Introdução aos Somatórios

Unidade I: Análise de Algoritmos

PUC Minas Virtual

Agenda

- Motivação
- Notação

Motivação

Principal Motivação na Computação

- Levantamento de custo (e.g., tempo e memória) de algoritmos
- Custo de um algoritmo é a soma dos custos das suas operações

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos ***n*** primeiros números inteiros

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos ***n*** primeiros números inteiros

Ciência da Computação

```
int somatorio(int n){
    int soma = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        soma += i;
    }
    return soma;
}
```

Matemática

$$\sum_{i=1}^{i \leq n} i$$

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos ***n*** primeiros números inteiros

Ciência da Computação

```
int somatorio(int n){
    int soma = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        soma += i;
    }
    return soma;
}
```

início

Matemática

$$\sum_{i=1}^{i \leq n} i$$

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos ***n*** primeiros números inteiros

Ciência da Computação

```
int somatorio(int n){
    int soma = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        soma += i;
    }
    return soma;
}
```

condição de parada

Matemática

$$\sum_{i=1}^{i \leq n} i$$

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos ***n*** primeiros números inteiros

termo

Ciência da Computação

```
int somatorio(int n){
    int soma = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        soma += i;
    }
    return soma;
}
```

Matemática

$$\sum_{i=1}^{i \le n} i$$

Exercício Resolvido (2)

- Mostre o número de comparações entre registros que o algoritmo de Seleção realiza

```
for (int i = 0; i < (n - 1); i++) {
    int menor = i;
    for (int j = (i + 1); j < n; j++){
        if (array[menor] > array[j]){
        menor = j;
        }
    }
    swap(menor, i);
}
```

Exercício Resolvido (2)

- Mostre o número de comparações entre registros que o algoritmo de Seleção realiza

```
for (int i = 0; i < (n - 1); i++) {
    int menor = i;
    for (int j = (i + 1); j < n; j++){
        if (array[menor] > array[j]){
            menor = j;
        }
    }
    swap(menor, i);
}
```

CONSIDERAÇÕES INICIAIS:

1) Comparações desejadas: no if

2) Laço externo repete (n-1) vezes, para: 0, 1, 2, ..., n-2

3) Laço interno repete n - (i+1) vezes, para: i+1, i+2, i+3, ..., n-1

Exercício Resolvido (2)

- Mostre o número de comparações entre registros que o algoritmo de Seleção realiza

```
for (int i = 0; i < (n - 1); i++) {
    int menor = i;
    for (int j = (i + 1); j < n; j++){
        if (array[menor] > array[j]){
            menor = j;
        }
    }
    swap(menor, i);
}
```

i	0	1	2	...	n-2
c(i) = (n - (i+1))	n-1	n-2	n-3	...	1

CONSIDERAÇÕES INICIAIS:

1) Comparações desejadas: no if

2) Laço externo repete (n-1) vezes, para: 0, 1, 2, ..., n-2

3) Laço interno repete n - (i+1) vezes, para: i+1, i+2, i+3, ..., n-1

Exercício Resolvido (2)

- Mostre o número de comparações entre registros que o algoritmo de Seleção realiza

```
for (int i = 0; i < (n - 1); i++) {
    int menor = i;
    for (int j = (i + 1); j < n; j++){
        if (array[menor] > array[j]){
            menor = j;
        }
    }
    swap(menor, i);
}
```

i	0	1	2	...	n-2
c(i) = (n - (i+1))	n-1	n-2	n-3		1

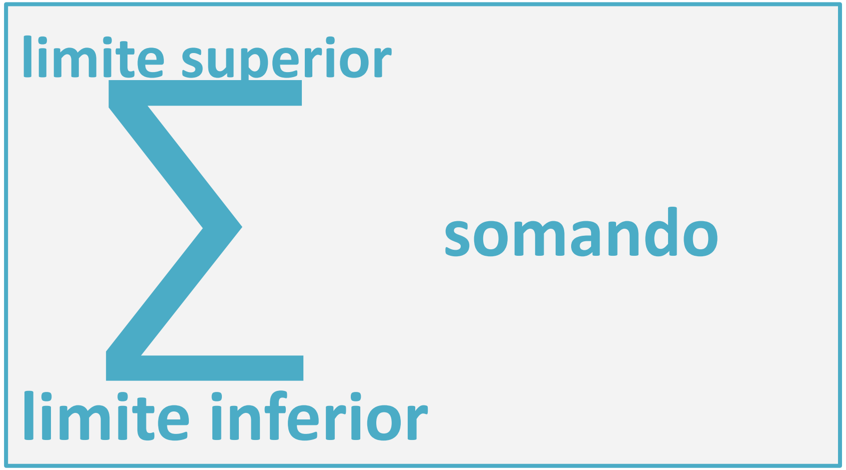
RESPOSTA:

$$c(n) = \sum_{i=0}^{n-2} (n - i - 1)$$

Notação

Notação Sigma

- Forma abreviada para escrever a soma de um conjunto de termos que seguem um padrão matemático



Notação Sigma

- Forma abreviada para escrever a soma de um conjunto de termos que seguem um padrão matemático

$$\sum_{\text{limite inferior}}^{\text{limite superior}} \text{somando}$$

Exemplo:

$$\sum_{i=0}^{n-2} (n - i - 1)$$

Notação Sigma

- Forma abreviada para escrever a soma de um conjunto de termos que seguem um padrão matemático

$$\sum \quad \text{somando}$$

os dois limites

Notação Sigma

- Forma abreviada para escrever a soma de um conjunto de termos que seguem um padrão matemático

$$\sum_{\text{os dois limites}} \text{somando}$$

<u>**Exemplo**</u>**:**

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$$

Notação Sigma

- Forma abreviada para escrever a soma de um conjunto de termos que seguem um padrão matemático

$$\sum_{P(i)} A_i$$

Notação Sigma

- Forma abreviada para escrever a soma de um conjunto de termos que seguem um padrão matemático

$$\sum_{P(i)} A_i$$

$P(i) \rightarrow$ Propriedade $P(i)$

Notação Sigma

- Forma abreviada para escrever a soma de um conjunto de termos que seguem um padrão matemático

$$\sum_{P(i)} A_i$$

$P(i) \rightarrow$ Propriedade P(i)

<u>Exemplo</u>:

$$\sum a_i = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_n \quad (n \text{ é}$$

ímpar)
$1 \leq i \leq n$

i é ímpar

Variações da Notação Sigma

$$\sum_{i=1}^{i \le n} a_i = \sum_{1}^{n} a_i = \sum_{1 \le i \le n} a_i = \sum_{i=1}^{i \le n} a_i$$

Exercício Resolvido (3): Resolva os Somatórios

a) $\sum_{n=1}^{5} n^2 = ?$

b) $\sum_{1}^{5} 3i = ?$

c) $\sum_{1}^{5} (3 - 2i) = ?$

d) $\sum_{1}^{5} (2i+x) = ?$

e) $\sum_{0}^{5} i \,.\, (i-1).(5-i) = ?$

f) $\sum_{m=1}^{5} (8j - 2m) = ?$

Exercício Resolvido (3a)

a) $\sum_{n=1}^{5} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$

Exercício Resolvido (3b)

b) $\sum_{1}^{5} 3i = ?$

Neste material, a menos que dito o contrário, a notação $\sum_{1}^{n}$ incrementa o índice i. Para evitar ambiguidade, podemos usar a notação $\sum_{i=1}^{n}$

Exercício Resolvido (3b)

b) $\sum_{1}^{5} 3i = (3.1) + (3.2) + (3.3) + (3.4) + (3.5) = 3 + 6 + 9 + 12 + 15 = 45$

Exercício Resolvido (3b)

b) $\sum_{1}^{5} 3i = 3.\sum_{1}^{5} i = 3 \,.\, (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 3 \,.\, 15 = 45$

Outra forma de responder!!!

Exercício Resolvido (3c)

c) $\sum_{1}^{5} (3 - 2i) = (3 - 2.1) + (3 - 2.2) + (3 - 2.3) + (3 - 2.4) + (3 - 2.5)$

$= (3 - 2) + (3 - 4) + (3 - 6) + (3 - 8) + (3 - 10)$

$= 1 - 1 - 3 - 5 - 7$

$= - 15$

Exercício Resolvido (3c)

c) $\sum_{1}^{5} (3 - 2i) = \sum_{1}^{5} 3 - \sum_{1}^{5} 2i$

$= (3+3+3+3+3) - [(2.1) + (2.2) + (2.3) + (2.4) + (2.5)]$

$= -15$

Outra forma de responder!!!

Exercício Resolvido (3c)

c) $\sum_{1}^{5} (3 - 2i) = 3.\sum_{1}^{5} 1 \; - \; 2.\sum_{1}^{5} i$

$= \; 3.(1+1+1+1+1) - 2.[1 + 2 + 3 + 4 + 5]$

$= - 15$

Outra (mais uma) forma de responder!!!

Exercício Resolvido (3d)

d) $\sum_{1}^{5} (2i+x) = ?$

Exercício Resolvido (3d)

d) $\sum_{1}^{5} (2i+x) = 2.(1 + 2 + 3 + 4 + 5) + (x + x + x + x + x)$

$= 2.15 + 5x$

$= 30 + 5x$

Exercício Resolvido (3e)

e) $\sum_{0}^{5} i \,.\, (i-1).(5-i) = [0 \,.\, (-1) \,.\, 5] +$

$[1 \,.\, 0 \,.\, 4] +$

$[2 \,.\, 1 \,.\, 3] +$

$[3 \,.\, 2 \,.\, 2] +$

$[4 \,.\, 3 \,.\, 1] +$

$[5 \,.\, 4 \,.\, 0]$

$= 0 + 0 + 6 + 12 + 12 + 0$

$= 30$

Exercício Resolvido (3f)

f) $\sum_{m=1}^{5} (8j - 2m) = (8j - 2) + (8j - 4) + (8j - 6) + (8j - 8) + (8j - 10)$

$= (40j - 30)$

Exercício Resolvido (4)

- Podemos afirmar que $\sum_{0}^{5} i \,.\, (i-1) \,.\, (5-i) = \sum_{2}^{4} i \,.\, (i-1) \,.\, (5-i)$? Justifique.

Exercício Resolvido (4)

- Podemos afirmar que $\sum_{0}^{5} i \,.\, (i-1) \,.\, (5-i) = \sum_{2}^{4} i \,.\, (i-1) \,.\, (5-i)$? Justifique.

Sim, pois como os termos a_0, a_1 e a_5 são iguais a zero, o resultado dos dois somatórios é igual a $(a_2 + a_3 + a_4)$

Exercício Resolvido (5)

- Assinale a alternativa que contém a expressão cuja soma é igual a 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49

a) $\sum_{i=0}^{5} (i^2 + 2i + 4)$

b) $\sum_{i=0}^{5} (3i + 2)^2$

c) $\sum_{i=0}^{5} (i + 2)^2$