Resolvido (3e)

$$\sum_{0}^{5} i \;.\; (i-1) \;.\; (5-i) \;=\; ?$$

Exercício Resolvido (3e)

$$\sum_{0}^{5} i \cdot (i-1) \cdot (5-i) = \begin{array}{l} 0 \,.\, (-1) \,.\, 5 \;+ \\ 1 \,.\, 0 \,.\, 4 \;+ \\ 2 \,.\, 1 \,.\, 3 \;+ \\ 3 \,.\, 2 \,.\, 2 \;+ \\ 4 \,.\, 3 \,.\, 1 \;+ \\ 5 \,.\, 4 \,.\, 0 \;= 0 + 0 + 6 + 12 + 12 + 0 = 30 \end{array}$$

Exercício Resolvido (3f)

$$\sum_{m=1}^{4} 8k - 6m = ?$$

Khan Academy

Escolha 1 resposta:

- ◯ $8k - 6 + 8k - 12 + 8k - 18 + 8k - 24$
- ◯ $2 + 4 + 6 + 8$
- ◯ $8 - 6m + 16 - 6m + 24 - 6m + 32 - 6m$
- ◯ $0 + 2 + 4 + 6$

Exercício Resolvido (3f)

$$\sum_{m=1}^{4} 8k - 6m = ?$$

Escolha 1 resposta:

- [x] 8k - 6 + 8k - 12 + 8k - 18 + 8k - 24
- [ ] $2 + 4 + 6 + 8$
- [ ] $8 - 6m + 16 - 6m + 24 - 6m + 32 - 6m$
- [ ] $0 + 2 + 4 + 6$

Exercício Resolvido (4)

Podemos afirmar que $\sum_{0}^{5} i \cdot (i-1) \cdot (5-i) = \sum_{2}^{4} i \cdot (i-1) \cdot (5-i)$? Justifique.

Exercício Resolvido (4)

Podemos afirmar que $\sum_{0}^{5} i \,.\, (i-1) \,.\, (5-i) = \sum_{2}^{4} i \,.\, (i-1) \,.\, (5-i)$? Justifique.

Sim, pois como os termos a_0, a_1 e a_5 são iguais a zero, o resultado dos dois somatórios é igual a $(a_2 + a_3 + a_4)$

Exercício Resolvido (5)

Considere a soma $4 + 25 + 64 + 121$.

Qual expressão é igual à soma acima?

Khan Academy

Escolha todas as respostas aplicáveis:

- ◯ $\sum_{i=0}^{3} (i^2 + 2i + 4)$
- ◯ $\sum_{i=0}^{3} (3i + 2)^2$
- ◯ Nenhuma das anteriores

Exercício Resolvido (5)

Considere a soma $4 + 25 + 64 + 121$.

Qual expressão é igual à soma acima?

Escolha todas as respostas aplicáveis:

- $\sum_{i=0}^{3} (i^2 + 2i + 4)$
- $\sum_{i=0}^{3} (3i + 2)^2$ = $(3x0+2)^2+(3x1+2)^2+(3x2+2)^2+(3x3+2)^2$ = 4+25+64+121
- Nenhuma das anteriores

Agenda

- Motivação
- Notação
- **Relações de Recorrência e Somas Múltiplas** ∑
- Manipulação de Somas
- Alguns Métodos Gerais

Relações de Recorrência

- Assunto discutido na disciplina Teoria dos Grafos e Computabilidade

- Técnica usada para calcular somas

- Exemplo

$$\begin{cases} S_0 = a_0 \\ S_n = S_{n-1} + a_n, \text{ para } n > 0 \end{cases}$$

Exemplo de Relação de Recorrência (1/2)

- Quais são os valores da sequência abaixo?

$$
\begin{cases}
fib(0) = 1 \\
fib(1) = 1 \\
fib(n) = fib(n-1) + fib(n-2)
\end{cases}
$$

Exemplo de Relação de Recorrência (1/2)

- Quais são os valores da sequência abaixo?

$$
\begin{cases}
fib(0) = 1 \\
fib(1) = 1 \\
fib(n) = fib(n-1) + fib(n-2)
\end{cases}
$$

i	0	1	2	3	4	5	6	...
fib(i)	1	1	2	3	5	8	13	

Exemplo de Relação de Recorrência (2/2)

- Qual é a relação da equação abaixo?

$$\begin{cases} fat(1) = 1 \\ fat(n) = n \cdot fat(n-1) \end{cases}$$

Exemplo de Relação de Recorrência (2/2)

- Qual é a relação da equação abaixo?

$$\begin{cases} fat(1) = 1 \\ fat(n) = n \cdot fat(n-1) \end{cases}$$

fat(4) = ?

Exemplo de Relação de Recorrência (2/2)

- Qual é a relação da equação abaixo?

$$\begin{cases} fat(1) = 1 \\ fat(n) = n \cdot fat(n-1) \end{cases}$$

fat(4) = 4 . fat(3)

fat(3) = 3 . fat(2)

fat(2) = 2 . fat(1), contudo, sabemos que fat(1) = 1

Exemplo de Relação de Recorrência (2/2)

- Qual é a relação da equação abaixo?

$$\begin{cases} fat(1) = 1 \\ fat(n) = n \,.\, fat(n-1) \end{cases}$$

fat(4) = 4 . fat(3)

fat(3) = 3 . fat(2)

fat(2) = 2 . 1

Exemplo de Relação de Recorrência (2/2)

- Qual é a relação da equação abaixo?

$$\begin{cases} fat(1) = 1 \\ fat(n) = n \;.\; fat(n-1) \end{cases}$$

fat(4) = 4 . fat(3)

fat(3) = 3 . 2

Exemplo de Relação de Recorrência (2/2)

- Qual é a relação da equação abaixo?

$$\begin{cases} fat(1) = 1 \\ fat(n) = n \;.\; fat(n-1) \end{cases}$$

$fat(4) = 4 \;.\; 6$

Exemplo de Relação de Recorrência (2/2)

- Qual é a relação da equação abaixo?

$$\begin{cases} fat(1) = 1 \\ fat(n) = n \cdot fat(n-1) \end{cases}$$

$fat(4) = 24$

Somas Múltiplas

- Os termos de um somatório podem ser especificados por dois ou mais índices, por exemplo:

$$\sum_{1 \le i,\, j \le 3} a_i.b_j = a_1.b_1 + a_1.b_2 + a_1.b_3 + a_2.b_1 + a_2.b_2 + a_2.b_3 + a_3.b_1 + a_3.b_2 + a_3.b_3$$

Somas Múltiplas

- Outra forma de representação é utilizando dois somatórios, por exemplo:

$$\sum_{1 \le i,\, j \le 3} a_i b_j = \Big(\sum_{1 \le i \le 3} a_i\Big)\Big(\sum_{1 \le j \le 3} b_j\Big)$$

Agenda

- Motivação
- Notação
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- **Manipulação de Somas** ∑
- Alguns Métodos Gerais

Frase de [GRAHAM, 95]

A chave do sucesso na manipulação de somas está na habilidade de transformar uma soma em outra mais simples ou mais perto de algum objetivo

Agenda

- Motivação
- Notação
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- **Manipulação de Somas** ∑
- Alguns Métodos Gerais

- Regras Básicas de Transformação
- Propriedades

Agenda

- Motivação
- Notação
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- **Manipulação de Somas** ∑
- Alguns Métodos Gerais

- **Regras Básicas de Transformação**
- Propriedades

Regras Básicas de Transformação

- Distributividade
- Associatividade
- Comutatividade

Distributividade

- Permite mover constantes para dentro ou fora de um somatório

$$\boxed{\sum_{i \in I} c \,.\, a_i = c \,.\, \sum_{i \in I} a_i}$$

- Por exemplo, temos:

$$c.a_{-1} + c.a_0 + c.a_1 = c.(a_{-1} + a_0 + a_1)$$

Distributividade

- Permite mover constantes para dentro ou fora de um somatório

$$\boxed{\sum_{i \in I} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i \in I} a_i}$$

- Outro exemplo, foi dado no Exercício Resolvido 3b e repetido abaixo:

$$\sum_{1}^{4} 3i \;=\; 3 \,.\sum_{1}^{4} i \;=\; 3 \,.\, (1 + 2 + 3 + 4) \;=\; 30$$

Distributividade

- Permite mover constantes para dentro ou fora de um somatório

$$\sum_{i \in I} c \,.\, a_i = c \,.\, \sum_{i \in I} a_i$$

- Também se aplica à divisão

$$\sum_{i \in I} \frac{a_i}{c} = \frac{1}{c} \,.\, \sum_{i \in I} a_i$$

Associatividade

- Permite quebrar um somatório em partes ou unificá-las em um somatório

$$\boxed{\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i}$$

- Por exemplo, temos:

$$(a_{-1} + b_{-1}) + (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) = (a_{-1} + a_0 + a_1) + (b_{-1} + b_0 + b_1)$$

Associatividade

- Permite quebrar um somatório em partes ou unificá-las em um somatório

$$\boxed{\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i}$$

- Também se aplica à subtração:

$$\boxed{\sum_{i \in I} (a_i - b_i) = \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in I} b_i}$$

Associatividade

- Permite quebrar um somatório em partes ou unificá-las em um somatório

$$\boxed{\sum_{i \in I}(a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i}$$

- Outro exemplo, foi dado no Exercício Resolvido 3c e repetido abaixo:

$$\sum_{1}^{4} (3 - 2i) \quad = \quad \sum_{1}^{4} 3 - 2\sum_{1}^{4} i \ = (3+3+3+3) - 2(1+2+3+4) = -8$$

Comutatividade

- Permite colocar os termos em qualquer ordem

$$\boxed{\sum_{i \in I} a_i = \sum_{p(i) \in I} a_{p(i)}}$$

- Por exemplo, temos:

$$a_{-1} + a_0 + a_1 = a_1 + a_{-1} + a_0$$

Exemplo de Aplicação da Comutatividade

- Os programas abaixo apresentam o mesmo resultado devido a regra de comutatividade

```
for(int i = 0; i < n; i++)
    for(int j = 0; j < n; j++)
        soma += mat[i][j];
```

```
for(int j = 0; j < n; j++)  //invertendo os fors
    for(int i = 0; i < n; i++)
        soma += mat[i][j];
```

```
for(int i = n-1; i >= 0; i--) //decrementando
    for(int j = n-1; j >= 0; j--)
        soma += mat[i][j];
```

Resumo das Regras Básicas de Transformação

- **Distributividade**

$$\sum_{i \in I} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i \in I} a_i$$

- **Associatividade**

$$\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$$

- **Comutatividade**

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{p(i) \in I} a_{p(i)}$$

Exercício Resolvido (6)

- Aplique associatividade para unificar os dois somatórios abaixo:

$$\sum_{3}^{n} a_i + \sum_{1}^{n} b_i$$

Exercício Resolvido (6)

- Aplique associatividade para unificar os dois somatórios abaixo:

$$\sum_{3}^{n} a_i + \sum_{1}^{n} b_i$$

✓

$$= (a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n)$$

$$= b_1 + b_2 + \sum_{3}^{n} (a_i + b_i)$$

$$= -a_1 - a_2 + \sum_{1}^{n} (a_i + b_i)$$

Exercício Resolvido (7)

- Mostre (e justifique) se cada expressão abaixo é verdadeira ou falsa:

$$a)\ (\quad)\ \sum_{k=0}^{200} k^3 = \sum_{k=1}^{200} k^3;$$

$$b)\ (\quad)\ \sum_{p=0}^{1000} (3+p) = 3 + \sum_{p=0}^{1000} p;$$

$$c)\ (\quad)\ \sum_{\ell=1}^{n} (3\ell) = 3 \sum_{\ell=1}^{n} \ell;$$

$$d)\ (\quad)\ \sum_{k=0}^{12} k^p = \left(\sum_{k=0}^{12} k \right)^p;$$

$$e)\ (\quad)\ \sum_{t=8}^{32} (3+t) = 75 + \sum_{t=8}^{32} t.$$

Exercício Resolvido (7)

- Mostre (e justifique) se cada expressão abaixo é verdadeira ou falsa:

$$a)\ (\checkmark)\ \sum_{k=0}^{200} k^3 = \sum_{k=1}^{200} k^3;$$

$$b)\ (\times)\ \sum_{p=0}^{1000} (3+p) = 3 + \sum_{p=0}^{1000} p;$$

$$c)\ (\checkmark)\ \sum_{\ell=1}^{n} (3\ell) = 3\sum_{\ell=1}^{n} \ell;$$

$$d)\ (\times)\ \sum_{k=0}^{12} k^p = \left(\sum_{k=0}^{12} k\right)^p;$$

$$e)\ (\checkmark)\ \sum_{t=8}^{32} (3+t) = 75 + \sum_{t=8}^{32} t.$$

Exercício Resolvido (8)

- Prove que os somatórios abaixo são iguais. Em sua resposta, use a propriedade comutativa

$$\sum_{0 \leq i \leq 4} (3 + 2.i) = \sum_{0 \leq i \leq 4} (3 + 2.(4-i))$$

Exercício Resolvido (8)

- Prove que os somatórios abaixo são iguais. Em sua resposta use a propriedade comutativa

$$\sum_{0 \leq i \leq 4} (3 + 2.i) = \sum_{0 \leq i \leq 4} (3 + 2.(4-i))$$

Primeiro somatório: (3 + 2.0) + (3 + 2.1) + (3 + 2.2) + (3 + 2.3) + (3 + 2.4)

No segundo, $(3 + 2.[\underline{4-0}]) + (3 + 2.[\underline{4-1}]) + (3 + 2.[\underline{4-2}]) + (3 + 2.[\underline{4-3}]) + (3 + 2.[\underline{4-4}])$

Logo, por comutatividade, temos apenas a alteração da ordem dos elementos

Exercício Resolvido (8)

- Prove que os somatórios abaixo são iguais. Em sua resposta use a propriedade comutativa

$$\sum_{0 \le i \le 4} (3 + 2.i) = \sum_{0 \le i \le 4} (3 + 2.(4-i))$$

Primeiro somatório: (3 + 2.0) + (3 + 2.1) + (3 + 2.2) + (3 + 2.3) + (3 + 2.4)

No segundo, (3 + 2.[4-0]) + (3 + 2.[4-1]) + (3 + 2.[4-2]) + (3 + 2.[4-3]) + (3 + 2.[4-4])

Logo, por comutatividade, temos apenas a alteração da ordem dos elementos

Observação: (n-i) “simula” um decremento no valor de i

Exercício Resolvido (9)

- Aplique as regras de transformação para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma **Progressão Aritmética (PA)**

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} (a + b.i)$$

Exercício Resolvido (9)

• A

s

Recordando Progressão Aritmética

- Uma PA é uma sequência cuja razão (diferença) entre dois termos consecutivos é constante. Por exemplo, 5, 7, 9, 11, 13, …

- Cada termo da PA será $\mathbf{a_i = a + b.i}$, onde **a** é o termo inicial; **b**, a razão; e, **i**, a ordem do termo

- Na sequência acima, **a** e **b** são iguais a 5 e 2, respectivamente. Logo, temos: (5 + 2.0), (5 + 2.1), (5 + 2.2), (5 + 2.3), (5 + 2.4), …

Exercício Resolvido (9)

• A

se

Recordando Progressão Aritmética

• **Exercício**: Mostre os valores de **a** e **b** na sequência 1, 4, 7, 10, 13, …

Exercício Resolvido (9)

• A

s

Recordando Progressão Aritmética

• **<u>Exercício</u>**: Mostre os valores de **a** e **b** na sequência 1, 4, 7, 10, 13, …

Os valores a e b são 1 e 3, respectivamente, logo, temos:

$1 + 3 . 0 = 1$
$1 + 3 . 1 = 4$
$1 + 3 . 2 = 7$
$1 + 3 . 3 = 10$
$1 + 3 . 4 = 13$
...

Exercício Resolvido (9)

- Aplique as regras de transformação para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma **Progressão Aritmética (PA)**

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} (a + b.i)$$

Exercício Resolvido (9)

- Aplique as regras de transformação para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma **Progressão Aritmética (PA)**

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} (a + b.i)$$

- **Aplicando a comutatividade**, podemos somar do maior para o menor, trocando ***i*** por ***(n-i)***:

$$S_n = \sum_{0 \leq (n-i) \leq n} [a + b.(n-i)]$$

Exercício Resolvido (9)

- Aplique as regras de transformação para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma **Progressão Aritmética (PA)**

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} (a + b.i)$$

- **Aplicando a comutatividade**, podemos somar do maior para o menor, trocando ***i*** por ***(n-i)***:

$$S_n = \sum_{0 \le (n-i) \le n} [a + b.(n-i)] = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.(n-i)] = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.n - b.i]$$

Exercício Resolvido (9)

- Como $S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i] = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.n - b.i]$, podemos afirmar que:

$$\boxed{2S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i] + \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.n - b.i]}$$

Exercício Resolvido (9)

- Como $S_n = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.i] = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.n - b.i]$, podemos afirmar que:

$$\boxed{2S_n = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.i] + \sum_{0 \le i \le n} [a + b.n - b.i]}$$

- **Aplicando associatividade**, podemos combinar os dois somatórios:

$$\boxed{2S_n = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.i + a + b.n - b.i]}$$

Exercício Resolvido (9)

- Como $S_n = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.i] = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.n - b.i]$, podemos afirmar que:

$$\boxed{2S_n = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.i] + \sum_{0 \le i \le n} [a + b.n - b.i]}$$

- Aplicando associatividade, podemos combinar os dois somatórios:

$$\boxed{2S_n = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.i + a + b.n - b.i] = \sum_{0 \le i \le n} [2.a + b.n]}$$

- **Simplificando**, temos

Exercício Resolvido (9)

- **Usando distributividade**, temos:

$$2S_n = \sum_{0 \le i \le n} [2.a + b.n] = (2.a + b.n) \,.\, \sum_{0 \le i \le n} 1$$

Lembre que [2.a + b.n] não depende de i, logo, pode “sair” do somatório

Exercício Resolvido (9)

- Substituindo o somatório:

$$2S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [2.a + b.n] = (2.a + b.n) \,. \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$

$$(n+1)$$

Exercício Resolvido (9)

- Substituindo o somatório:

$$2S_n = (2.a + b.n)(n+1)$$

Exercício Resolvido (9)

- Substituindo o somatório:

$$2S_n = (2.a + b.n)(n+1)$$

- **Dividindo por dois**, temos:

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.i] = \frac{(2a + bn)(n+1)}{2}$$

Exercício Resolvido (10)

- Sabendo a fórmula da soma de uma progressão aritmética qualquer, mostre a fórmula para o somatório de $0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{0 \le i \le n} i$. Em tempo, esse é o somatório de Gauss.

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.i] = \frac{(2a + bn)(n+1)}{2}$$

Exercício Resolvido (10)

- Sabendo a fórmula da soma de uma progressão aritmética qualquer, mostre a fórmula para o somatório de $0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{0 \le i \le n} i$. Em tempo, esse é o somatório de Gauss.

Resposta: Nesse caso, temos uma progressão cujos valores a e b são zero e um, respectivamente

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} [0 + 1.i] = \frac{(2 . 0 + 1 . n) . (n+1)}{2} = \frac{n . (n+1)}{2}$$

Exercício Resolvido (11)

- Dada a fórmula fechada do somatório dos ***n*** primeiros números inteiros, mostre um algoritmo mais eficiente que o apresentado abaixo:

```
int somatorio(int n){
    int soma = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        soma += i;
    }
    return soma;
}
```

Exercício Resolvido (11)

- Dada a fórmula fechada do somatório dos ***n*** primeiros números inteiros, mostre um algoritmo mais eficiente que o apresentado abaixo:

```
int somatorio(int n){
    int soma = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        soma += i;
    }
    return soma;
}
```

```
int somatorio(int n){
    return ((n * (n+1))/2);
}
```

Exercício Resolvido (12)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

Exercício Resolvido (12)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Aplicando associatividade, temos:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) = \sum_{0 \leq i \leq n-2} n - \sum_{0 \leq i \leq n-2} i - \sum_{0 \leq i \leq n-2} 1$$

Exercício Resolvido (12)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Simplificando, temos:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) = \underbrace{\sum_{0 \leq i \leq n-2} n}_{n \,.\, (n-1)} - \sum_{0 \leq i \leq n-2} i - \underbrace{\sum_{0 \leq i \leq n-2} 1}_{1 \,.\, (n-1)}$$

Exercício Resolvido (12)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Simplificando, temos:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) = n(n-1) - \sum_{0 \leq i \leq n-2} i - (n-1)$$

Exercício Resolvido (12)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Sabendo que:

$$\sum_{0 \leq i \leq \mathbf{n}} i = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \sum_{0 \leq i \leq n-2} i = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

✓

Exercício Resolvido (12)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Assim, temos:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) = n(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - (n-1)$$

Exercício Resolvido (12)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Assim, temos:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) = n(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{\color{red}{\mathbf{2}}} - (n-1)$$

$$= \frac{2n(n-1) - (n-2)(n-1) - 2(n-1)}{2}$$

Exercício Resolvido (12)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Assim, temos:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) = n(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - (n-1)$$

$$= \frac{2n(n-1) - (n-2)(n-1) - 2(n-1)}{2}$$

$$= \frac{2n^2 - 2n - [n^2 - 3n + 2] - 2n + 2}{2}$$

Exercício Resolvido (12)

- O Algoritmo de Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Assim, temos:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) = n(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - (n-1)$$

$$= \frac{2n(n-1) - (n-2)(n-1) - 2(n-1)}{2}$$

$$= \frac{\mathbf{2n^2 - 2n - [n^2 - 3n + 2] - 2n + 2}}{2}$$

$$= \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \Theta(n^2)$$

Exercício Resolvido (13)

- Justifique as expressões abaixo:

a) $$\sum_{1}^{n} i = \sum_{0}^{n} i$$

b) $$\sum_{1}^{n} a_i \neq \sum_{0}^{n} a_i$$

c) $$\sum_{1}^{n} a_i = \sum_{0}^{n-1} a_{i+1}$$

Exercício Resolvido (13a)

- Justifique as expressões abaixo:

a) $$\boxed{\sum_{1}^{n} i = \sum_{0}^{n} i}$$

✓

Resposta: Os dois somatórios são iguais, entretanto, o segundo faz uma soma a mais que é com seu primeiro termo cujo valor é zero.

Exercício Resolvido (13b)

- Justifique as expressões abaixo:

✓

b) $$\sum_{1}^{n} a_i \neq \sum_{0}^{n} a_i$$

Resposta: Os somatórios são diferentes, porque, não necessariamente, o primeiro termo (a_0) é igual a zero

Exercício Resolvido (13c)

- Justifique as expressões abaixo:

Resposta: O resultado dos dois somatórios é ($a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$)

c) $$\boxed{\sum_{1}^{n} a_i \quad = \quad \sum_{0}^{n-1} a_{i+1}}$$

Agenda

- Motivação
- Notação
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- **Manipulação de Somas** ∑
- Alguns Métodos Gerais

- Regras Básicas de Transformação
- **Propriedades**

Agenda

- Motivação
- Notação
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- **Manipulação de Somas** ∑
- Alguns Métodos Gerais

- Regras Básicas de Transformação
- **Propriedades**

- **P1: Combinando Conjuntos**
- P2: Base para a Perturbação

Propriedade (P1): Combinando Conjuntos

- Combina conjuntos de índices diferentes. No caso, se I e I' são dois conjuntos quaisquer de inteiros, então:

$$\boxed{\sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I'} a_i = \sum_{i \in I \cup I'} a_i + \sum_{i \in I \cap I'} a_i}$$

Propriedade (P1): Combinando Conjuntos

- Combina conjuntos de índices diferentes. No caso, se I e I' são dois conjuntos quaisquer de inteiros, então:

$$\sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I'} a_i = \sum_{i \in I \cup I'} a_i + \sum_{i \in I \cap I'} a_i$$

Observe que a união garante todos os elementos e a interseção, os repetidos

Propriedade (P1): Combinando Conjuntos

- Combina conjuntos de índices diferentes. No caso, se I e I' são dois conjuntos quaisquer de inteiros, então:

$$\sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I'} a_i = \sum_{i \in I \cup I'} a_i + \sum_{i \in I \cap I'} a_i$$

Observe que a união garante todos os elementos e a interseção, os repetidos

Se A = {1, 2, 3} e B = {3, 5, 7}, então
$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ e $A \cap B = \{3\}$

Exercício Resolvido (14)

- Sendo $1 \leq m \leq n$, aplique a propriedade P1 para unificar os dois somatórios (quase disjuntos) abaixo:

$$\sum_{1}^{m} a_i \; + \; \sum_{m}^{n} a_i \; =$$

Exercício Resolvido (14)

- Sendo $1 \leq m \leq n$, aplique a propriedade P1 para unificar os dois somatórios (quase disjuntos) abaixo:

$$\boxed{\sum_{1}^{m} a_i + \sum_{m}^{n} a_i = \sum_{1}^{n} a_i + a_m}$$

Exercício Resolvido (15)

- Sendo $1 \leq m \leq n$, aplique a propriedade P1 para unificar os dois somatórios abaixo:

$$\sum_{1}^{m-3} a_i + \sum_{m}^{n} a_i =$$

Exercício Resolvido (15)

- Sendo $1 \leq m \leq n$, aplique a propriedade P1 para unificar os dois somatórios abaixo:

$$\sum_{1}^{m-3} a_i + \sum_{m}^{n} a_i = \sum_{1}^{n} a_i - a_{m-2} - a_{m-1}$$

Agenda

- Motivação
- Notação
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- **Manipulação de Somas** ∑
- Alguns Métodos Gerais

- P1: Combinando Conjuntos
- **P2: Base para a Perturbação**

- Regras Básicas de Transformação
- **Propriedades**

Propriedade (P2): Base para a Perturbação

- Dada uma soma genérica qualquer $S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i$, temos que:

$$S_{n+1} = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{(n+1)}$$

Propriedade (P2): Base para a Perturbação

- Podemos reescrever S_{n+1} de duas formas:

1ª Forma

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

2ª Forma

$$S_{n+1} = \sum_{0 \leq i \leq n+1} a_i = a_0 + \sum_{1 \leq i \leq n+1} a_i = a_0 + \sum a_{i+1}$$

Propriedade (P2): Base para a Perturbação

- Podemos reescrever S_{n+1} de duas formas:

1ª Forma

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

2ª Forma

$$S_{n+1} = \sum_{0 \le i \le n+1} a_i = a_0 + \sum_{1 \le i \le n+1} a_i = a_0 + \sum_{0 \le i \le n} a_{i+1}$$

Propriedade (P2): Base para a Perturbação

- Podemos reescrever S_{n+1} de duas formas:

1ª Forma

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

2ª Forma

$$S_{n+1} = \sum_{0 \le i \le n+1} a_i = a_0 + \sum_{1 \le i \le n+1} a_i = a_0 + \sum_{0 \le i \le n} a_{i+1}$$

Em ambos: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n+1}$

Propriedade (P2): Base para a Perturbação

- Podemos reescrever S_{n+1} de duas formas:

1ª Forma

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

2ª Forma

$$S_{n+1} = \cancel{\sum_{0 \le i \le n+1} a_i} = \cancel{a_0 + \sum_{1 \le i \le n+1} a_i} = a_0 + \sum_{0 \le i \le n} a_{i+1}$$

Propriedade (P2): Base para a Perturbação

- Podemos reescrever S_{n+1} de duas formas:

1ª Forma

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

2ª Forma

$$S_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$$

Propriedade (P2): Base para a Perturbação

- Resumindo, temos as duas igualdades:

$$\cancel{S_{n+1}} \quad = \quad \underbrace{S_n + a_{n+1}}_{\text{1ª Forma}} \quad = \quad \underbrace{a_0 + \sum_{0 \le i \le n} a_{i+1}}_{\text{2ª Forma}}$$

Propriedade (P2): Base para a Perturbação

- Resumindo, temos as duas igualdades:

$$\cancel{S_{n+1}} \quad = \quad \underbrace{S_n + a_{n+1}}_{\text{1ª Forma}} \quad = \quad \underbrace{a_0 + \sum_{0 \le i \le n} a_{i+1}}_{\text{2ª Forma}}$$

Na prática, para perturbar, resolveremos a igualdade abaixo

$$S_n + a_{n+1} \quad = \quad a_0 + \sum_{0 \le i \le n} a_{i+1}$$

Isso, frequentemente, **resulta na equação fechada para S_n**

Exercício Resolvido (16)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i$$

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$$

COLA

$$a_i = a.x^i$$

COLA

Exercício Resolvido (16)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} a.x^i$$

- **Aplicando P2**:

$$S_n + a.x^{n+1} = a.x^0 + \sum_{0 \le i \le n} a.x^{i+1}$$

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \le i \le n} a_{i+1}$$

COLA

$$a_i = a.x^i$$

COLA

Exercício Resolvido (16)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} a.x^i$$

- **Aplicando P2**:

$$S_n + a.x^{n+1} = a.x^0 + \sum_{0 \le i \le n} a.x^{i+1}$$

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \le i \le n} a_{i+1}$$

COLA

Exercício Resolvido (16)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} a.x^i$$

- **Aplicando P2**:

$$S_n + a.x^{n+1} = a.x^0 + \sum_{0 \le i \le n} a.x^{i+1}$$

Lembre que $x^{i+1} = x \, . \, x^i$

Exercício Resolvido (16)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} a.x^i$$

- **Aplicando P2**:

$$S_n + a.x^{n+1} = a.x^0 + \sum_{0 \le i \le n} a.x^{i+1}$$

$$\sum_{0 \le i \le n} (a.x^i x)$$

Exercício Resolvido (16)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$\boxed{S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i}$$

- **Aplicando P2**:

$$\boxed{S_n + a.x^{n+1} = a.x^0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^{\mathbf{i+1}}}$$

$$\boxed{\sum_{0 \leq i \leq n} (a.x^i x) = x.\sum_{0 \leq i \leq n} (a.x^i)}$$

Aplicando
a distributiva

Exercício Resolvido (16)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i$$

- **Aplicando P2**:

$$S_{n+1} = S_n + a.x^{n+1} = a.x^0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^{\mathbf{i+1}}$$

$$\sum_{0 \leq i \leq n} (a.x^i x) = x.\sum_{0 \leq i \leq n} (a.x^i) = x.S_n$$

Exercício Resolvido (16)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} a.x^i$$

- **Aplicando P2**:

$$S_n + a.x^{n+1} = a.x^0 + xS_n$$

$$x.S_n$$

Exercício Resolvido (16)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} a.x^i$$

- **Aplicando P2**:

$$S_n + a.x^{n+1} = a.x^0 + xS_n$$

Exercício Resolvido (16)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} a.x^i$$

- **Aplicando P2**:

$$S_n + a.x^{n+1} = a.x^0 + xS_n$$

$$a.1$$

Exercício Resolvido (16)

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i$$

- **Aplicando P2**:

$$S_n + a.x^{n+1} = a + xS_n$$

Exercício Resolvido (16)

- Fazendo algebrismo, temos:

$$S_n + a.x^{n+1} = a + x.S_n$$

Exercício Resolvido (16)

- Fazendo algebrismo, temos:

$$S_n + \mathbf{a.x^{n+1}} = a + \mathbf{x.S_n} \Rightarrow$$

$$S_n \mathbf{- x.S_n} = a \mathbf{- a.x^{n+1}}$$

Invertendo o lado dos termos em vermelho

Exercício Resolvido (16)

- Fazendo algebrismo, temos:

$$S_n + a.x^{n+1} = a + x.S_n \Rightarrow$$

$$S_n - x.S_n = a - a.x^{n+1} \Rightarrow$$

$$(1 - x)\, S_n = a - a.x^{n+1}$$

Colando S_n em evidência

Exercício Resolvido (16)

- Fazendo algebrismo, temos:

$$S_n + a.x^{n+1} = a + x.S_n \Rightarrow$$

$$S_n - x.S_n = a - a.x^{n+1} \Rightarrow$$

$$(1 - x)\ S_n = a - a.x^{n+1} \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{a - a.x^{n+1}}{(1 - x)}, \quad \text{para } x \neq 1$$

Invertendo o lado de (1-x)

Exercício Resolvido (16)

- Fazendo algebrismo, temos:

$$S_n + a.x^{n+1} = a + x.S_n \Rightarrow$$

$$S_n - x.S_n = a - a.x^{n+1} \Rightarrow$$

$$(1 - x)\, S_n = a - a.x^{n+1} \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \quad \text{para } x \neq 1 \Rightarrow$$

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \quad \text{para } x \neq 1$$

Exercício Resolvido (16)

- Fazendo algebrismo, temos:

$$S_n + a.x^{n+1} = a + x.S_n \Rightarrow$$

$$S_n - x.S_n = a - a.x^{n+1} \Rightarrow$$

$$(1 - x)\, S_n = a$$

$$S_n = \frac{a - a.x^{n+}}{1 - x}$$

Observe que quando x = 1, temos:

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} (a.1^i) = \sum_{0 \le i \le n} a = (n+1).a$$

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} a.x^i = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \quad \text{para } x \neq 1$$

Exercício Resolvido (17)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i.2^i$$

$$S_n = 0.2^0 + 1.2^1 + 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + 5.2^5 + ... + n.2^n$$

$$S_{n+1} = 0.2^0 + 1.2^1 + 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + 5.2^5 + ... + n.2^n + (n+1).2^{(n+1)}$$

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$$

COLA

Exercício Resolvido (17)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i.2^i$$

$$S_n = 0.2^0 + 1.2^1 + 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + 5.2^5 + \ldots + n.2^n$$

$$S_{n+1} = \mathbf{0.2^0} + 1.2^1 + 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + 5.2^5 + \ldots + n.2^n + \mathbf{(n+1).2^{(n+1)}}$$

$$S_n + \mathbf{a_{n+1}} = \mathbf{a_0} + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$$

COLA

Exercício Resolvido (17)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i.2^i$$

$$S_n = 0.2^0 + 1.2^1 + 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + 5.2^5 + ... + n.2^n$$

$$S_{n+1} = 0.2^0 + 1.2^1 + 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + 5.2^5 + ... + n.2^n + (n+1).2^{(n+1)}$$

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$$

COLA

$$\sum_{0 \leq i \leq n} (i+1).2^{(i+1)}$$

Exercício Resolvido (17)

- **Aplicando P2**, temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 0.2^0 + \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1).2^{i+1}$$

$$a_i = i.2^i$$

COLA

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i.2^i$$

COLA

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$$

COLA

✓

Exercício Resolvido (17)

- **Aplicando P2**, temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 0.2^0 + \sum_{0 \le i \le n} (i+1).2^{i+1}$$

$$0$$

Exercício Resolvido (17)

- **Como $0.2^0 = 0$**, temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1).2^{i+1}$$

Exercício Resolvido (17)

- **Aplicando associatividade**, temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = \sum_{0 \le i \le n} (i+1).2^{i+1}$$

$$\sum_{0 \le i \le n} (i+1).2^{i+1} = \sum_{0 \le i \le n} (i.2^{i+1} + 1.2^{i+1})$$

Exercício Resolvido (17)

- **Aplicando associatividade**, temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = \sum_{0 \le i \le n} (i+1).2^{i+1}$$

$$\sum_{0 \le i \le n} (i+1).2^{i+1} = \sum_{0 \le i \le n} (i.2^{i+1} + 1.2^{i+1})$$

$$\sum_{0 \le i \le n} i.2^{i+1} + \sum_{0 \le i \le n} 2^{i+1}$$

Exercício Resolvido (17)

- Aplicando associatividade, temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = \sum_{0 \le i \le n} i.2^{\,i+1} + \sum_{0 \le i \le n} 2^{\,i+1}$$

$$\sum_{0 \le i \le n} (i+1).2^{\,i+1} = \sum_{0 \le i \le n} (i.2^{\,i+1} + 1.2^{\,i+1})$$

$$\sum_{0 \le i \le n} i.2^{\,i+1} + \sum_{0 \le i \le n} 2^{\,i+1}$$

Exercício Resolvido (17)

- **Aplicando distributividade**, temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = \sum_{0 \le i \le n} i.2^{\,i+1} + \sum_{0 \le i \le n} 2^{\,i+1}$$

Lembre que $2^{i+1} = 2 \times 2^i$

Exercício Resolvido (17)

- **Aplicando distributividade**, temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2\sum_{0 \leq i \leq n} i.2^{i} + 2\sum_{0 \leq i \leq n} 2^{i}$$

Exercício Resolvido (17)

- **Substituindo S_n**, temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2\underbrace{\sum_{0 \le i \le n} i.2^i}_{S_n} + 2\sum_{0 \le i \le n} 2^i$$

$$\boxed{S_n = \sum_{0 \le i \le n} i.2^i}$$

COLA

Exercício Resolvido (17)

- Substituindo S_n, temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = \underset{0 \le i \le n}{2\,.\,S_n} + 2\sum_{0 \le i \le n} 2^i$$

S_n

Exercício Resolvido (17)

- Substituindo S_n, temos:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2\sum_{0 \le i \le n} 2^i$$

Exercício Resolvido (17)

- E agora José?

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2\sum_{0 \le i \le n} 2^i$$

E agora José?

Exercício Resolvido (17)

- Vimos que:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2\sum_{0 \le i \le n} 2^i$$

E agora José?

Vimos que

$$\sum_{0 \le i \le n} a.x^i = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \quad \text{para } x \neq 1$$

Exercício Resolvido (17)

- Logo:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2\sum_{0 \le i \le n} 2^i$$

E agora José?

Vimos que

$$\sum_{0 \le i \le n} a.x^i = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \quad \text{para } x \neq 1$$

Fazendo a = 1 e x = 2, temos $\sum_{0 \le i \le n} 1.2^i$ ✓

Exercício Resolvido (17)

- Logo:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2\sum_{0 \le i \le n} 2^i$$

E agora José?

Vimos que

$$\sum_{0 \le i \le n} a.x^i = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \quad \text{para } x \neq 1$$

Fazendo a = 1 e x = 2, temos $\sum_{0 \le i \le n} 2^i = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$ ✓

Exercício Resolvido (17)

- Logo:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2\sum_{0 \le i \le n} 2^i$$

E agora José?

Vimos que

$$\sum_{0 \le i \le n} a.x^i = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \quad \text{para } x \neq 1$$

Fazendo a = 1 e x = 2, temos $\sum_{0 \le i \le n} 2^i = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{n+1}}{-1}$ ✓

Exercício Resolvido (17)

- Logo:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2\sum_{0 \le i \le n} 2^i$$

E agora José?

Vimos que

$$\sum_{0 \le i \le n} a.x^i = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \quad \text{para } x \neq 1$$

Fazendo a = 1 e x = 2, temos $\sum_{0 \le i \le n} 2^i = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 1$

Exercício Resolvido (17)

- Logo:

$$S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2 . (2^{n+1} - 1)$$

E agora José?

Vimos que

$$\sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i = \frac{a - a.x^{n+1}}{1 - x}, \quad \text{para } x \neq 1$$

Fazendo a = 1 e x = 2, temos $\sum_{0 \leq i \leq n} 2^i = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 1$ ✓

Exercício Resolvido (17)

- **Fazendo algebrismo**, temos:

$$S_{n+1} = S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2(2^{n+1} - 1)$$

Exercício Resolvido (17)

- **Fazendo algebrismo**, temos:

$$S_{n+1} = \mathbf{S_n} + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + \mathbf{2(2^{n+1} - 1)} \Rightarrow$$

$$(n+1).2^{n+1} - 2.(2^{n+1}-1) = 2.S_n - S_n$$

Invertendo os termos em vermelho de lado

Exercício Resolvido (17)

- **Fazendo algebrismo**, temos:

$$S_{n+1} = S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2(2^{n+1} - 1) \Rightarrow$$

$$(n+1).2^{n+1} - 2.(2^{n+1}-1) = \mathbf{2.S_n - S_n} \Rightarrow$$

$$S_n = (n+1).2^{n+1} - 2.2^{n+1} + 2$$

Invertendo S_n de lado

Exercício Resolvido (17)

- **Fazendo algebrismo**, temos:

$$S_{n+1} = S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2(2^{n+1} - 1) \Rightarrow$$

$$(n+1).2^{n+1} - 2.(2^{n+1} - 1) = 2.S_n - S_n \Rightarrow$$

$$S_n = \mathbf{(n+1).2^{n+1}} - 2.2^{n+1} + 2 \Rightarrow$$

$$S_n = n2^{n+1} + 2^{n+1} - 2.2^{n+1} + 2$$

Resolvendo $(n+1).2^{n+1}$

Exercício Resolvido (17)

- **Fazendo algebrismo**, temos:

$$S_{n+1} = S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2(2^{n+1} - 1) \Rightarrow$$

$$(n+1).2^{n+1} - 2.(2^{n+1}-1) = 2.S_n - S_n \Rightarrow$$

$$S_n = (n+1).2^{n+1} - 2.2^{n+1} + 2 \Rightarrow$$

$$S_n = n2^{n+1} + \mathbf{2^{n+1} - 2.2^{n+1}} + 2 \Rightarrow$$

$$S_n = n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2$$

Resolvendo $2^{n+1} - 2.2^{n+1}$

Exercício Resolvido (17)

- **Fazendo algebrismo**, temos:

$$S_{n+1} = S_n + (n+1).2^{n+1} = 2.S_n + 2(2^{n+1} - 1) \Rightarrow$$

$$(n+1).2^{n+1} - 2.(2^{n+1}-1) = 2.S_n - S_n \Rightarrow$$

$$S_n = (n+1).2^{n+1} - 2.2^{n+1} + 2 \Rightarrow$$

$$S_n = n2^{n+1} + 2^{n+1} - 2.2^{n+1} + 2 \Rightarrow$$

$$S_n = \mathbf{n2^{n+1} - 2^{n+1}} + 2 \Rightarrow$$

$$S_n = (n-1).2^{n+1} + 2$$

Colocando 2^{n+1} em evidência

Exercício Resolvido (17)

- Finalmente:

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} i.2^i = (n-1).2^{n+1} + 2$$

Agenda

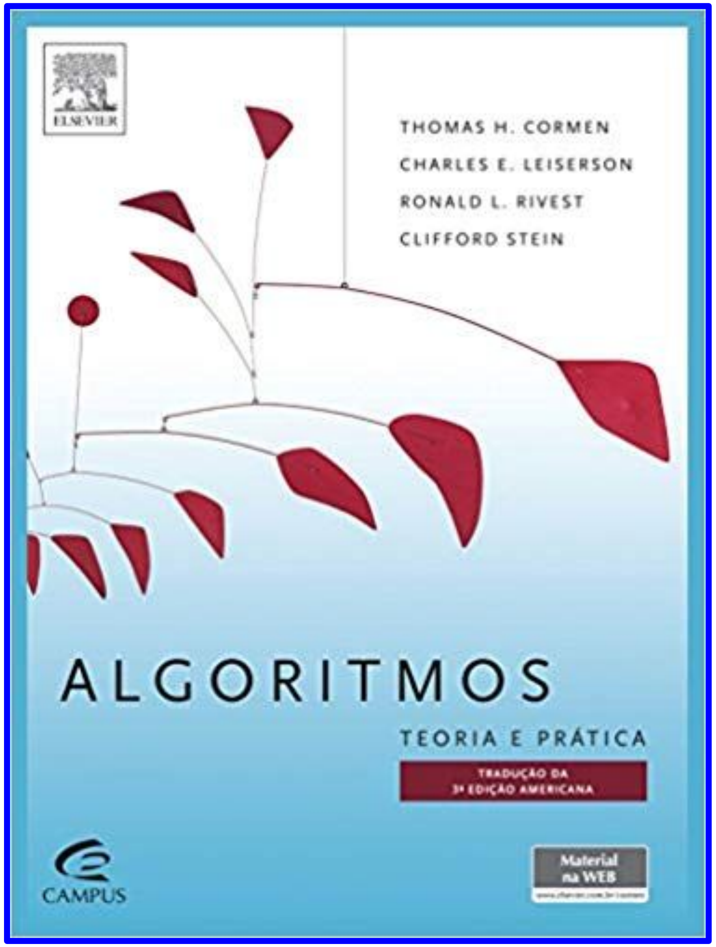
- Motivação
- Notação
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- Manipulação de Somas
- **Alguns Métodos Gerais** ∑
  - Procure!!!
  - Adivinhe a resposta, prove por indução
  - Perturbe a soma

Agenda

- Motivação
- Notação
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- Manipulação de Somas
- **Alguns Métodos Gerais** ∑
  - **Procure!!!**
  - Adivinhe a resposta, prove por indução
  - Perturbe a soma

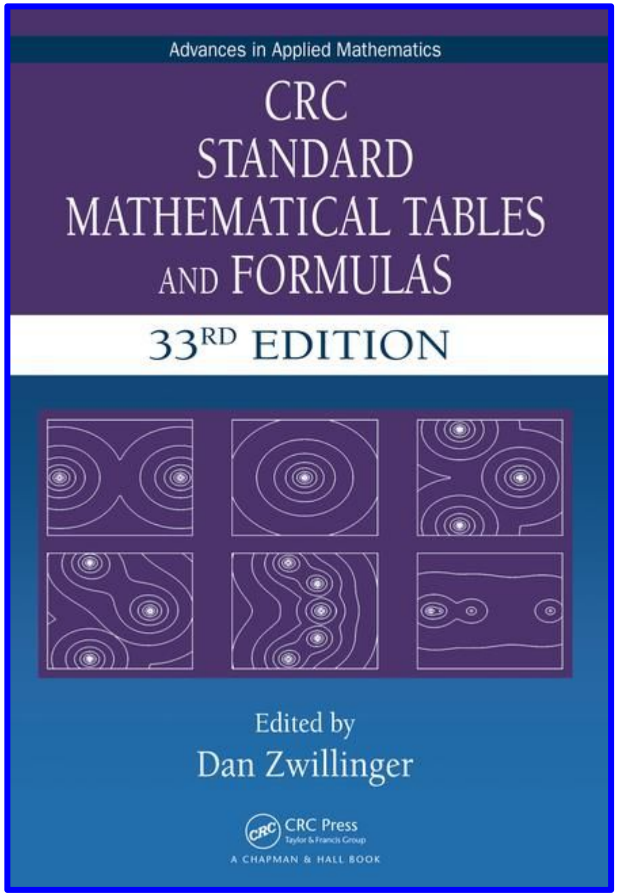
Método Procure!!!

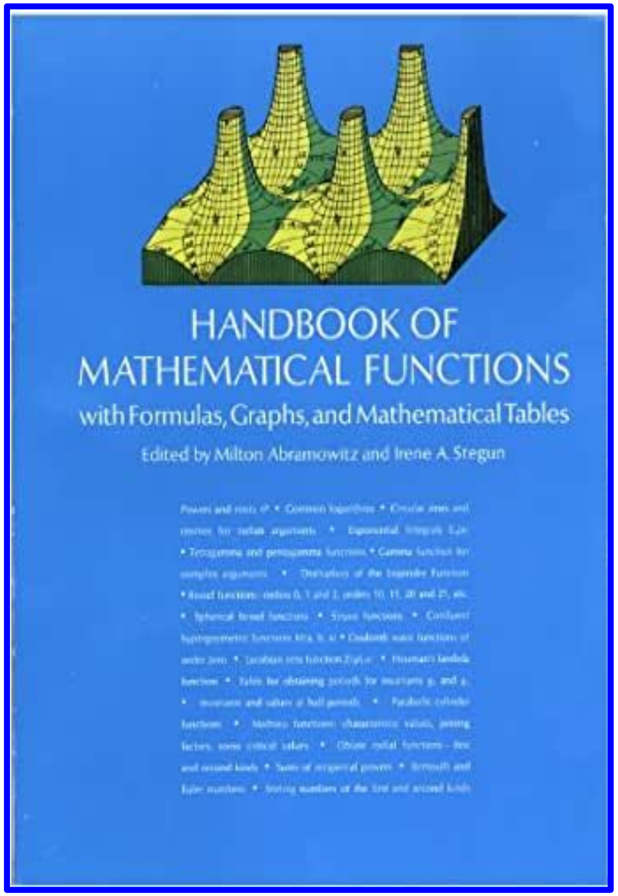
- Possivelmente, todas as fórmulas de somatórios que você precisará estão resolvidas na literatura, logo, procure

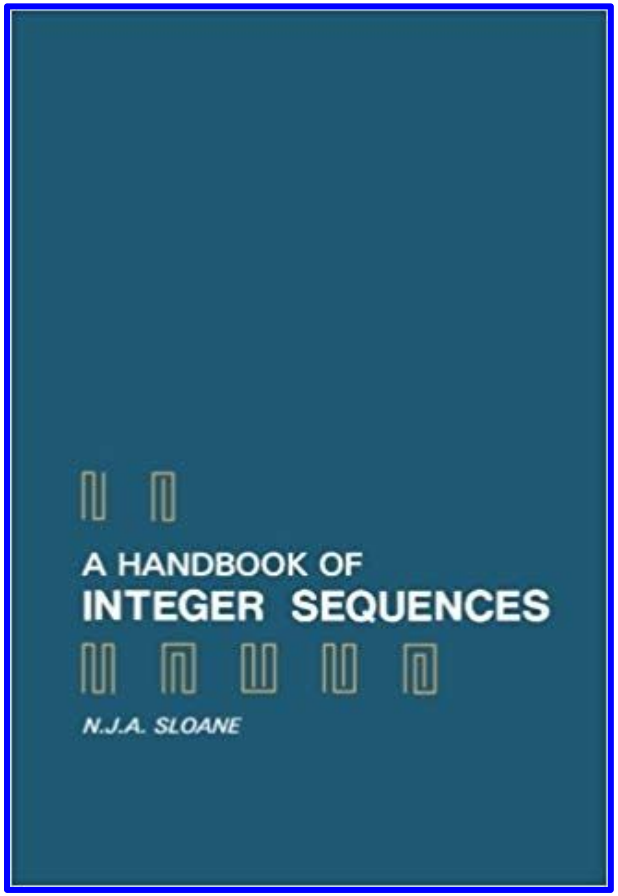


Método Procure!!!

- Possivelmente, todos as fórmulas de somatórios que você precisará estão resolvidas na literatura, logo, procure







Agenda

- Motivação
- Notação
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- Manipulação de Somas
- **Alguns Métodos Gerais** ∑

  - Procure!!!
  - **Adivinhe a resposta, prove por indução**
  - Perturbe a soma

Somatório do Quadrado Perfeito

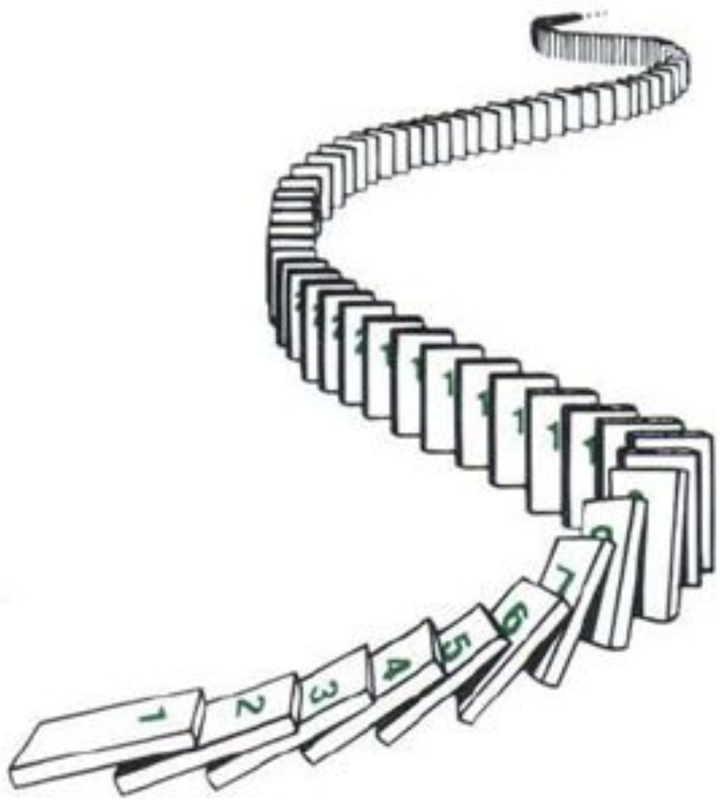
- Este material explica cada método mostrando a fórmula do somatório do quadrado perfeito dos ***n*** primeiros inteiros

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ para } n \geq 0$$

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	
n^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	**...**
S_n	0	1	5	14	30	55	91	140	204	285	385	506	650	

Método: Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

- Se, em um passe de mágica (ou inspiração ou dedução), descobrimos a resposta, basta prová-la por indução matemática



Prova por Indução

- **1º Passo (passo base)**: Provar que a fórmula é verdadeira para o primeiro valor (na equação substituir n pelo primeiro valor)

- **2º Passo (indução propriamente dita)**: Supondo que n > 0 e que a fórmula é válida quando trocamos n por (n-1)

$$\boxed{\mathbf{S_n = S_{n-1} + a_n}}$$

S_{n-1} = é a equação substituindo n por (n-1)

a_n = n-ésimo termo da sequência

Método: Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

- Assim, temos a fórmula a ser provada:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2 = \frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ para } n \geq 0$$

- **1º Passo (passo base)**:

$$S_0 = \frac{0\,.\,(0+1)\,.\,(2.0+1)}{6} = 0 \Rightarrow \textbf{verdadeiro}$$

Método: Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

- **2º Passo (indução propriamente dita)**:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

Método: Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

- **2º Passo (indução propriamente dita)**:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$a_n = n^2$$

$$S_{n-1} = \frac{(n-1)\,((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}$$

Método: Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

- **2º Passo (indução propriamente dita)**:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2$$

Substituindo S_{n-1} e a_n

Método: Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

- **2º Passo (indução propriamente dita)**:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{\mathbf{6}} + n^2 \Rightarrow$$

$$\mathbf{6}S_n = (n-1)(n)(2n-1) + \mathbf{6}n^2$$

Multiplicando a equação por seis

Método: Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

- **2º Passo (indução propriamente dita)**:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = \mathbf{(n-1)(n)}(2n-1) + 6n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = (n^2-n)(2n-1) + 6n^2$$

Resolvendo (n-1)(n)

Método: Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

- **2º Passo (indução propriamente dita)**:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = (n-1)(n)(2n-1) + 6n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = \mathbf{(n^2-n)(2n-1)} + 6n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = [2n^3 - n^2 - 2n^2 + n] + 6n^2$$

Resolvendo **$(n^2-n)(2n-1)$**

Método: Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

- **2º Passo (indução propriamente dita)**:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = (n-1)(n)(2n-1) + 6n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = (n^2-n)(2n-1) + 6n^2 \Rightarrow$$

$$\mathbf{6}S_n = [2n^3 \mathbf{- n^2 - 2n^2} + n] + \mathbf{6n^2} \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Resolvendo os termos com n^2 e invertendo o lado do “6”

Método: Adivinhe a Resposta, Prove por Indução

- **2º Passo (indução propriamente dita)**:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = (n-1)(n)(2n-1) + 6n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = (n^2-n)(2n-1) + 6n^2 \Rightarrow$$

$$6S_n = [2n^3 - n^2 - 2n^2 + n] + 6n^2 \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \Rightarrow$$

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

cqd

Exercício Resolvido (18)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{0}^{n}(3+i) =$$

Exercício Resolvido (18)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{0}^{n}(3+i) =$$

$$\sum_{0}^{n} 3 + \sum_{0}^{n} i =$$

Usando associatividade

Exercício Resolvido (18)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{0}^{n}(3+i) =$$

$$\sum_{0}^{n} 3 + \sum_{0}^{n} i =$$

$$3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} =$$

Sabendo o valor dos dois somatórios:

- Somatório de 3
- Somatório de Gauss

Exercício Resolvido (18)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{0}^{n}(3+i) =$$

$$\sum_{0}^{n}3+\sum_{0}^{n}i =$$

$$3(n+1)+\frac{n(n+1)}{2} =$$

$$\frac{6n+6+n^2+n}{2} =$$

Efetuando algebrismo

Exercício Resolvido (18)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{0}^{n}(3+i) =$$

$$\sum_{0}^{n} 3 + \sum_{0}^{n} i =$$

$$3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$\frac{6n+6+n^2+n}{2} =$$

$$\frac{n^2+7n+6}{2}$$

Continuando nosso algebrismo

Exercício Resolvido (18)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{0}^{n}(3+i) =$$

$$\sum_{0}^{n} 3 + \sum_{0}^{n} i =$$

$$3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$\frac{6n+6+n^2+n}{2} =$$

$$\frac{n^2+7n+6}{2}$$

Prova por indução:

1) Passo base:

2) Indução propriamente dita:

Provando por indução

Exercício Resolvido (18)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{0}^{n}(3+i) =$$

$$\sum_{0}^{n} 3 + \sum_{0}^{n} i =$$

$$3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$\frac{6n+6+n^2+n}{2} =$$

$$\frac{n^2+7n+6}{2}$$

Prova por indução:

1) Passo base:

$$\frac{0^2+7.0+6}{2} = 3 \ (verdadeiro)$$

2) Indução propriamente dita:

Passo base

Exercício Resolvido (18)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{0}^{n}(3+i) =$$

$$\sum_{0}^{n} 3 + \sum_{0}^{n} i =$$

$$3(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$\frac{6n+6+n^2+n}{2} =$$

$$\frac{n^2+7n+6}{2}$$

Prova por indução:

1) Passo base:

$$\frac{0^2+7.0+6}{2} = 3\ (verdadeiro)$$

✓

2) Indução propriamente dita:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(n-1)^2+7(n-1)+6}{2} + (3+n)$$

$$S_n = \frac{(n^2-2n+1)+(7n-7)+6}{2} + \frac{2(3+n)}{2}$$

$$S_n = \frac{(n^2-2n+1)+(7n-7)+6+(6+2n)}{2}$$

$$S_n = \frac{n^2+7n+6}{2}\ (verdadeiro)$$

cqd

Indução propriamente dita

Exercício Resolvido (19)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{1}^{n}[(2i+1)^2-(2i)^2]=$$

Exercício Resolvido (19)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{1}^{n}[(2i+1)^2-(2i)^2] =$$

$$\sum_{1}^{n}[(4i^2+4i+1)-4i^2] =$$

$$\sum_{1}^{n}[4i+1] =$$

$$4\sum_{1}^{n}[i]+\sum_{1}^{n}[1] =$$

$$4\frac{n(n+1)}{2}+n =$$

$$2n^2+3n$$

Resolvendo

Exercício Resolvido (19)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{1}^{n}[(2i+1)^2-(2i)^2] =$$

$$\sum_{1}^{n}[(4i^2+4i+1)-4i^2] =$$

$$\sum_{1}^{n}[4i+1] =$$

$$4\sum_{1}^{n}[i]+\sum_{1}^{n}[1] =$$

$$4\frac{n(n+1)}{2}+n =$$

$$2n^2+3n$$

<u>Prova por indução:</u>

1) Passo base:

2) Indução propriamente dita:

Exercício Resolvido (19)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{1}^{n}[(2i+1)^2-(2i)^2]=$$

$$\sum_{1}^{n}[(4i^2+4i+1)-4i^2]=$$

$$\sum_{1}^{n}[4i+1]=$$

$$4\sum_{1}^{n}[i]+\sum_{1}^{n}[1]=$$

$$4\frac{n(n+1)}{2}+n=$$

$$2n^2+3n$$

Prova por indução:

1) Passo base:

$$2.1^2+3.1=5\ (verdadeiro)$$

✓

2) Indução propriamente dita:

Passo base

Exercício Resolvido (19)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{1}^{n}[(2i+1)^2 - (2i)^2] =$$

$$\sum_{1}^{n}[(4i^2+4i+1) - 4i^2] =$$

$$\sum_{1}^{n}[4i+1] =$$

$$4\sum_{1}^{n}[i] + \sum_{1}^{n}[1] =$$

$$4\frac{n(n+1)}{2} + n =$$

$$2n^2 + 3n$$

Indução propriamente dita

Prova por indução:

1) Passo base:

$$2.1^2 + 3.1 = 5 \ (verdadeiro)$$

✓

2) Indução propriamente dita:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = 2(n-1)^2 + 3(n-1) + (4n+1)$$

$$S_n = 2(n^2 - 2n + 1) + (3n - 3) + (4n + 1)$$

$$S_n = (2n^2 - 4n + 2) + (3n - 3) + (4n + 1)$$

$$S_n = 2n^2 + 3n \ (verdadeiro)$$

cqd

Exercício Resolvido (20)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{1}^{n}[(5i+1)^2-(5i-1)^2] =$$

Exercício Resolvido (20)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{1}^{n}[(5i+1)^2-(5i-1)^2] =$$

$$\sum_{1}^{n}[(25i^2+10i+1)-(25i^2-10i+1)] =$$

$$\sum_{1}^{n}[25i^2+10i+1-25i^2+10i-1] =$$

$$\sum_{1}^{n}[20i] =$$

$$20\frac{n(n+1)}{2} =$$

$$10n^2+10n$$

Resolvendo

Exercício Resolvido (20)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{1}^{n}[(5i+1)^2-(5i-1)^2] =$$

$$\sum_{1}^{n}[(25i^2+10i+1)-(25i^2-10i+1)] =$$

$$\sum_{1}^{n}[25i^2+10i+1-25i^2+10i-1] =$$

$$\sum_{1}^{n}[20i] =$$

$$20\frac{n(n+1)}{2} =$$

$$10n^2+10n$$

Prova por indução:

1) Passo base:

2) Indução propriamente dita:

Exercício Resolvido (20)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{1}^{n}[(5i+1)^2-(5i-1)^2] =$$

$$\sum_{1}^{n}[(25i^2+10i+1)-(25i^2-10i+1)] =$$

$$\sum_{1}^{n}[25i^2+10i+1-25i^2+10i-1] =$$

$$\sum_{1}^{n}[20i] =$$

$$20\frac{n(n+1)}{2} =$$

$$10n^2+10n$$

<u>Prova por indução:</u>

1) Passo base:

$$10.1^2+10.1 = 20\ (verdadeiro)$$

2) Indução propriamente dita:

Passo base

Exercício Resolvido (20)

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$\sum_{1}^{n}[(5i+1)^2-(5i-1)^2] =$$

$$\sum_{1}^{n}[(25i^2+10i+1)-(25i^2-10i+1)] =$$

$$\sum_{1}^{n}[25i^2+10i+1-25i^2+10i-1] =$$

$$\sum_{1}^{n}[20i] =$$

$$20\frac{n(n+1)}{2} =$$

$$10n^2+10n$$

Indução propriamente dita

Prova por indução:

1) Passo base:

$$10.1^2+10.1 = 20\ (verdadeiro)$$

✓

2) Indução propriamente dita:

$$S_n = S_{n-1}+a_n$$

$$S_n = 10(n-1)^2+10(n-1)+(20n)$$

$$S_n = 10(n^2-2n+1)+(10n-10)+20n$$

$$S_n = (10n^2-20n+10)+(10n-10)+20n$$

$$S_n = 10n^2+10n\ (verdadeiro)$$ **cqd**

Exercício Resolvido (21)

- Prove por indução que a fórmula abaixo está correta

$$\sum_{0 \leq i \leq n} i.2^i = (n-1).2^{n+1} + 2$$

Exercício Resolvido (21)

- Prove por indução que a fórmula abaixo está correta

$$\sum_{0 \leq i \leq n} i.2^i = (n-1).2^{n+1} + 2$$

Prova por indução:

1) Passo base:

2) Indução propriamente dita:

Exercício Resolvido (21)

- Prove por indução que a fórmula abaixo está correta

$$\sum_{0 \leq i \leq n} i.2^i = (n-1).2^{n+1} + 2$$

<u>Prova por indução:</u>

1) Passo base:

$$(0-1)2^{0+1} + 2 = 0 \ (verdadeiro)$$

2) Indução propriamente dita:

Passo base

✓

Exercício Resolvido (21)

- Prove por indução que a fórmula abaixo está correta

$$\sum_{0 \le i \le n} i.2^i = (n-1).2^{n+1} + 2$$

Prova por indução:

1) Passo base:

$$(0-1)2^{0+1} + 2 = 0 \ (verdadeiro)$$

2) Indução propriamente dita:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n = [((n-1)-1)2^{(n-1)+1} + 2] + (n2^n)$$

$$S_n = (n-2)2^n + 2 + n2^n$$

$$S_n = (2n-2)2^n + 2$$

$$S_n = (n-1)2^n 2 + 2$$

$$S_n = (n-1)2^{n+1} + 2 \ (verdadeiro)$$

cqd

Indução propriamente dita

Agenda

- Motivação
- Notação
- Relações de Recorrência e Somas Múltiplas
- Manipulação de Somas
- **Alguns Métodos Gerais** ∑
  - Procure!!!
  - Adivinhe a resposta, prove por indução
  - **Perturbe a soma**

Método: Perturbe a Soma

- Aplicamos:
  - Regras básicas de transformação: distributividade, associatividade e comutatividade
  - Propriedades P1 e P2

Exercício Resolvido (22)

- Aplique perturbação para encontrar a fórmula do somatório abaixo

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2$$

Exercício Resolvido (22)

- Aplique perturbação para encontrar a fórmula do somatório abaixo

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} i^2$$

- Aplicando P2, temos:

$$a_i = i^2$$

COLA

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \le i \le n} a_{i+1}$$

COLA

$$S_n + \underbrace{(n+1)^2}_{a_{n+1}} = \underbrace{0^2}_{a_0} + \underbrace{\sum_{0 \le i \le n} (i+1)^2}_{\sum_{0 \le i \le n} a_{i+1}}$$

Exercício Resolvido (22)

- Aplique perturbação para encontrar a fórmula do somatório abaixo

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2$$

- Aplicando P2, temos:

$$a_i = i^2$$

COLA

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$$

COLA

$$S_n + (n+1)^2 = \cancel{0^2} + \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2$$

Exercício Resolvido (22)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2$$

Exercício Resolvido (22)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} \mathbf{(i+1)^2} \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2+2i+1)$$

Resolvendo $(i+1)^2 = (i^2+2i+1)$

Exercício Resolvido (22)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} \mathbf{(i^2+2i+1)} \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2 + \sum_{0 \leq i \leq n} 2i + \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$

Aplicando associatividade

Exercício Resolvido (22)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} (i^2+2i+1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \underbrace{\sum_{0 \le i \le n} i^2}_{S_n} + \sum_{0 \le i \le n} 2i + \sum_{0 \le i \le n} 1$$

Exercício Resolvido (22)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n} (i^2+2i+1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \mathbf{S_n} + \sum_{0 \leq i \leq n} 2i + \sum_{0 \leq i \leq n} 1$$

Substituindo

Exercício Resolvido (22)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} (i^2+2i+1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + \sum_{0 \le i \le n} 2i + \sum_{0 \le i \le n} 1$$

Duas vezes o somatório de Gauss, ou seja, n (n+1)

Exercício Resolvido (22)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} (i^2+2i+1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + \mathbf{n(n+1)} + \sum_{0 \le i \le n} 1$$

Substituindo

Exercício Resolvido (22)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} (i^2+2i+1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + n(n+1) + \underbrace{\sum_{0 \le i \le n} 1}_{(n+1)}$$

Exercício Resolvido (22)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} (i^2+2i+1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \quad S_n \quad + n(n+1) \quad + \quad \mathbf{(n+1)}$$

Substituindo

Exercício Resolvido (22)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} (i^2+2i+1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + n(n+1) + (n+1)$$

Temos um problema, pois as somas se anulam...

E agora José?

Exercício Resolvido (22)

- Continuando, temos:

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^2 \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n} (i^2+2i+1) \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + n(n+1) \quad + \quad (n+1)$$

Temos um problema, pois as somas se anulam...

... vamos tentar o somatório dos cubos!!!

Exercício Resolvido (22)

- Perturbando o somatório dos cubos para encontrar a fórmula fechada do somatório dos quadrados

$$S\text{CUBO}_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^3$$

Exercício Resolvido (22)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$S\text{CUBO}_n + a\text{CUBO}_{n+1} = a\text{CUBO}_0 + \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^3$$

$$a_i = i^3$$ COLA

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \le i \le n} a_{i+1}$$ COLA

Exercício Resolvido (22)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$S_{CUBO_n} + \color{red}{\mathbf{(n+1)^3}} = \color{red}{\mathbf{0^3}} + \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^3$$

$$a_i = i^3$$

COLA

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \le i \le n} a_{i+1}$$

COLA

Exercício Resolvido (22)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$S_{CUBO_n} + \mathbf{(n+1)^3} = \cancel{0^3} + \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^3$$

$$a_i = i^3$$

COLA

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \le i \le n} a_{i+1}$$

COLA

Exercício Resolvido (22)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$S\text{CUBO}_n + (n+1)^3 = \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^3 \Rightarrow$$

$$S\text{CUBO}_n + (n+1)^3 = \sum_{0 \le i \le n} (i^3 + 3i^2 + 3i + 1)$$

Resolvendo: $(i+1)^3 = (i+1)(i+1)(i+1) = (i^3 + 3i^2 + 3i + 1)$

Exercício Resolvido (22)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$S_{CUBO_n} + (n+1)^3 = \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^3 \Rightarrow$$

$$S_{CUBO_n} + (n+1)^3 = \sum_{0 \le i \le n} \mathbf{(i^3+3i^2+3i+1)} \Rightarrow$$

$$S_{CUBO_n} + (n+1)^3 = \sum_{0 \le i \le n} i^3 + \sum_{0 \le i \le n} 3i^2 + \sum_{0 \le i \le n} 3i + \sum_{0 \le i \le n} 1$$

Aplicando associatividade

Exercício Resolvido (22)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$Scubo_n + (n+1)^3 = \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^3 \Rightarrow$$

$$Scubo_n + (n+1)^3 = \sum_{0 \le i \le n} (i^3+3i^2+3i+1) \Rightarrow$$

$$Scubo_n + (n+1)^3 = \underbrace{\sum_{0 \le i \le n} i^3}_{Scubo_n} + \underbrace{\sum_{0 \le i \le n} 3i^2}_{3S_n} + \underbrace{\sum_{0 \le i \le n} 3i}_{\frac{3n(n+1)}{2}} + \underbrace{\sum_{0 \le i \le n} 1}_{(n+1)}$$

Exercício Resolvido (22)

- Assim, aplicando P2 no somatório dos cubos, temos:

$$S\text{CUBO}_n + (n+1)^3 = \sum_{0 \le i \le n} (i+1)^3 \Rightarrow$$

$$S\text{CUBO}_n + (n+1)^3 = \sum_{0 \le i \le n} (i^3+3i^2+3i+1) \Rightarrow$$

$$S\text{CUBO}_n + (n+1)^3 = \sum_{0 \le i \le n} i^3 + \sum_{0 \le i \le n} 3i^2 + \sum_{0 \le i \le n} 3i + \sum_{0 \le i \le n} 1 \Rightarrow$$

$$S\text{CUBO}_n + (n+1)^3 = S\text{CUBO}_n + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1)$$

Substituindo

Exercício Resolvido (22)

- Continuando:

$$S\text{CUBO}_n + (n+1)^3 = S\text{CUBO}_n + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

Exercício Resolvido (22)

- Continuando:

$$\mathbf{S\text{CUBO}_n} + (n+1)^3 = \mathbf{S\text{CUBO}_n} + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1)$$

Eliminando $S\text{CUBO}_n$

Exercício Resolvido (22)

- Continuando:

$$S\text{CUBO}_n + (n+1)^3 = S\text{CUBO}_n + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = \mathbf{3S_n} + \frac{3n(n+1)}{\mathbf{2}} + (n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)$$

Multiplicando a equação por dois e invertendo S_n de lado

Exercício Resolvido (22)

- Continuando:

$$S\text{CUBO}_n + (n+1)^3 = S\text{CUBO}_n + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = \mathbf{2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)} \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 3n^2 - 3n - 2n - 2$$

Resolvendo expressão em vermelho

Exercício Resolvido (22)

- Continuando:

$$S\text{CUBO}_n + (n+1)^3 = S\text{CUBO}_n + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = \mathbf{2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1)} - 3n^2 - 3n - 2n - 2 \Rightarrow$$

$$6S_n = 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 3n - 2n - 2$$

Resolvendo expressão em vermelho

Exercício Resolvido (22)

- Continuando:

$$S\text{CUBO}_n + (n+1)^3 = S\text{CUBO}_n + \quad 3S_n \quad + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 3n^2 - 3n - 2n - 2 \Rightarrow$$

$$\color{red}{\mathbf{6}}S_n = 2n^3 + \color{red}{\mathbf{6n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 3n - 2n - 2}} \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Resolvendo expressão em vermelho

Exercício Resolvido (22)

- Continuando:

$$S\text{CUBO}_n + (n+1)^3 = S\text{CUBO}_n + \quad 3S_n \quad + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1) \Rightarrow$$

$$6S_n = 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 3n^2 - 3n - 2n - 2 \Rightarrow$$

$$6S_n = 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 3n - 2n - 2 \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{\mathbf{2n^3 + 3n^2 + n}}{6} \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6}$$

Resolvendo expressão em vermelho

Exercício (1)

- Faça um método *int somatorioPA(double a, double b, int n)* que retorna o somatório dos n primeiros termos de uma PA com termo inicial *a* e razão *b*.

Exercício (2)

- Faça um vídeo explicando como encontramos o somatório dos quadrados perfeitos, ou seja, explicar o Exercício Resolvido 22 com **suas palavras** (tempo máximo de 5 minutos)

Exercício (3)

- Um algoritmo de ordenação tradicional é o Inserção. Faça a análise de complexidade desse algoritmo para os números de comparações e movimentações entre registros no pior e melhor caso